PELABELAN *PRODUCT CORDIAL* PADA *TENSOR PRODUCT PATH DAN SIKEL*

Setia Endrayana[1], Bayu Surarso[2], Siti Khabibah[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

sterrroo@rocketmail.com

ABSTRACT. Product cordial labeling is a binary vertex labeling with vertex condition is absolute value from difference the number of vertex having labels 0 and the number of vertex having labels 1 less or equal 1. For edge condition is absolute value from difference the number of edges having labels 0 and the number of edges having labels 1 less or equal 1 and how labels side by $f^{*}: E(G) \to \{0,1\}$. A graph admits product cordial labeling is called product cordial graph. For the graph G_1 and G_2 the tensor product is denoted by ($G_1(T_p)G_2$) which is the graph with vertex set $V(G_1(T_p)G_2)$ and edge set $E\left(G_1\left(T_p\right)G_2\right) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \mid u_1u_2 \in E(G_1)$ and $v_1v_2 \in E(G_2)\}$. Path P_m is a path with m vertexs and cycle C_n is a cycle with n vertexs. Tensor product $P_m(T_p)P_n$ is the union of two graphs path P_m and path P_n, tensor product $C_m(T_p)P_n$ is the union of two graphs cycle C_m and path P_n, tensor product $C_m(T_p)C_n$ is the union of two graphs cycle C_m and cycle C_n. Graph generated by a merger between 2 component parts of each tensor product $P_m(T_p)P_n$, $C_m(T_p)P_n$, dan $C_m(T_p)C_n$ with any path P_k is a product cordial.
Keywords: Cordial labeling, Porduct cordial labeling, Tensor product

I. PENDAHULUAN

Pelabelan graph merupakan salah satu pokok bahasan pada teori graph. Pelabelan graph adalah penetapan dari bilangan bulat pada titik atau sisi atau keduanya sesuai dengan kondisi tertentu. Pelabelan graph pertama kali diperkenalkan pada akhir tahun 1960. Pelabelan mempunyai banyak jenis seperti pelabelan *graceful*, pelabelan harmonis, pelabelan ajaib, pelabelan anti-ajaib, pelabelan *cordial* dan lain-lain. Pada bahasan ini secara umum membahas tentang pelabelan *cordial*, macam- macam pelabelan *cordial* sendiri ada pelabelan *E-cordial*, *product cordial*, *H-cordial, A-cordial* dan lain-lain.

Pada perkembangannya banyak yang membahas tentang pelabelan *cordial* salah satunya tentang pelabelan *product cordial* seperti *Product Labeling in the Context of Tensor Product of Graphs* (Vaidya, S.K. and Vyas, N.B., 2011,p.83-88). Selain itu pelabelan *product cordial* juga dapat dilabelkan pada *tensor product* dalam graph $P_m(T_p)P_n$, $C_m(T_p)P_n$, dan $C_m(T_p)C_n$, serta *tensor product* dalam graph yang diperoleh dengan menggabungkan 2 komponen *sikel* atau *path* dengan sembarang *path*.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1. **[9]** *Tensor product* dari dua graf G_1 dan G_2 adalah penggabungan dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan oleh $G_1(T_p)G_2$ mempunyai himpunan titik $V\left(G_1\left(T_p\right)G_2\right) =$

$V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E\big(G_1(T_p)G_2\big) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \,\big|\, u_1u_2 \in E(G_1)$ dan $v_1v_2 \in E(G_2)\}$.

Teorema 2.2.1 [9]

Tensor product $P_m(T_p)P_n$ merupakan *product cordial.*

Bukti :

Diberikan dua *path* P_m dan P_n. Graf $G = P_m(T_p)P_n$ dengan himpunan titik $V(G)=V(P_m)\times V(P_n)$ dan himpunan sisi sebanyak $|E(G)| = 2(m-1)(n-1)$. Misalkan u_{ij} dimana $1 \leq i \leq m$ *dan* $1 \leq j \leq n$ sebagai titik titik dari graf G. Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 1; & jika\ i + j \text{ genap} \\ 0; & lainnya \end{cases}$$

Kasus 1:

Untuk banyaknya titik dari kedua *path* P_m dan P_n adalah ganjil.

Terdapat $\frac{mn+1}{2}$ titik yang berlabel 1 dan terdapat $\frac{mn+1}{2} - 1$ titik yang berlabel 0.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = (m-1)(n-1)$, $e_f(1) = (m-1)(n-1)$.

Kasus 2:

Untuk banyaknya titik dari kedua *path* P_m dan P_n adalah genap atau salah satu dari *path* tersebut genap.

Terdapat $\frac{mn}{2}$ titik yang berlabel 1 dan terdapat $\frac{mn}{2}$ titik yang berlabel 0.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = (m-1)(n-1)$, $e_f(1) = (m-1)(n-1)$.

Teorema 2.2.2 [9]

Tensor product $C_m(T_p)P_n$ merupakan *product cordial* untuk m dan n genap.

Bukti :

Diberikan *sikel* C_m dan *path* P_n. Graf $G = C_m(T_p)P_n$ dengan himpunan titik sebanyak $|V(G)| = mn$ dan himpunan sisi sebanyak $|E(G)| = 2(m)(n\text{-}1)$. Misalkan u_{ij} dimana $1 \le i \le m$ *dan* $1 \le j \le n$ sebagai titik titik dari graf G. Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 1; & jika\ i + j \text{ genap} \\ 0; & lainnya \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn}{2}$ titik yang berlabel 1 dan terdapat $\frac{mn}{2}$ titik yang berlabel 0.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = (m)(n-1)$, $e_f(1) = (m)(n-1)$.

Teorema 2.2.3 [9]

Tensor product $C_m(T_p)C_n$ merupakan *product cordial* untuk m dan n genap.

Bukti :

Diberikan sikel C_m dan *sikel* C_n. Graf $G = C_m(T_p)C_n$ dengan titik himpunan sebanyak $|V(G)| = mn$ dan himpunan sisi sebanyak $|E(G)| = 2(m)(n)$. Misalkan u_{ij} dimana $1 \le i \le m$ *dan* $1 \le j \le n$ sebagai titik titik dari graf G. Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 1; & jika\ i + j \text{ genap} \\ 0; & lainnya \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn}{2}$ titik yang berlabel 1 dan terdapat $\frac{mn}{2}$ titik yang berlabel 0.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = (m)(n)$, $e_f(1) = (m)(n)$.

Teorema 2.3.1 [9]

Graf yang dihasilkan oleh penggabungan dua komponen $P_m(T_p)P_n$ dengan sembarang *path* P_k merupakan *product cordial*, kecuali pada m,n dan k ganjil.

Bukti :

Pada teorema 2.2.1 selanjutnya diberikan *path* P_k. Graf *G* dibagi menjadi menjadi dua bagian yang semua titik dari masing masing bagian terhubung. Misalkan *G'* merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan dua bagian dari graf *G* yang dihubungkan oleh *path* P_k. graf *G'* mempunyai titik sebanyak $|V(G')| = mn + k-2$ dan mempunyai sisi sebanyak $|E(G')| = 2$ (m-1) (n-1) + *k-1*.

Kasus 1:

Untuk k ≡ 0(mod 2), dimana m dan n salah satu atau keduanya genap. Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0;\quad 1 \leq i \leq j$$

$$f(v_i) = 1;\quad 1 \leq i \leq j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \leq i \leq \dfrac{k}{2} \\ 1; & \dfrac{k}{2} \leq i \leq k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2(m-1)(n-1)+k}{2}$, $e_f(1) = \frac{2(m-1)(n-1)+k}{2} - 1$.

Kasus 2:

Untuk k ≡ 1(mod 2), dimana m dan n salah satu atau keduanya genap. Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0;\quad 1 \leq i \leq j$$

$$f(v_i) = 1;\quad 1 \leq i \leq j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ 1; & \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \leq i \leq k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-1}{2} - 1$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2(m-1)(n-1)+k-1}{2}$, $e_f(1) = \frac{2(m-1)(n-1)+k-1}{2}$.

Kasus 3:

Untuk k ≡ 0(mod 2), dimana m dan n ganjil. Didefinisikan pelabelan titik biner *f* : *V(G)* → {0,1} sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0; \quad 1 \leq i \leq j$$

$$f(v_i) = 1; \quad 1 \leq i \leq j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ 1; & \frac{k}{2} \leq i \leq k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-1}{2} - 1$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-1}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2(m-1)(n-1)+k}{2}$, $e_f(1) = \frac{2(m-1)(n-1)+k}{2} - 1$.

Teorema 2.3.2 [9]

Graf yang dihasilkan oleh penggabungan dua komponen $C_m(T_p)P_n$ dengan sembarang *path* P_k merupakan *product cordial*.

Bukti :

Pada teorema 2.2.1 selanjutnya diberikan *path* P_k. Graf *G* dibagi menjadi menjadi dua bagian yang semua titik dari masing masing bagian terhubung. Misalkan *G'* merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan dua bagian dari graf G yang dihubungkan oleh *path* P_k. graf G' mempunyai titik sebanyak $|V(G')| = mn+k-2$ dan mempunyai sisi sebanyak $|E(G')| = 2m(n-1) + k - 1$.

Kasus 1:

Untuk k ≡ 0(mod 2). Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(v_i) = 1; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \le i \le \frac{k}{2} \\ 1; & \frac{k}{2} \le i \le k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2m(n-1)+k}{2}$, $e_f(1) = \frac{2m(n-1)+k}{2} - 1$.

Kasus 2:

Untuk k ≡ 1(mod 2). Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(u_i) = 1; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \le i \le \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ 1; & \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \le i \le k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-1}{2} - 1$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-1}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2m(n-1)+k-1}{2}$, $e_f(1) = \frac{2m(n-1)+k-1}{2}$.

Teorema 2.3.3 [9]

Graf yang dihasilkan oleh penggabungan dua komponen $C_m(T_p)C_n$ dengan sembarang *path* P_k merupakan *product cordial*.

Bukti :

Pada teorema 2.2.1 selanjutnya diberikan *path* P_k. Graf G dibagi menjadi menjadi dua bagian yang semua titik dari masing masing bagian terhubung. Misalkan G' merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan dua bagian dari graf G yang dihubungkan oleh *path* P_k. graf G' mempunyai titik sebanyak $|V(G')| = mn + k - 2$ dan mempunyai sisi sebanyak $|E(G')| = 2mn + k - 1$.

Kasus 1:

Untuk k ≡ 0(mod 2). Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \to \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(v_i) = 1; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \le i \le \frac{k}{2} \\ 1; & \frac{k}{2} \le i \le k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-2}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2mn+k}{2}$, $e_f(1) = \frac{2mn+k}{2} - 1$.

Kasus 2:

Untuk k ≡ 1(mod 2). Didefinisikan pelabelan titik biner $f : V(G) \to \{0,1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = 0; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(v_i) = 1; \quad 1 \le i \le j$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 0; & 1 \le i \le \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ 1; & \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \le i \le k \end{cases}$$

Terdapat $\frac{mn+k-1}{2} - 1$ titik yang berlabel 0 dan terdapat $\frac{mn+k-1}{2}$ titik yang berlabel 1.

Pelabelan sisi *product cordial* $f^*(e = uv) = f(u)f(v)$, apabila kedua titiknya berlabel 1, maka $f^*(e = uv) = 1$, sedangkan apabila kedua titik atau salah satu titik berlabel 0 maka $f^*(e = uv) = 0$. Diperoleh $e_f(0) = \frac{2mn+k-1}{2}$, $e_f(1) = \frac{2mn+k-1}{2}$.

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa *tensor product* $P_m(T_p)P_n$ merupakan *product cordial, tensor product* $C_m(T_p)P_n$ merupakan *product cordial* untuk *m* dan *n* genap, *tensor product* $C_m(T_p)C_n$ merupakan *product cordial* untuk m dan n genap, graf dihasilkan oleh penggabungan dua komponen $P_m(T_p)P_n$ dengan sembarang *path* P_k adalah *product cordial*, kecuali pada m,n dan k ganjil, graf dihasilkan oleh penggabungan dua komponen $C_m(T_p)P_n$ dengan sembarang *path* P_k adalah *product cordial,* dan graf dihasilkan oleh penggabungan dua komponen $C_m(T_p)C_n$ dengan sembarang *path* P_k adalah *product cordial.*

IV. UCAPAN TERIMAKASIH

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini. Oleh karena itu, rasa hormat dan terimakasih penulis ingin sampaikan kepada :

1. Bapak Drs. Bayu Surarso, M.Sc.PhD selaku pembimbing 1 yang dengan penuh kesabaran membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini,

2. Ibu Siti Khabibah, S.Si, M.Sc selaku pembimbing 2 yang juga telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya tugas akhir ini,
3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan yang telah Anda berikan kepada penulis, Amin.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, Robert G. And Donald R. Sherbert. 2000. "*Introduction to Real Analysis Third Edition*". New York : John Wiley and Sons

[2] Chartrand, G. and Lesniak, L. 1996. "*Graphs & Digraphs,* 3rd *edition*". Chapman & Hill : London.

[3] http://www.ittelkom.ac.id/staf/zka/Matematika%20Diskrit/GRAPH.ppt (10 Juni 2012)

[4] Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si. 2008. "*Hand Out Mata Kuliah Teori Graf (MT 424) Jilid Satu*". Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung.

[5] Lipschutz, Seymour. 1964. "Set Theory and Related Topics". McGRAW-HILL BOOK COMPANY : New York.

[6] Munir, Rinaldi. 2007. "*Matematika Diskrit"*. Bandung: Informatika Bandung.

[7] Robin J. & John Watskins. 1990. "*Graphs an Introductory Approach*". John Willey & Sons : Canada.

[8] Rosen, Kenneth H. 2007. "*Discrete Mathematics and Its Applications Sixth Edition*". New York : McGRAW-HILL BOOK COMPANY.

[9] Vaidya, S K & Vyas, N B.2011. "*Product Cordial Labeling in the Context of Tensor Product of Graphs*. *Journal of Mathematics Research*" .3(3) 308-211