HUBUNGAN BENTUK-BENTUK KHUSUS *K*-ALJABAR HIPER IMPLIKATIF

Ratna Kusuma Ayu, Drs. Djuwandi SU, Suryoto, S.Si, M.Si

Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

ayu_ch4n@yahoo.com

ABSTRAK.

Setiap *K*-aljabar hiper dapat dipandang sebagai *BCK*-aljabar dimana peran operasi biner pada *BCK*-aljabar diambil alih oleh operasi hiper yang berlaku pada *K*-aljabar hiper. Operasi hiper merupakan pemetaaan dari himpunan ke keluarga himpunan sehingga operasi hiper yang berlaku pada *K*-aljabar merupakan generalisasi dari operasi biner yang berlaku pada *BCK*-aljabar. Dalam Tugas Akhir ini, akan dijelaskan Definition-Definition dan teorema-teorema dalam *K*-aljabar hiper, *K*-aljabar hiper implikatif, *K*-aljabar hiper implikatif kuat dan *K*-aljabar hiper implikatif lemah serta hubungan antara ketiganya.

Kata kunci : *K*-aljabar hiper, *K*-ideal hiper, *K*-aljabar hiper implikatif lemah, *K*-aljabar hiper implikatif kuat.

I. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tidak kosong dengan satu operasi biner atau lebih dan paling sedikit mempunyai sebuah relasi ekuivalensi serta memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku di dalamnya. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah *K*-aljabar hiper.

Teori struktur aljabar hiper pertama kali diperkenalkan F. Marty pada tahun 1934 pada saat diselenggarakan Kongres Matematikawan Skandinavia kedelapan. Pada tahun 2000, R. A. Borzooei, A. Hasankhani, M. M. Zahedi dan Y. B. Jun memperkenalkan bentuk struktur aljabar ini, yang disebut dengan *K*-aljabar hiper. Selanjutnya pada tahun 2005, M. M. Zahedi dan A. B. Saeid, memperkenalkan bentuk-bentuk khusus struktur aljabar, yang dikenal dengan *K*-aljabar hiper implikatif. Kemudian pada tahun 2008, M. M. Zahedi memperkenalkan dan mengkaji konsep *K*-aljabar hiper sederhana dan sifat pentingnya.

Setiap *K*-aljabar dibangun pada grup dengan hasil operasi biner pada *K*-aljabar merupakan unsur. Sedangkan hasil operasi hiper pada *K*-aljabar hiper merupakan himpunan. *K*-aljabar hiper merupakan generalisasi dari *BCK*-aljabar. Dalam tugas akhir ini akan lebih dibahas mengenai *K*-aljabar hiper.

1.1 Himpunan

Definition 1.1 [1] *Himpunan A disebut himpunan bagian (subset) dari B, jika* $x \in A$ *maka* $x \in B$ *yang ditulis* $A \subseteq B$.

Definition 1.2 [9] *Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari semua elemen-elemen yang termasuk dalam A atau B atau keduanya, yang dinotasikan sebagai* $A \cup B$.

Contoh 1.2

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{5,6,7\}$ maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

1.2 Relasi

Definition 1.3 [6] *Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Hasil kali Kartesius antara himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana* $a \in A$ *dan* $b \in B$. *Secara matematis dituliskan* $A \times B = \{(a, b) | a \in A \; dan \; b \in B\}$.

Contoh 1.3

Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, maka

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4,a), (4,b), (4,c)\}$.

$B \times A = \{(a, 1), \{a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$.

Sehingga didapat $A \times B \neq B \times A$.

Definition 1.4 [5] *Suatu relasi antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian tidak kosong R dari* $A \times B$, *dengan* $(a, b) \in R$ *yang dibaca "a direlasikan ke b" dan dapat dituliskan sebagai aRb.*

Definition 1.5 [5] *Misalkan A suatu himpunan tidak kosong dan R suatu relasi pada himpunan A. Relasi R merupakan suatu relasi terurut parsial jika untuk setiap* $a, b, c \in A$ *berlaku*

1) *R bersifat refleksif, yaitu jika* $a \in A$ *maka aRa.*
2) *R bersifat antisimetris, yaitu jika aRb dan bRa maka* $a = b$*.*
3) *R bersifat transitif, yaitu jika aRb dan bRc maka aRc.*

Definition 1.6 [6] *Misalkan A dan B himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah himpunan bagian* $A \times B$ *dimana untuk setiap* $a \in A$ *terdapat tepat satu unsur* $b \in B$ *sedemikian sehingga* $(a, b) \in f$*. Jika f adalah pemetaan dari A ke B, dan* $(a, b) \in f$ *maka dapat dituliskan* $b = f(a)$ *dan b adalah bayangan dari a atau peta dari a.*

1.3 *BCK*-Aljabar

Definition 1.7 [3] *Misalkan X himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner* $\circ$ *dan 0 sebagai elemen khusus. Tripel terurut* $(X, \circ, 0)$ *disebut BCK-aljabar jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini.*

1. *(BCK1)* $((x \circ y) \circ (x \circ z)) \circ (z \circ y) = 0,$
2. *(BCK2)* $(x \circ (x \circ y)) \circ y = 0,$
3. *(BCK3)* $x \circ x = 0,$
4. *(BCK4)* *jika* $x \circ y = 0$ *dan* $y \circ x = 0$ *maka* $x = y,$
5. *(BCK5)* $0 \circ x = 0.$

Tabel 1.2 PenDefinitionan operasi biner "∘" pada *X*

∘	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	2	2	0

Definition 1.8 [3] *Misalkan* $(X, \circ, 0)$ *suatu BCK-aljabar. DiDefinitionkan relasi "*$\leq$*" yaitu* $x \leq y$ *asalkan* $x \circ y = 0$*, untuk setiap* $x, y \in X$*.*

Definition 1.7' [3] *Misalkan X suatu himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner "$\circ$" dan 0 sebagai elemen khusus. Tripel terurut $(X, \circ, 0)$ disebut BCK-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

(BCK1') $(x \circ y) \circ (x \circ z) \leq z \circ y$,

(BCK2') $x \circ (x \circ y) \leq y$,

(BCK3') $x \leq x$,

(BCK4') $x \leq y$ *dan* $y \leq x$ *maka* $x = y$,

(BCK5') $0 \leq x$.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 *K*-Aljabar Hiper

Definition 2.1 [12] *K-aljabar hiper merupakan struktur aljabar hiper, dimana tripel terurut $(H, *, 0)$ merupakan himpunan tidak kosong H dengan operasi hiper "$*$". Operasi hiper "$*$" pada H merupakan sebuah pemetaan dari $H \times H$ ke $P^*(H)$ dimana $P^*(H) = P(H)\backslash\{\emptyset\}$.*

Definition 2.2 [12] *Misalkan H merupakan himpunan tidak kosong dan "$*$" operasi hiper pada H. Tripel terurut $(H, *, 0)$ disebut K-aljabar hiper dan 0 adalah elemen khusus dari H jika untuk setiap $x, y, z \in H$ memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

(H1) $(x * z) * (y * z) < x * y$,

(H2) $(x * y) * z = (x * z) * y$,

(H3) $x < x$,

(H4) $x < y$ *dan* $y < x$ *maka* $x = y$,

(H5) $0 < x$.

Untuk setiap $x, y, z \in H$.

Pada Definition 2.2, relasi "<" yang diDefinitionkan pada H diberikan oleh $x < y$ diDefinitionkan sebagai $0 \in x * y$.

Selanjutnya, untuk setiap dua himpunan tidak kosong A dan B ke H, jika $A, B \subseteq H$, artinya notasi $A < B$ diDefinitionkan untuk setiap $a \in A$ terdapat $b \in B$

sedemikian sehingga $a < b$ dan notasi $A * B$ adalah himpunan bagian dari H yang dinotasikan

$$A * B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a * b$$

Tabel 2.1 PenDefinitionan operasi hiper "$*$" pada H

$*$	0	1	2	3
0	{0}	{0}	{0}	{0}
1	{1}	{0,1,2}	{0,1,2}	{0,1,2}
2	{2}	{2}	{0}	{2}
3	{2,3}	{1,2}	{0,2,3}	{0,1,2}

Teorema 2.3 [12] *Misalkan* $(H, *, 0)$ *suatu K-aljabar hiper. Untuk setiap* $x, y, z \in H$ *berlaku*

(a) $x * y < z \Leftrightarrow x * z < y$,

(b) $(x * z) * (x * y) < y * z$,

(c) $x * (x * y) < y$,

(d) $x * y < x$,

(e) $A \subseteq B \Longrightarrow A < B$,

(f) $x \in x * 0$,

(g) $(A * C) * (A * B) < B * C$,

(h) $(A * C) * (B * C) < A * B$,

(i) $A * B < C \Leftrightarrow A * C < B$.

Bukti.

Misalkan tripel terurut $(H, *, 0)$ merupakan suatu K-aljabar hiper, diambil sebarang $x, y, z \in H$, maka

(a) ($\Longrightarrow$) Diketahui $x * y < z$. Akan ditunjukkan $x * z < y$.

Misalkan $x, y, z \in H$ sedemikian hingga $x * y < z$, maka terdapat $t \in x * y$ dan $t < z$. Hal ini berarti $0 \in t * z \subseteq (x * y) * z = (x * z) * y$. Dengan demikian terdapat $w \in x * z$ sehingga $0 \in w * y$, yaitu $w < y$ atau $x * z < y$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $x * z < y$. Akan dibuktikan bahwa $x * y < z$.

Misalkan $x, y, z \in H$ sedemikian hingga $x * z < y$, maka terdapat $t \in x * z$ dan

$t < y$. Hal ini berarti $0 \in t * y \subseteq (x * z) * y = (x * y) * z$. Dengan demikian terdapat $w \in x * y$ sehingga $0 \in w * z$, yaitu $w < z$ atau $x * y < z$.

Sehingga terbukti bahwa $x * y < z \Leftrightarrow x * z < y$.

Teorema 2.4 [8] *Jika $(H, *, 0)$ suatu K-aljabar hiper maka untuk setiap $x, y \in H$ dan himpunan bagian tidak kosong A dan B dari H memenuhi hal-hal berikut:*

(a) $A * A < A$,

(b) $0 \in x * (x * 0)$,

(c) $x < x * 0$,

(d) $A < A * 0$,

(e) $A < A * B$, *jika* $0 \in B$.

Bukti.

(a) Akan dibuktikan $A * A < A$.

Diambil sebarang $t \in A * A$, maka terdapat $x, y \in A$ sehingga $t = x * y$.

Karena $x * y < x$ atau $t < x$, maka $A * A < A$. Jadi, terbukti bahwa $A * A < A$.

(b) Akan dibuktikan bahwa $0 \in x * (x * 0)$.

Dari Teorema 3.3 (d), dengan mengambil $y = 0$, maka $x * 0 < x$, maka hal ini memberikan $0 \in x * (x * 0)$.

(c) Akan dibuktikan $x < x * 0$.

Dari Teorema 3.4 (b) dan dengan mengaitkan Definition "<", maka teorema ini terbukti.

(d) Akan ditunjukkan bahwa $A < A * 0$.

Misalkan $x \in A$, maka dari hasil pada pembuktian Teorema 3.4 (c) diperoleh $x < x * 0$, dengan $x * 0 \in A * 0$, maka diperoleh $A < A * 0$. ■

Definition 2.5 [12] *Misalkan H adalah K-aljabar hiper. Elemen $a \in H$ disebut skalar kiri jika $|a * x| = 1$ dan disebut skalar kanan jika $|x * a| = 1$, untuk semua $x \in H$. Jika $a \in H$ merupakan skalar kiri sekaligus skalar kanan maka disebut elemen skalar.*

Contoh 2.1

Dari K-aljabar hiper $(H, *, 0)$ pada Tabel 2.1. Misalkan, diambil $a = 0$ dan $a = 2$ maka $|a * x| = 1 \Longrightarrow |0 * 1| = 1$ dan $|a * x| = 1 \Longrightarrow |2 * 0| = 1$. Sehingga a merupakan skalar kiri.

Definition 2.6 [12] *Setiap K-aljabar hiper H dikatakan memenuhi kondisi transitif jika untuk semua $x, y, z \in H$, $x < y$, $y < z$ maka $x < z$*

Definition 2.7 [12] *Sebuah K-aljabar hiper H disebut K-aljabar hiper implikatif positif, jika memenuhi $(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$ untuk semua $x, y, z \in H$.*

Diberikan definisi dari K-aljabar hiper yang memenuhi kondisi sederhana sebagai berikut.

Definition 2.8 [10] *Misalkan $(H, *, 0)$ suatu K-aljabar hiper. Himpunan H dikatakan sederhana jika untuk setiap dua unsur berlainan, $a, b \in H \setminus \{0\}$ berlaku $a \nless b$ dan $b \nless a$.*

Contoh 2.2

$*$	0	1	2
0	{0}	{0}	{0}
1	{1}	{0,1}	{1}
2	{2}	{2}	{0,2}

Tripel terurut $(H, *, 0)$ merupakan K-aljabar hiper sederhana , karena $1 * 2 = \{1\}$ dan $2 * 1 = \{2\}$, yaitu $1 \nless 2$ dan $2 \nless 1$.

Kemudian diberikan definisi dari K-aljabar hiper yang memenuhi kondisi normal sebagai berikut.

Definition 2.9 [10] *Misalkan $(H, *, 0)$ suatu K-aljabar hiper. Himpunan H dikatakan normal jika untuk setiap dua unsur berlainan, $a, b \in H \setminus \{0\}$ berlaku $a < b$ atau $b < a$.*

Contoh 2.3

$*$	0	1	2
0	{0,1}	{0,1}	{0,1}
1	{1,2}	{0,2}	{0,2}
2	{2}	{1,2}	{0,1,2}

Tripel terurut $(H, *, 0)$ merupakan K-aljabar hiper normal, karena $1 * 2 = \{0,2\}$ sehingga $1 < 2$.

2.2 *K*-aljabar hiper Implikatif

Berkaitan dengan urutan hiper "$*$" yang diDefinitionkan pada K-aljabar hiper dan syarat keimplikatifan, terdapat tiga bentuk khusus dari K-aljabar hiper implikatif ini, yaitu K-aljabar hiper implikatif lemah, K-aljabar hiper implikatif dan K-aljabar hiper implikatif kuat.

Akan diberikan definisi untuk memperjelas tentang K-aljabar hiper implikatif sebagai berikut.

Definition 2.10 [12] *Misalkan H adalah K-aljabar hiper, maka H dikatakan*

(a) Implikatif lemah jika $x < x * (y * x)$ *untuk semua* $x, y \in H$,

(b) Implikatif jika $x \in x * (y * x)$ *untuk semua* $x, y \in H$,

(c) Implikatif kuat jika $x * 0 \subseteq x * (y * x)$ *untuk semua* $x, y \in H$.

Akan diberikan teorema-teorema dari hubungan bentuk-bentuk khusus K-aljabar sebagai berikut.

Teorema 2.11 [12] *Misalkan* $(H, *, 0)$ *suatu K-aljabar hiper, maka berlaku*

(a) Setiap K-aljabar hiper implikatif adalah K-aljabar hiper implikatif lemah,

(b) Setiap K-aljabar hiper implikatif kuat adalah K-aljabar hiper implikatif.

Bukti.

(a) Diketahui H adalah K-aljabar hiper implikatif, yaitu $x \in x * (y * x)$.

Akan ditunjukkan bahwa H adalah K-aljabar hiper implikatif lemah, $x < x * (y * x)$.

$x \in x * (y * x)$

$0 \in x * x \subseteq x * (x * (y * x))$

$0 \in x * (x * (y * x))$

$x < x * (y * x)$.

Jadi, terbukti bahwa setiap K-aljabar hiper implikatif adalah K aljabar hioer implikatif lemah.

(b) Diketahui H adalah K-aljabar hiper implikatif kuat, yaitu $x * 0 \subseteq x * (y * x)$.

Akan ditunjukkan bahwa K-aljabar hiper implikatif.

Dari Teorema 3.3 (f), yaitu $x \in x * 0$, maka diperoleh

$x \in x * 0 \subseteq x * (y * x)$ sehingga $x \in x * (y * x)$.

Jadi, terbukti bahwa setiap *K*-aljabar hiper implikatif kuat adalah *K*-aljabar hiper implikatif.

Teorema 2.12 [12] *Misalkan $(H, *, 0)$ suatu K-aljabar hiper dan 0 merupakan skalar kanan pada H, maka H implikatif jika dan hanya jika H implikatif kuat.*

Teorema 2.13 [12] *Misalkan $(H, *, 0)$ suatu K-aljabar hiper, maka H implikatif lemah jika dan hanya jika $x * 0 < x * (y * x)$ untuk semua $x, y \in H$.*

Teorema 3.21 [12] *Misalkan $(H, *, 0)$ suatu K-aljabar hiper yang memenuhi kondisi sederhana maka H implikatif lemah jika dan hanya jika H implikatif.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan $(H, *, 0)$ adalah *K*-aljabar hiper implikatif lemah, akan diperlihatkan bahwa untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x \in x * (y * x)$. Akan ditinjau dua kasus, yaitu untuk $x = 0$ dan $x \neq 0$.

Untuk $x = 0$, berlaku $0 \in 0 * (y * 0)$, untuk setiap $y \in H$. Sedangkan untuk $x \neq 0$, dipenuhinya sifat sederhana oleh struktur aljabar hiper yang bersangkutan. Andaikan $x \notin x * (y * x)$. Karena H implikatif lemah maka untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x < x * (y * x)$, yaitu terdapat $z \in x * (y * x)$ sehingga $x < z$. Karena $x \neq 0$, maka $z \neq 0$ dan $z \neq x$.

Dengan demikian karena H sederhana maka $x \not< z$ (dan $z \not< x$), bertentangan dengan $x < z$. Jadi harus $x \in x * (y * x)$. Selanjutnya karena setiap $x, y \in H$ berlaku $x \in x * (y * x)$, maka terbukti bahwa H bersifat implikatif.

($\Leftarrow$) Berdasarkan Teorema 2.11 (a).

Jadi, terbukti bahwa H implikatif lemah jika dan hanya jika H implikatif. ■

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. *K*-aljabar hiper implikatif memiliki bentuk-bentuk khusus, yaitu *K*-aljabar hiper implikatif lemah, *K*-aljabar hiper implikatif dan *K*-aljabar hiper implikatif kuat.

2. Dan dari bentuk-bentuk khusus dalam *K*-aljabar hiper tersebut memiliki hubungan diantara ketiganya, yaitu
   (a) Setiap *K*-aljabar hiper implikatif adalah *K*-aljabar hiper implikatif lemah,
   (b) Setiap *K*-aljabar hiper impikatif kuat adalah *K*-aljabar hiper implikatif.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Arifin, Achmad. 2003. *Aljabar*. Bandung : ITB.

[2] Deffyana Prastya Arifani. 2010. *Skripsi Semi-homomorfisma BCK-Aljabar*. Semarang : UNDIP.

[3] Dewi Yunitasari. 2010. *Skripsi BCK-Aljabar Hiper*. Semarang : UNDIP.

[4] Erlich, Gertrude. 1991. *Fundamental Concepts of Abstract Algebra*. PWS Kent Publishing Company. Boston

[5] Fraleigh, John B. 2000. *A First Course in Abstract Algebra*, $6^{th}ed$. Singapore : Addison Wesley Longman.

[6] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. *Element of Modern Algebra*. PWS Kent Publishing Company. Boston

[7] Iswati. 2009. *Skripsi K-Aljabar*. Semarang : UNDIP.

[8] Roudbari, T. and M.M. Zahedi 2008. *Some result on simple hyper K-algebras*. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, Vol.3, pp: 29-48.

[9] Soehakso. 1998. *Pengantar Matematika Modern*. Yogyakarta: UGM.

[10] Suryoto. 2011. *K-Aljabar Hiper*. Jurnal Matematika, Vol.14, No.2, hal:79-84.

[11] Tim Dosen Pengampu Mata Kuliah Aljabar I. 2006. *Buku Ajar Aljabar I*. FMIPA UNDIP. Semarang.

[12] Zahedi, M.M, A.B. Saeid and R.A. Borzooei. 2005. *Implicative K-Algebras*. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol.55, pp: 439-453.