Pembentukan d-aljabar Komutatif dan Implikatif dari Sebuah Lapangan

Mujib Nashikha[1], Suryoto, S.Si, M.Si [2], Farikhin, M.Si, Ph.D [3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

A d-algebra is a generalization of BCK-algebra. Therefore, every BCK-algebra is a d-algebra. Every d-algebra that satisfy commutative axiom called commutative d-algebra, meanwhile d-algebra satisfy an implicative axiom called implicative d-algebra. Some of d-algebra can be constructed by a group first and then to definite some binary operations. Moreover, it can be constructed by taking the non empty set and satisfy d-algebra axioms. By taking a field as an initial condition of the construction of a d-algebra, can be constructed a commutattive or imlicative d-algebra which are not BCK-algebra.

Keyword: d-algebra, BCK-algebra, commutative, implicative.

1. PENDAHULUAN

Sebuah d-aljabar dapat ditinjau dari dua hal, yang pertama yaitu dari grup dan yang kedua dari himpunan tak kosong. Grup $(G,\bullet)$ yang didefinisikan operasi biner baru $"*"$ dimana untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x * y = x \bullet \mathrm{y}^{-1}$ serta memenuhi aksioma tertentu akan membentuk suatu d-aljabar dimana elemen identitas dari G merupakan elemen khusus di dalam d-aljabar. Sehingga elemen khusus di dalam d-aljabar tunggal. Himpunan tak kosong X dengan Θ sebagai elemen khusus dan tunggal kemudian dilengkapi operasi biner $*$ serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu juga akan membentuk struktur aljabar yang disebut d-aljabar.

Disini penulis akan mpembahas mengenai d-aljabar komutatif dan d-aljabar implikatif. Sebuah d-aljabar yang memenuhi aksioma komutatif disebut d-aljabar komutatif. Sebuah d-aljabar yang memenuhi aksioma implikatif disebut d-aljabar implikatif. Dengan mengambil lapangan sebagai syarat pembentukan d-aljabar, dan dindefinisikan operasi biner yang memenuhi aksioma d-aljabar komutatif akan diperoleh d-aljabar komutatif yang bukan BCK-aljabar. Sama halnya ketika mengambil lapangan sebagai syarat pembentukan d-aljabar, dan dindefinisikan operasi biner yang memenuhi aksioma d-aljabar implikatif akan diperoleh d-aljabar implikatif yang bukan BCK-aljabar. Disini juga akan diberikan mengenai beberapa sifat d-aljabar implikatif.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemetaan

Definisi 2.1.1[4]

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Hasil kali Kartesius antara himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$. Secara matematis dituliskan $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$.

Contoh 2.1.1

Diberikan $A = \{1,3\}$ dan $B = \{2,4,6\}$, maka
$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$.
$B \times A = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$.
Sehingga didapat $A \times B \neq B \times A$.

2.2 Teori Grup

Definisi 2.2.1[4]

Operasi biner pada himpunan tidak kosong A adalah pemetaan dari $A \times A$ ke A.

Definisi 2.2.2[7]

Himpunan tidak kosong G dengan suatu operasi biner $*$ disebut grup asalkan memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

a) Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu
$(\forall x, y, z \in G)(x * y) * z = x * (y * z)$.

b) Himpunan G mempunyai elemen identitas e, artinya
$(\exists e \in G)(\forall x \in G) x * e = x = e * x$.

c) Setiap elemen di G mempunyai invers di G juga, yaitu
$(\forall x \in G)\ (\exists x^{-1} \in G)\ x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$.

Definisi 2.2.3[7]

Suatu grup $(G,*)$ disebut grup komutatif asalkan untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x * y = y * x$.

2.3 Teori Ring

Definisi 2.3.1.[6]

Himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner penjumlahan " $+$ " dan perkalian " $\cdot$ " disebut ring jika

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif
2. Perkalian bersifat asosiatif , yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ memenuhi $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$ memenuhi hukum distributif kiri, yaitu
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   dan hukum distributif kanan, yaitu
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Definisi 2.3.2.[6]

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$

1. Jika perkalian didalam R bersifat komutatif , maka R disebut ring komutatif
2. Jika R memiliki identitas perkalian 1, yaitu $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ untuk setiap $x \in R$, maka R disebut ring dengan elemen satuan (unity). Elemen identitas pergandaan tersebut disebut elemen satuan (unity).
3. Jika $a \in R$ mempunyai invers perkalian, a disebut unit
4. Jika setiap elemen tak nol didalam R merupakan unit, R disebut ring pembagi
5. Lapangan adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan setiap elemen tak nol mempunyai invers perkalian

2.4 *BCK*-Aljabar

BCK-aljabar merupakan salah satu dari kelas K-aljabar bila grup $(X,\bullet)$ yang membangun K-aljabar adalah komutatif. Jika pada X dilengkapi dengan operasi biner " $*$ " yang didefinisikan oleh $x \bullet y = x * (0 * y)$ untuk setiap $x, y \in X$, maka $x * y = x \bullet y^{-1}, \forall x, y \in X$. **[9]**
Berikut ini akan diberikan definisi dari BCK-aljabar

Definisi 2.3.1.[8]

Misalkan X suatu himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner " $*$ " dan Θ sebagai elemen khusus. Tripel terurut $(X,*,\Theta)$ disebut BCK-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \epsilon X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut ini.

(I) $\quad x * x = \Theta,$

(II) $\quad \Theta * x = \Theta,$

(III) $\quad$ jika $x * y = \Theta$ dan $y * x = \Theta$ maka $x = y,$

(IV) $\quad \big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = \Theta,$

(V) $\quad \big(x * (x * y)\big) * y = \Theta.$

3 PEMBAHASAN

Definisi 3.1.1

Misalkan X adalah sebuah himpunan tak kosong dengan operasi biner " $*$ " dan Θ sebagai elemen khusus dari X. Tripel terurut $(X,*,\Theta)$ disebut d-aljabar jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

(I) $\quad x * x = \Theta,$

(II) $\quad \Theta * x = \Theta,$

jika $x * y = \Theta$ dan $y * x = \Theta$ maka $x = y$ untuk semua $x, y \in X$

Contoh 3.1.1

Diberikan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real, dan $(\mathbb{R},*,\Theta)$ merupakan d-aljabar dengan Θ sebagai elemen khusus dari bilangan real, dan Θ fix elemen bilangan Real, serta operasi biner " $*$ " untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$x * y = (x - y)(x - \Theta) + \Theta$$

Contoh 3.1.2

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan Θ merupakan elemen khusus dari X. Jika didefinisikan operasi biner " $*$ " untuk setiap $x, y \in X$ dengan

$$x * y = \begin{cases} \Theta, & jika\ x = y \\ x, & jika\ x \neq y \end{cases}$$

maka $(X,*,\Theta)$ merupakan d-aljabar yang BCK-aljabar

3.2. d-aljabar Komutatif

Pada subbab ini akan diberikan bagaimana langkah-langkah pembentukan sebuah d-aljabar komutatif yang bukan BCK-aljabar. Akan tetapi, sebelum masuk ke materi inti, terlebih dahulu akan diberikan definisi dari d-aljabar komutatif.

Definisi 3.2.1

Misalkan $(X,*,\Theta)$ sebuah d-aljabar, X disebut d-aljabar komutatif jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi aksioma berikut ini:

$$x * (x * y) = y * (y * x)$$

Untuk BCK-aljabar $(X,*,\Theta)$ disebut BCK-aljabar komutatif jika memenuhi aksioma yang analog dengan d-aljabar komutatif

Definisi 3.2.2

Sebuah lapangan $(X,+,\cdot)$ disebut $\sqrt{3}$-eksponensial jika terdapat sebuah fungsi $\varphi: X \to X$ sedemikian hingga:

a) $\varphi\big(\varphi(x)\big) = x^3$

b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
c) Jika $x \neq 0$, maka $\varphi(x) \neq 0$
d) $\varphi(0) = 0$

Untuk semua $x, y \in X$

Contoh 3.2.2

Diambil lapangan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, dan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real, jika definisikan sebuah pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{3}} & jika\, x > 0, \\ 0 & jika\, x = 0 \\ (-y)^{\sqrt{3}} & jika\, x = -y < 0 \end{cases}$$

maka $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ adalah $\sqrt{3}$-eksponensial

Berikut akan diberikan langkah-langkah yang digunakan untuk membentuk sebuah d-aljabar komutatif yang bukan BCK-aljabar:

a) Langkah pertama adalah diambil sebuah lapangan $(X, +, \cdot)$ yang merupakan $\sqrt{3}$-eksponensial
b) Mendefinisikan operasi biner " $\star$ " pada X, yang menghasilkan $x \star (x \star y) = y \star (y \star x)$ untuk setiap $x, y \in X$ agar aksioma d-aljabar komutatif terpenuhi

Mendefinisikan operasi biner " $*$ " pada X yang menjadikan aksioma d-aljabar terpenuhi. Operasi biner " $\star$ " berada didalam " $*$ ", artinya $x * y = x \star y$ dengan syarat tertentu

Contoh 3.2.3

a) Sesuai langkah di atas, langkah pertama adalah diambil sebuah lapangan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ yang merupakan $\sqrt{3}$-eksponensial. Diambil **Contoh 3.2.2** sebagai $\sqrt{3}$-eksponensial yang akan dijadikan d-aljabar.
b) Langkah kedua didefinisian operasi biner " $\star$ " pada $\mathbb{R}$, yang menghasilkan $x \star (x \star y) = y \star (y \star x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ agar aksioma d-aljabar komutatif terpenuhi

Diambil $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ adalah sebuah $\sqrt{3}$-eksponensial. Jika didefinisikan sebuah operasi biner baru $\star$ dalam $\mathbb{R}$ dimana $x \star y = x^2\varphi(y)y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, maka $x \star (x \star y) = y \star (y \star x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.
Akan diperlihatkan bahwa $x \star (x \star y) = y \star (y \star x)$
Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ adalah sebuah $\sqrt{3}$-eksponensial dan $x \star y = x^2\varphi(y)y$, maka:

$$\begin{aligned} x \star (x \star y) &= x^2\varphi(x \star y)(x \star y) \\ &= x^2\varphi(x^2\varphi(y)y)x^2\varphi(y)y \\ &= x^2\varphi(x^2)\varphi(\varphi(y))\varphi(y)x^2\varphi(y)y \\ &= x^2\varphi(x^2)y^3\varphi(y)x^2\varphi(y)y \\ &= x^4y^4\varphi(x)^2\varphi(y)^2 \\ y \star (y \star x) &= y^2\varphi(y \star x)(y \star x) \\ &= y^2\varphi(y^2\varphi(x)x)y^2\varphi(x)x \\ &= y^2\varphi(y^2)\varphi(\varphi(x))\varphi(x)y^2\varphi(x)x \\ &= y^2\varphi(y^2)x^3\varphi(x)y^2\varphi(x)x \\ &= y^4x^4\varphi(y)^2\varphi(x)^2 \end{aligned}$$

Menggunakan $\sqrt{3}$-eksponensial pada **Contoh 3.2.2** dan operasi biner " $\star$ " tersebut, akan dibentuk sebuah d-aljabar komutatif yang bukan BCK-aljabar.

c) Pendefinisan operasi biner " $*$ " pada $\mathbb{R}$ yang menjadikan aksioma d-aljabar terpenuhi

Diberikan $(\mathbb{R},+,\cdot)$ adalah sebuah $\sqrt{3}$-eksponensial dan $x \star y = x^2\varphi(y)y$ untuk setiap $x, y \in X$. Jika didefinisakan sebuah operasi biner " $*$ " dalam $\mathbb{R}$ dengan

$$x * y = \begin{cases} 0 & jika\ x = 0\ atau\ x = y \\ x & jika\ y = 0 \\ x \star y & yang\ lain \end{cases}$$

Dan 0 sebagai elemen khusus dari $\mathbb{R}$, maka $(\mathbb{R},*,0)$ adalah sebuah d-aljabar komutatif yang bukan BCK-aljabar

sebab aksioma BCK-aljabar yang kelima yaitu $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$ tidak terpenuhi, dengan mengambil $x = 2$ dan $y = 1$, maka diperoleh $\big(2 * (2 * 1)\big) * 1 = 2^{8+4\sqrt{3}} \neq 0$

Dengan langkah-langkah pembentukan d-aljabar komutatif tersebut dapat diperoleh sebuah d-aljabar yang bukan BCK-aljabar. Perlu diketahui juga bahwa untuk pegambilan lapangan $\sqrt{3}$-eksponensial juga bisa diganti dengan $\sqrt{n}$-eksponensial dengan $n \in \mathbb{Z}^+$dan n bukan bilangan kuadratik. Dan pendefinisian operasi biner " $\star$ " juga harus dirubah menyesuaikan $\sqrt{n}$-eksponensial agar menghasilkan aksioma komutatif d-aljabar terhadap operasi tersebut.

3.3. d-aljabar Implikatif

Pada subbab ini akan dibahas bagaimana cara pembentukan d-aljabar menjadi bukan BCK-aljabar menggunakan d-aljabar implikatif. Sebelumnya akan diberikan definisi d-aljabar implikatif

Definisi 3.3.1

Sebuah d-aljabar $(X,*,\Theta)$ disebut d-aljabar implikatif jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi aksioma berikut ini:

$$x = x * (y * x)$$

Untuk BCK-aljabar $(X,*,\Theta)$ disebut BCK-aljabar implikatif jika memenuhi aksioma yang analog dengan d-aljabar implikatif

Teorema 3.3.1

Jika $(X,*,\Theta)$ adalah sebuah d-aljabar implikatif, maka $x * \Theta = x$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti

Diambil X sebuah d-aljabar implikatif, maka berlaku $x = x * (y * x)$ untuk setiap $x, y \in X$. Jika diambil $y = x$, maka $x = x * (x * x) = x * \Theta$ $(x * x = \Theta$ mernurut aksioma pertama d-aljabar)

Definisi 3.3.2

Sebuah d-aljabar implikatif $(X,*,\Theta)$ disebut d-aljabar positif implikatif jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi aksioma berikut ini:

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$$

Untuk BCK-aljabar implikatif$(X,*,\Theta)$ disebut BCK-aljabar positif implikatif jika memenuhi aksioma yang analog dengan d-aljabar positif implikatif

Teorema 3.3.2

Misalkan X sebuah lapangan dan $x, y \in X$. Jika didefinisikan $x * y = x(x - y)f(x, y)$, dimana $f: X \times X \to X$ adalah sebuah fungsi dengan $f(x, y) \neq 0$ untuk setiap $x, y \in X$ dan 0 merupakan elemen khusus dari X, maka $(X,*,0)$ adalah d-aljabar

Lemma 3.3.1

Untuk setiap $(X,*,0)$ d-aljabar f-fungsi implikatif jika $x \neq 0$ maka $x-(y*x) \neq 0$ untuk $x, y \in X$

Teorema 3.3.3

Misalkan $(X,*,0)$ adalah sebuah d-aljabar f-fungsi, maka $(X,*,0)$ adalah implikatif jika dan hanya jika f memenuhi kondisi berikut:

$$f(x, y*x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-(y*x)}, jika\ x \neq 0 \\ a, \qquad yang\ lain \end{cases}$$

Dimana a adalah sebarang elemen dari X

Teorema 3.3.4

Setiap d-aljabar f-fungsi positif implikatif merupakan BCK-aljabar

Bukti

Diandaikan $(X,*,0)$ bukan BCK-aljabar dan $(X,*,0)$ sebuah d-aljabar f-fungsi positif implikatif dengan 0 sebagai elemen khusus dari X, maka untuk sebarang $x, y, z \in X$ berlaku

$$(x*y)*z = (x*z)*(y*z)$$

Jika diambil $z = x$, maka $(x*y)*x = (x*x)*(y*x) = 0*(y*x) = 0$

Dengan kata lain $(x*y)*x = 0$,

Karena $(X,*,0)$ adalah d-aljabar f-fungsi diperoleh

$0 = (x*y)*x = (x*y)\big((x*y)-x\big)f(x*y, x)$

Salah satu syarat d-aljabar f-fungsi adalah $f(x,y) \neq 0, \forall x, y \in X$, sehingga diperoleh

$0 = (x*y)\big((x*y)-x\big)$

Oleh karena itu, diperoleh $x*y = 0$ atau $x*y = x$, atau dengan kata lain $x*y \in \{0, x\}, \forall x, y \in X$.

Diandaikan $x \neq 0, x \neq y$ dan $x*y = 0$ untuk $x, y \in X$, maka

$0 = x*y = x(x-y)f(x,y) \neq 0$, bertentangan

Karena itu diperoleh $x*y = 0$ jika $x = y$ dan $x*y = x$ jika $x \neq y$ atau dapat dituliskan

$$x*y = \begin{cases} 0, & jika\ x = y \\ x, & jika\ x \neq y \end{cases}$$

dengan kata lain $(X,*,0)$ adalah BCK-aljabar menurut **Contoh 3.1.2**, sebuah kontradiksi

Karena pengandaian salah artinya terbukti bahwa setiap d-aljabar f-fungsi positif implikatif merupakan BCK-aljabar ■

Teorema 3.3.5

Sebuah BCK-aljabar implikatif X adalah positif implikatif jika dan hanya jika $(x*y)*y = x*y$ untuk setiap $x, y \in X$

Teorema 3.3.6

Jika d-aljabar f-fungsi $(X,*,0)$ adalah implikatif maka $(x*y)*y = x*y$ untuk setiap $x, y \in X$.

Dengan memperhatikan **Teorema 3.3.4** dengan **Teorema 3.3.5** dapat dinyatakan bahwa untuk setiap d-aljabar f-fungsi positif implikatif maka berlaku $(x*y)*y = x*y$ untuk setiap $x, y \in X$. Ternyata dengan melihat **Teorema 3.3.6** sebenarnya cukup dengan f-fungsi implikatif saja sudah diperoleh $(x*y)*y = x*y$ untuk setiap $x, y \in X$. Hal terpenting disini ditunjukan pada **Teorema 3.3.4** yaitu dalam pembentukan sebuah d-aljabar f-fungsi implikatif agar tidak menjadi BCK-aljabar dengan membuat d-aljabar f-fungsi implikatif tersebut jangan sampai menjadi positif implikatif.

Berikut ini akan diberikan bagaimana langkah-langkah dalam pembentukan sebuah d-aljabar yang bukan BCK-aljabar menggunakan d-aljabar implikatif:

a) Langkah pertama dengan mengambil sebuah lapangan $(R, +, \cdot)$
b) Langkah kedua dengan mendefinisikan pemetaan f yang akan disubstitusikan ke dalam operasi d-aljabar f-fungsi yaitu $x * y = x(x-y)f(x,y)$
c) Langkah ketiga yaitu dengan pendefinisian operasi biner baru dengan pemetaan f sehingga lapangan $(R, +, \cdot)$ menjadi d-aljabar implikatif yang bukan BCK-aljabar

Selanjutnya akan diberikan contoh pembentukan d-aljabar implikatif menggunakan pemetaan f

Contoh 3.3.3

Diambil $x, y, a, b \in X$, dan X merupakan sebuah lapangan. Jika didefinisikan sebuah pemetaan $f: X \times X \to X$ sebagai berikut:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-y} \; jika \; x(x-y) \neq 0 \\ a \; jika \; x = y \\ b \; jika \; x = 0 \end{cases}$$

Dan didefinisikan d-aljabar f-fungsi $(X, *, 0)$ dengan

$$x * y = \begin{cases} x \; jika \; x \neq y \\ 0 \; jika \; x = y \end{cases}$$

Berdasarkan **Contoh 3.1.2** $(X, *, 0)$ merupakan BCK-aljabar.

Teorema 3.3.7

Diketahui X merupakan lapangan. Didefinisikan sebuah pemetaan f sebagai berikut:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x(y-x)} & jika \; y(y-x) \neq 0 \\ a & untuk \; yang \; lain \end{cases}$$

Untuk setiap elemen x, y, a di X, dan 0 merupakan elemen khusus dari X

$$x * y = \begin{cases} -y & jika \; y(y-x) \neq 0 \\ 0 & jika \; x = 0 \; atau \; x = y \\ x & jika \; y = 0 \end{cases}$$

Maka $(X, *, 0)$ merupakan d-aljabar implikatif yang bukan BCK-aljabar

Karena dengan mengambil $x = 3, y = 4$ dan $z = 2$ diperoleh $\big((3 * 4) * (3 * 2)\big) * (2 * 4) = (-4 * -2) * -4 = 2 * -4 = 4 \neq 0$, sehingga salah satu aksioma BCK-aljabar yaitu $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$ tidak terpenuhi

Contoh 3.3.4

Jika diaplikasikan teorema di atas untuk lapangan $\mathbb{Z}_5$ atau dapat ditulis $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ dengan 0 merupakan elemen khusus dari $\mathbb{Z}_5$ dan operasi binernya

$$x * y = \begin{cases} -y & jika \; y(y-x) \neq 0 \\ 0 & jika \; x = 0 \; atau \; x = y \\ x & jika \; y = 0 \end{cases}$$

diperoleh tabel hasil operasi biner sebagai berikut:

Tabel 3.1 Pendefinisian perasi $*$ pada $\mathbb{Z}_5$

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	3	2	1
2	2	4	0	2	1
3	3	4	3	0	1
4	4	4	3	2	0

Struktur alajabar dari $(\mathbb{Z}_5, *, 0)$ adalah d-aljabar implikatif yang bukan BCK-aljabar
Karena dengan mengambil $x = 3, y = 4$ dan $z = 2$ diperoleh $\big((3 * 4) * (3 * 2)\big) * (2 * 4) = 4 \neq 0$, sehingga salah satu aksioma BCK-aljabar yaitu $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$ tidak terpenuhi
Aksioma d-aljabar positif implikatif $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ juga tidak terpenuhi karena $(3 * 4) * 5 \neq (3 * 5) * (4 * 5)$, sehingga d-aljabar tersebut bukan d-aljabar positif implikatif

4 KESIMPULAN

Suatu d-aljabar mempunyai hubungan dengan BCK-aljabar, yaitu setiap BCK-aljabar merupakan d-aljabar tetapi tidak berlaku untuk sebaliknya, hal ini dikarenakan d-aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar. Dengan menambahkan dua buah aksioma tertentu sebuah d-aljabar akan menjadi BCK-aljabar.
Dari bab sebelumnya juga dapat disimpulkan bahwa dengan mengambil sebuah lapangan, bisa dibentuk sebuah d-aljabar. Dengan mendefinisikan operasi biner baru yang memenuhi aksioma komutatif dapat dibentuk d-aljabar komutatif yang bukan BCK-aljabar. Sama halnya dengan mendefinisikan operasi biner baru yang memenuhi aksioma implikatif dapat dibentuk d-aljabar implikatif yang bukan BCK-aljabar

5 DAFTAR PUSTAKA

[1] Ahn, Sun Shin and Young Hee Kim. 2009. Some constructions of implicative/commutative d-algebras. Bull. Korean Math, Vol. 46, No. 1, hal:147–153
[2] D. Comer, Stephen. 1980. The Representation of Implicative BCK-aljabar. Math Japonica, No , hal 111-115
[3] Erlich, Gertrude. 1991. Fundamental Concepts Of Abstract Algebra. PWS-Kent Publishing Company. Boston
[4] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. Element Of Modern Algebra. PWS-Kent Publishing Company. Boston
[5] Neggers, J. and Hee Sik Kim. 1999. On d-algebras. Math. Slovaca, vol.49, no.1, hal:19-26.
[6] Sumanto, YD dan Suryoto. 2006. Buku Ajar Aljabar II. FMIPA UNDIP. Semarang.
[7] Suryoto, Titi Udjiani, Bambang Irawanto dan Harjito. 2006. Buku Ajar Aljabar I. FMIPA UNDIP. Semarang.
[8] Widiawati, Farida. 2012 Skripsi d-aljabar. UNDIP. Semarang
[9] Yunitasari, Dewi. 2010 Skripsi BCK-aljabar Hiper. UNDIP. Semarang.