

Penyelesaian Penempatan Kutub Umpan Balik Keluaran dengan Matriks Pseudo Invers

Agung Wicaksono, J2A605006, Jurusan Matematika, FSM UNDIP, Semarang, 2012

Abstrak: Metode matriks pseudo invers merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan masalah penempatan kutub umpan balik keluaran. Tujuan penyelesaian masalah penempatan kutub tersebut adalah untuk menstabilkan sistem lup tertutup. Perilaku sistem lup tertutup terlihat dari respon impuls sistem lup terbuka dengan umpan balik keluaran yang dihasilkan dari matriks pseudo invers.

Kata kunci: Sistem LTI, penempatan kutub.

1. PENDAHULUAN

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dasar memegang peranan yang sangat penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan lain di dunia. Pada paper ini adalah suatu analisis matematika yang di aplikasikan dalam matematika terapan, selanjutnya akan di kembangkan suatu metode dari metode yang telah ada sebelumnya di bidang matematika sistem kontrol modern.

Dalam menurunkan model matematika sistem kontrol modern, akan menemukan persamaan diferensial linier dan nonlinier dengan parameter yang berubah terhadap waktu dan tidak berubah terhadap waktu yang mungkin terlibat cukup rumit karena keanekaragaman masukan dan keluaran. Banyaknya, masukan dan keluaran pada suatu sistem yang kompleks dapat mencapai ratusan.

Untuk menyederhanakan bentuk persamaan matematika, sebaiknya digunakan notasi matriks – vektor. Sebenarnya, untuk teoritis, penyederhanaan notasi yang diperoleh dengan menggunakan operasi matriks – vektor, terutama untuk analisis dan sintesis sistem kontrol modern.

Suatu teknik yang sudah pasti dalam pembahasan ini adalah penempatan kutub. Hal ini disebabkan oleh kenyataan bahwa stabilitas dan dinamika perilaku sistem diatur terutama oleh lokasi kutub sistem lup tertutup. Hasil penting pertama dalam penempatan kutub adalah membuktikan bahwa m – masukan, r – keluaran pada sistem orde- n , $\min(n, m + r - 1)$ kutub lup tertutup dapat ditetapkan oleh umpan balik keluaran yang disediakan beberapa persyaratan. Prosedur untuk menetapkan kutub $\min(n, mr)$ dengan umpan balik keluaran, yang memungkinkan penempatan kutub selesai untuk orde sistem yang lebih tinggi untuk banyaknya masukan

dan keluaran sistem karena $mr > (m + r - 1)$ pada sistem tersebut.

Solusi untuk masalah keluaran penempatan kutub, ketika itu ada, adalah umumnya tidak langka. Hal ini terutama berlaku bila $mr > n$. Dalam kasus ini, kebebasan dalam memilih matriks umpan balik keluaran dapat dimanfaatkan untuk optimalisasi. Biasanya optimasi ini digunakan untuk meminimalkan sensitivitas kutub lup tertutup dari gangguan parameter sistem. Hal ini biasa disebut penempatan kutub yang sulit. Perkiraan penempatan kutub dinilai ketika penempatan kutub yang tepat tidak mungkin karena, misalnya, kelebihan relatif order sistem terhadap jumlah masukan dan keluaran, yakni ketika $n > mr$. Prosedur yang melibatkan penyelesaian persamaan matriks tertentu diberikan untuk menentukan kutub mendekati ke lokasi dengan terlebih dahulu menentukan vektor nilai eigen $(n - r)$.

Solusi matriks pseudo invers merupakan pendekatan diferensial yang digunakan untuk menemukan umpan balik yang diperlukan untuk penyelesaian masalah umpan balik keluaran. Kemungkinan akan adanya solusi pseudo invers dimanfaatkan untuk mencapai tujuan optimasi. Solusi pseudo invers ini mempunyai beberapa keunggulan, antara lain rumus yang sederhana, menggunakan perkiraan jika kesulitan untuk menyelesaikan dengan tepat.

2. PERMASALAHAN

Diberikan sistem persamaan ruang keadaan kontinyu berikut

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx$$

dimana x adalah vektor keadaan $n \times 1$, u adalah vektor masukan $m \times 1$ dan y adalah vektor keluaran $r \times 1$ dengan $n > \max(m, r)$. Persamaan (1) merupakan sistem lup terbuka dan mempunyai persamaan polinomial karakteristik, berikut

$$\begin{aligned} p(s) &= \det(sI - A) \\ &= s^n + p_1s^{n-1} + \dots + p_n \end{aligned} \quad (2)$$

dimana p_0, p_1, \dots, p_n adalah vektor koefisien karakteristik sistem lup terbuka, dengan $p_0 = 1$. Sistem lup terbuka adalah sistem kontrol yang keluarannya tidak diukur atau diumpan balikkan untuk dibandingkan dengan masukan. Menetapkan hukum kontrol umpan balik keluaran

$$u = -Ky + v \quad (3)$$

dimana K adalah matriks umpan balik keluaran $m \times r$ dan v adalah vektor perintah $m \times 1$.

Mensubstitusikan persamaan (3) ke persamaan (1) diperoleh sistem lup tertutup, yaitu :

$$\dot{x} = Ax + B(-Ky + v)$$

$$\dot{x} = Ax - BKy + Bv$$

$$\dot{x} = Ax - BKCx + Bv$$

$$\dot{x} = (A - BKC)x + Bv$$

$$\dot{x} = \tilde{A}x + Bv \quad (4)$$

Sehingga sistem lup tertutup (4) mempunyai persamaan polinomial karakteristik berikut

$$\begin{aligned} q(s) &= \det(sI - A + BKC) \\ &= s^n + q_1s^{n-1} + \dots + q_n \end{aligned} \quad (5)$$

dimana q_0, q_1, \dots, q_n adalah vektor koefisien karakteristik sistem lup tertutup, dengan $q_0 = 1$. Sistem lup tertutup adalah sistem kontrol berumpan balik.

Dari persamaan (5) menunjukkan adanya keterhubungan vektor koefisien karakteristik lup tertutup q_i yang bersesuaian dengan koefisien polinomial karakteristik lup terbuka p_i , yaitu

$$q_i = p_i + L_i + \phi_i(K) \quad (6)$$

dimana

$$\begin{aligned} L_i &= (p_{i-1}CB + p_{i-2}CAB + \dots + CA^{i-1}B)k \quad (7) \\ &\text{dengan } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Mensubstitusikan persamaan (7) ke persamaan (6)), diperoleh

$$\begin{aligned} q_i &= p_i + (p_{i-1}e_0 + p_{i-2}e_1 + \dots + e_{i-1})k \quad (8) \\ &\text{dengan } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

dimana e_i adalah hasil dari matriks $CA^{i-1}B$ yang disusun menjadi matriks baris, sedangkan k adalah matriks K yang ditumpuk menjadi matriks kolom.

Masalah penempatan kutub ini adalah menemukan K matriks berukuran $m \times r$, atau menemukan k vektor berukuran $mr \times 1$ sedemikian rupa sehingga perubahan koefisien dari nilai awal (vektor koefisien karakteristik lup terbuka) $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)^T$ mendekati nilai akhir (vektor koefisien karakteristik yang diinginkan) $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ yang dinotasikan sebagai matriks $q_{des} = \frac{1}{T}(d - p)$, dimana T adalah lamanya perpindahan nilai awal p mendekati nilai akhir d .

Perhatikan sistem pada persamaan (4) dengan persamaan polinomial karakteristik pada persamaan (5) sebagai sistem lup terbuka dan menerapkan matriks umpan balik tambahan δK dimana elemen δK , yaitu $\delta k_1, \delta k_2, \dots, \delta k_{mr}$ "cukup kecil". Penerapan δK ini menyebabkan perubahan kecil dari koefisien $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ kedalam koefisien polinomial karakteristik q_1, q_2, \dots, q_n . Dari persamaan (8), diperoleh

$$\begin{aligned} q_i + \delta q_i &= \\ &= q_i + (q_{i-1}f_0 + q_{i-2}f_1 + \dots + f_{i-1})\delta k \quad (9) \\ &\text{dengan } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

dimana f_i adalah hasil dari matriks $C\hat{A}^iB = C(A - BKC)^{i-1}B$ yang disusun menjadi matriks baris dan δk mengandung fungsi non linier berorde 2 atau lebih menghasilkan elemen pada matrik tambahan. Persamaan (9) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n-1} & q_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \delta k \quad (10)$$

atau

$$\delta q = Q(k)F(k)\delta k \equiv J(k)\delta k \quad (11)$$

δq adalah vektor $n \times 1$, $Q(k)$ dan $F(k)$ adalah matriks $n \times n$ dan $n \times mr$ dan $J(k) \equiv Q(k)F(k)$ adalah matriks Jacobian $n \times mr$, dan karena struktur tertentu rank $Q(K) = n$.

Matriks tambahan δq ini pada persamaan (11) ini dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial jika membagi kedua sisinya dengan δt , diperoleh

$$\dot{q} = J(k)\dot{k} \quad (12)$$

3. SOLUSI

Persamaan (12) merupakan persamaan differensial yang berhubungan antara vektor polinomial karakteristik ke vektor umpan balik. \dot{k} dapat di temukan dengan metode pseudo invers, yaitu

$$\dot{k} = J^*(k) \dot{q}_{des} + \alpha (I_{mr} - J^*(k)J(k))h \quad (13)$$

dimana $J^*(k)$ adalah matriks pseudo invers berukuran $mr \times n$ dari $J(k)$, q_{des} merupakan vektor polinomial karakteristik lup tertutup yang diinginkan, α adalah skalar sebarang, h adalah vektor $mr \times 1$ sebarang dan I_{mr} adalah matriks identitas $mr \times mr$.

Rank matriks Jacobian $J(k)$ menentukan keberadaan dan keakuratan dari solusi persamaan (13). Karena rank $J(k) = \text{rank}(Q(k)F(k)) = \text{rank } F(k)$, dengan $F(k)$ adalah matrik $n \times mr$ yang terbentuk dari $C\hat{A}^{i-1}B$, yaitu $F = (f_0 \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{n-1})^T$. Karena perubahan vektor koefisien karakteristik dari nilai awal ke nilai akhir, maka nilai matriks umpan balik K juga berubah. Akibatnya, rank matriks Jacobian tergantung pada nilai matriks K .

Misalkan $F(k)$ matriks $n \times mr$ akibatnya $J(k)$ memiliki full rank n untuk semua full rank(K). Dalam hal ini generik rank $F(k)$ dan $J(k)$ adalah n dan penulisnya sebagai $\text{grank}(J(k)) = \text{grank}F(k) = n$. Grank adalah struktur tertentu rank sebuah matrks dan dapat ditemukan dengan memasukkan matriks umpan balik secara acak ke sistem, dan menghitung rank $F(k)$ yang dihasilkan. Matriks K ini mungkin membuat $F(k)$ atau $J(k)$ kekurangan rank dan mempunyai solusi $\det(F(k)F^T(k)) = 0$. Jika $\text{grank } F(k) = n$, maka polinomial hanya terbatas pada titik tertentu, maka $F(k)$ menjadi kekurangan rank.

Menerapkan nilai awal matriks umpan balik K_0 secara sebarang ke sistem untuk menghasilkan sistem baru yang kemudian efektif mengubah nilai awal koefisien polinomial vektor p . Sistem baru ini sekarang berbeda kecuali untuk nilai akhir yang merupakan polinomial karakteristik vektor d . Pada akhirnya nilai akhir ini menyebabkan kekurangan rank, itu akan memungkinkan menempatkan kutub secara tepat. Sebaiknya perhatikan untuk skala awal matriks umpan balik K_0 seperti $\|BK_0C\|$ yang mempunyai orde sama seperti $\|A\|$, jadi K_0 tidak melebihi karakteristik sistem atau menyebabkan perubahan yang tidak signifikan. Dalam hal yang istimewa kekurangan rank $J(k)$ disebabkan oleh polinomial karakteristik vektor d , dapat menempatkan satu kutub secara dekat, tetapi belum tepat, pada letak yang diinginkan.

Latihan evaluasi $J(k)$ menggunakan matriks $C(A - BKC)^{i-1}B$, dapat mengakibatkan keadaan yang tidak diinginkan dan karena perhitungan kompleksitas eksponensial matrik $n \times n$ adalah pangkat n . Oleh karena itu, $J(k)$ dihitung menggunakan persamaan (11), yakni elemen – elemen matriks umpan balik berubah secara bertahap, satu per satu, dan mengakibatkan perubahan vektor koefisien polinomial karakteristik lup tertutup q_i . Matriks Jacobian kemudian dihitung dengan menyusun perbandingan dari

perubahan q_i dengan perubahan masing – masing elemen matriks umpan balik.

Menentukan matrik umpan balik k pada persamaan (13) akan mengalami kesulitan seperti menghitung integrasi karena kecilnya ketidakakuratan dapat menyebabkan ketidakstabilan dari solusi. Untuk menghindari masalah ini didefinisikan koefisien error karakteristik $\varepsilon(t)$, yaitu

$$\varepsilon(t) = q_{des}(t) - q(t) \quad (14)$$

dimana $q_{des}(t)$ adalah koefisien karakteristik yang diinginkan dan karakteristik sebenarnya vektor $q(t)$ merupakan koefisien yang di peroleh dari $\det(sI - A + BKC)$. Sekarang akan diterapkan sebuah perhitungan baru umpan balik, yaitu

$$\dot{k} = J^*(\dot{q}_{des} + G\varepsilon) + \alpha (I_{mr} - J^*J)h \quad (15)$$

dimana G adalah perhitungan pasti positif umpan balik matriks $n \times n$ untuk kesederhanaan dapat dipilih dari diagonal matriks dengan elemen – elemen positif. I_{mr} adalah matrik identitas $mr \times mr$. α adalah skalar sebarang. Karena pilihan istimewa \dot{q}_{des} terbatas. Persamaan (15), sebagai sistem pendamping yang dinamis. Untuk kesederhanaan notasi J tergantung k pada (15), yakni $J \equiv J(k)$.

Sebelum mengalikan kedua sisi persamaan (15) dengan J dan mulai

menggunakan persamaan (12), diketahui persamaan berikut dari penjelasan sebelumnya

$$\dot{q} = JJ^*(\dot{q}_{des} + G\varepsilon) + \alpha J(I_{mr} - J^*)h \quad (16)$$

Dibentuk turunan $\dot{\varepsilon} = \dot{q}_{des} - \dot{q}$, substitusi $\dot{\varepsilon}$ ke persamaan (14), diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & -JJ^*G\varepsilon + (I_n - J^*)\dot{q}_{des} \\ & -(\alpha J(I_{mr} - J^*))h \end{aligned} \quad (17)$$

Dianggap $\text{rank}(J) = n$, didapat $JJ^* = I_n$ dan $J(I_{mr} - J^*) = J - JJ^*J = 0$. Selanjutnya, dipilih $G = gI_n$, dimana g adalah konstanta skalar positif, persamaan (17) dapat disederhanakan

$$\dot{\varepsilon} = -g\varepsilon \quad (18)$$

atau

$$\varepsilon(t) = e^{-gt} - \varepsilon_0 \quad (19)$$

dimana $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ adalah vektor error awal. Terlihat dari error menurun monoton (yaitu, error yang stabil asimtotik), dengan demikian vektor koefisien karakteristik yang diinginkan ditemukan pada keadaan tetap. Umpan balik keluaran yang diperlukan adalah nilai $k(t)$ pada keadaan tetap yang diperoleh dengan menyelesaikan sistem pendamping yang dinamis pada persamaan (15) menggunakan Matlab.

Dengan memperhatikan keadaan diatas dan pembahasan sebelumnya

mengenai rank matriks Jacobian untuk mencari solusi, dinyatakan teorema berikut.

Teorema [3.1]. Perhatikan sistem m –masukan, r –keluaran pada orde- n yang diberikan pada persamaan (11) dan hukum umpan balik keluaran statis pada persamaan (12). Kemudian memungkinkan menempatkan kutub – kutub $\min(n, mr)$ secara tepat atau mendekati letak yang diinginkan dengan ketentuan $\text{grank}(J) = n$.

$$\text{grank}(F) = \text{grank}(f_0^T, f_1^T, \dots, f_{n-1}^T) = n \quad (10)$$

Contoh :

Diberikan berikut ini sistem persamaan ruang keadaan yang berorde 5 dengan

banyaknya masukan 3 dan keluaran 2.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & -1.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diketahui untuk masing – masing $g = 10$, $\lambda = 1$, $T = 10$, $n = 5$, $m = 3$ dan $r = 2$. Diinginkan menempatkan kutub pada $d = [10.98 \ 44.86 \ 84.62 \ 73.54 \ 23.8]$

Dengan menggunakan metode matriks pseudo invers diatas tentukan nilai matriks umpan balik keluaran K , kestabilan sistem, menggambarkan respon impulsu untuk mengetahui perilaku sistem lup terbuka dan lup tertutup.

4. KESIMPULAN

Penyelesaian penempatan kutub sistem umpan balik keluaran ini dapat ditemukan dengan menggunakan matriks pseudo invers. Untuk mengetahui kestabilan sistem umpan balik ini dapat dikaji melalui nilai eigen dari sistem lup tertutup, yaitu dengan mengamati nilai eigen sistem. Jika bagian real dari nilai eigen tersebut negatif maka sistem stabil.

Metode matriks pseudo invers merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan matriks umpan balik keluaran pada sebuah sistem terkontrol. Dengan metode ini diperoleh kutub (nilai eigen) sistem lup tertutup mendekati letak kutub (nilai eigen) yang diinginkan.

Dari hasil simulasi diperoleh sistem lup tertutup stabil dimana semua kutub terletak disebelah kiri sumbu s (bagian real dari nilai eigen negatif sesuai yang diinginkan). Nilai eigen yang diinginkan ini dapat diperoleh menggunakan penempatan kutub. Perilaku sistem lup tertutup dapat dilihat dari respon impulsu sistem lup terbuka dengan umpan balik keluaran yang diperoleh dengan metode matriks pseudo invers.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ogata, K., 1990, *Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan)*, jilid 1. Erlangga, Jakarta.
- [2] Ogata, K., 1997, *Modern Control Engineering*, Third Edition. Prentice Hill,
- [3] Tarokh, M., 2008, *A Unified Approach to Exact, Approximate, Optimized And Decentralized Output Feedback Pole Assignment*, International Journal of Control, Automotion, and Systems, vol. 6, no. 6, pp. 939 – 947.
- [4] Tarokh, M., 1989, *An Approach to Pole Assignment by Centralized and Decentralized Output Feedback*, IEE Proceeding, Part D, vol. 136, no. 2, pp. 89 – 97.