

# APLIKASI TRANSFORMASI LAPLACE DALAM PEMODELAN MATEMATIKA SIKLUS KARBON DI ATMOSFER DAN VEGETASI

Kholis Zumrotun Ni'mah<sup>1</sup>, Kartono<sup>2</sup>, Solichin Zaki<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

[oliz\\_nikmah14@yahoo.com](mailto:oliz_nikmah14@yahoo.com)

[kartonoundip@gmail.com](mailto:kartonoundip@gmail.com)

**ABSTRACT.** An increase the temperature of the earth is a form of global warming due to carbon emissions into the atmosphere more than carbon emissions sequestration by plants. The process of binding and extrication of carbon is called carbon cycle. This cycle is a cycle which formed by two-way input and output of carbon. Changes in a amount of carbon by the time is depicted in ordinary differential equations are solved by Laplace transform. Inverse of Laplace equation form from this model are exponential equations which describe the amount of carbon in atmosphere and vegetation. The results of the analysis model and simulation data showed that the number of initial vegetation carbon is directly proportional to the amount of carbon in the atmosphere.

**Keywords:** Carbon Cycle, Laplace transform, Exponential Model

## I. PENDAHULUAN

Akhir-akhir ini suhu rata-rata permukaan bumi semakin hari semakin mengalami peningkatan. Kenaikan suhu udara ini sering dikaitkan dengan adanya pemanasan global akibat efek rumah kaca, yang merupakan peristiwa naiknya intensitas efek rumah kaca (ERK) karena adanya gas dalam atmosfer yang menyerap sinar panas, yaitu sinar inframerah yang dipancarkan oleh bumi. Gas tersebut disebut gas rumah kaca (GRK). Dengan penyerapan itu sinar panas terperangkap sehingga naiknya suhu permukaan bumi [9].

Salah satu jenis gas rumah kaca utama yang berperan dalam efek rumah kaca adalah karbon dioksida ( $\text{CO}_2$ ). Karbon dioksida diserap dan dilepaskan kembali ke atmosfer dengan berbagai cara. Salah satu proses penyerapan karbon di daratan dilakukan oleh tanaman. Melalui tanaman, karbon dioksida diserap dan digunakan dalam proses fotosintesis. Dalam proses tersebut dihasilkan bahan organik, yang apabila dioksidasi akan menghasilkan kembali karbon dioksida. Penyerapan karbon dioksida akan lebih banyak pada tanaman yang masih dalam

masa pertumbuhan. Akan tetapi lahan untuk tanaman semakin berkurang seiring dengan bertambahnya penggunaan lahan untuk berbagai aktivitas manusia. Hal ini tentu saja akan mengakibatkan berkurangnya penyerapan karbon oleh tanaman. Selain menghasilkan bahan organik, dalam fotosintesis juga dihasilkan oksigen yang dilepaskan ke udara. Oksigen ini kemudian digunakan oleh manusia dan hewan untuk melakukan respirasi dan menghasilkan karbon dioksida yang dilepaskan kembali ke atmosfer.

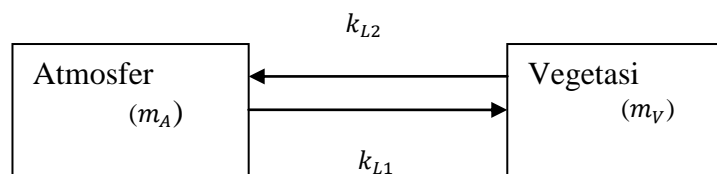
Proses pertukaran karbon antara atmosfer dan daratan serta atmosfer dengan laut tersebut dapat digambarkan dengan model matematika. Dalam tugas akhir ini, akan dibahas tentang model pertukaran karbon yang dihasilkan atmosfer dan vegetasi. Perubahan jumlah karbon terhadap waktu digambarkan dalam persamaan diferensial biasa yang diselesaikan menggunakan transformasi Laplace. Terdapat berbagai cara penyelesaian persamaan diferensial, akan tetapi karena pada permasalahan ini akan diprediksikan perubahan jumlah karbon untuk jangka waktu yang lama atau sampai tak terhingga maka digunakan transformasi Laplace untuk mencari solusi dari persamaan diferensialnya.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 2.1 Konstruksi Model Matematika Perubahan Jumlah Karbon Di Atmosfer Dan Vegetasi

Pertukaran karbon antara atmosfer dan daratan yaitu pada vegetasi merupakan aliran dua arah, terjadi proses penyerapan serta pelepasan karbon antara dua tempat penyimpanan karbon tersebut.

Siklus karbon yang terjadi antara atmosfer dan vegetasi dapat disajikan dalam Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1. Diagram pertukaran karbon antara atmosfer dan vegetasi

$m_A$  merupakan jumlah karbon di atmosfer,  $m_V$  jumlah karbon di vegetasi, dan koefien  $k$  merupakan koefisien pertukaran karbon dengan  $k_{L1}$  adalah koefisien pelepasan karbon oleh atmosfer yang kemudian diserap oleh vegetasi atau koefisien penyerapan karbon oleh vegetasi dari atmosfer dan  $k_{L2}$  adalah koefisien pelepasan karbon dari vegetasi yang diserap kembali oleh atmosfer atau koefisien penyerapan karbon oleh atmosfer dari vegetasi.

Laju perubahan jumlah karbon di atmosfer terhadap waktu dinyatakan dengan

$$\frac{dm_A(t)}{dt} = k_{L2}m_V(t) - k_{L1}m_A(t) \quad (2.1)$$

sedangkan laju perubahan jumlah karbon di vegetasi terhadap waktu dinyatakan dengan

$$\frac{dm_V(t)}{dt} = k_{L1}m_A(t) - k_{L2}m_V(t) \quad (2.2)$$

## 2.2 Bentuk Transformasi Laplace Dari Siklus Karbon

Kedua persamaan diferensial pada persamaan (2.1) dan (2.2) akan diselesaikan dengan metode transformasi Laplace dengan mengasumsikan bahwa semua syarat awal bernilai nol, yang berarti saat  $t = 0$ , jumlah karbon mula-mula di atmosfer dan vegetasi adalah nol. Bentuk transformasi Laplace dari persamaan (2.1) adalah :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dm_A(t)}{dt}\right] &= \mathcal{L}[k_{L2}m_V(t) - k_{L1}m_A(t)] \\ s \mathcal{L}[m_A(t)] - m_A(0) &= k_{L2}\mathcal{L}[m_V(t)] - k_{L1} \mathcal{L}[m_A(t)] \end{aligned}$$

dengan mengasumsikan bahwa syarat awal adalah nol, yaitu ketika  $t = 0$  maka  $m_A(0) = 0$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} s m_A(s) - 0 &= k_{L2}m_V(s) - k_{L1} m_A(s) \\ m_A(s) &= \frac{1}{(s + k_{L1})} k_{L2}m_V(s) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bentuk transformasi Laplace dari persamaan (2.2) adalah :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dm_V(t)}{dt}\right] &= \mathcal{L}[k_{L1}m_A(t) - k_{L2}m_V(t)] \\ s \mathcal{L}[m_V(t)] - m_V(0) &= k_{L1}\mathcal{L}[m_A(t)] - k_{L2}\mathcal{L}[m_V(t)] \end{aligned}$$

dengan mengasumsikan bahwa syarat awal adalah nol, yaitu ketika  $t = 0$  maka  $m_V(0) = 0$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} s m_V(s) - 0 &= k_{L1} m_A(s) - k_{L2} m_V(s) \\ m_V(s) &= \frac{1}{s + k_{L2}} k_{L1} m_A(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan  $m_A(s)$  transformasi Laplace dari  $m_A(t)$ , dan  $m_V(s)$  transformasi Laplace dari  $m_V(t)$ .

### 2.3 Transformasi Laplace Invers

Transformasi Laplace invers dari persamaan (2.3) dan (2.4) adalah solusi dari persamaan diferensial pada persamaan (2.1) dan (2.2) yang merupakan persamaan jumlah karbon di atmosfer dan vegetasi. Bentuk tranformasi Laplace invers dari persamaan (2.3) adalah

$$\begin{aligned} \frac{m_A(s)}{m_V(s)} &= \frac{k_{L2}}{(s + k_{L1})} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{m_A(s)}{m_V(s)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_{L2}}{(s + k_{L1})} \right] \\ m_A(t) &= k_{L2} m_V(t) e^{-k_{L1}t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

dan transformasi Laplace invers dari persamaan (2.4) adalah

$$\begin{aligned} \frac{m_V(s)}{m_A(s)} &= \frac{k_{L1}}{s + k_{L2}} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{m_V(s)}{m_A(s)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_{L1}}{s + k_{L2}} \right] \\ m_V(t) &= k_{L1} m_A(t) e^{-k_{L2}t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 2.4 Analisis Model Jumlah Karbon di Atmosfer dan Vegetasi

Persamaan (2.6) merupakan persamaan jumlah karbon di atmosfer pada waktu  $t$  dengan jumlah karbon awal (saat  $t = 0$ ) adalah sebesar  $k_{L2} m_V(t)$  dengan  $k_{L2}$  merupakan koefisien penyerapan karbon dari vegetasi oleh atmosfer. Hal ini berarti bahwa jumlah karbon mula-mula di atmosfer sebanding dengan jumlah karbon yang dilepaskan vegetasi ke atmosfer.

Persamaan (2.8) merupakan persamaan jumlah karbon di vegetasi pada waktu  $t$  dengan jumlah karbon awal (saat  $t = 0$ ) adalah sebesar  $k_{L1} m_A(t)$  dengan

$k_{L1}$  merupakan koefisien penyerapan karbon dari atmosfer oleh vegetasi. Hal ini berarti bahwa jumlah karbon awal di vegetasi sebanding dengan jumlah karbon yang diserap vegetasi dari atmosfer.

Bentuk perbandingan transformasi Laplace antara  $m_A(s)$  dengan  $m_V(s)$  pada penyelesaian transformasi Laplace merupakan perbandingan transformasi Laplace keluaran (fungsi respon) dan transformasi Laplace masukan (fungsi penggerak). Hal ini menunjukkan bahwa antara jumlah karbon di atmosfer dan vegetasi saling berhubungan dan jumlah karbon di keduanya saling mempengaruhi satu sama lain.

Kondisi kesetimbangan yang terjadi antara atmosfer dan vegetasi terjadi saat turunan pertama dari model persamaan karbon di atmosfer dan vegetasi sama dengan nol, yaitu saat

$$\frac{dm_A(t)}{dt} = 0$$

dan

$$\frac{dm_V(t)}{dt} = 0$$

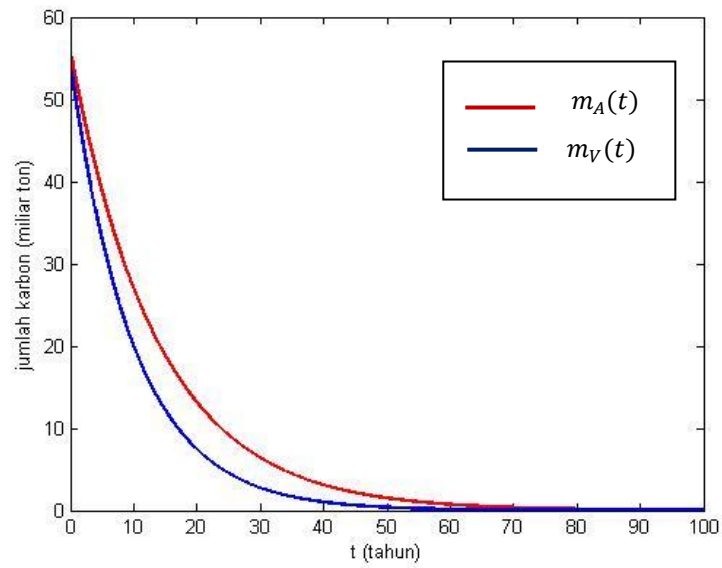
sehingga kondisi kesetimbangan antara atmosfer dan vegetasi diperoleh saat

$$\frac{m_A(t)}{m_V(t)} = \frac{k_{L2}}{k_{L1}} \quad (2.8)$$

. Dengan kata lain, bahwa kesetimbangan jumlah karbon di atmosfer dan vegetasi terjadi ketika jumlah karbon di atmosfernya berbanding lurus terhadap perbandingan koefisien pelepasan karbon dari vegetasi ke atmosfer dan koefisien pelepasan karbon dari atmosfer ke vegetasi dan juga berbanding lurus terhadap jumlah karbon di vegetasi.

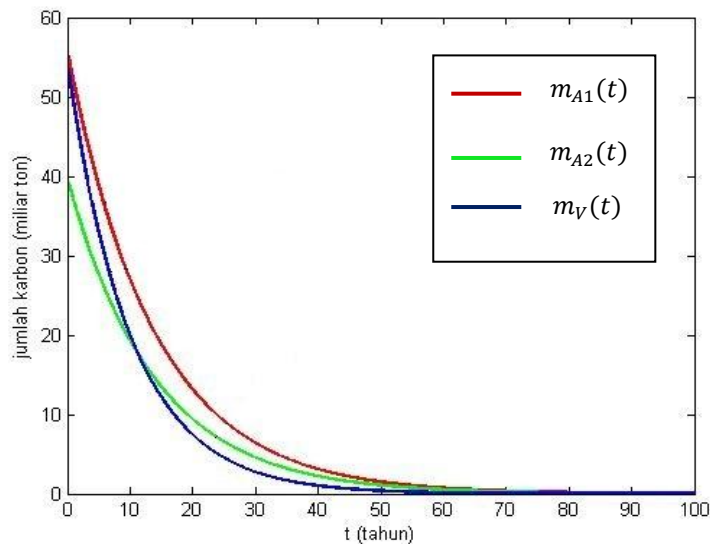
## 2.5 Simulasi Model

Vegetasi atau tumbuhan hidup menyimpan sekitar 560 miliar ton karbon, sedangkan atmosfer menyimpan sekitar 750 miliar ton karbon [11]. Koefisien laju penyerapan karbon oleh vegetasi dari atmosfer  $k_{L1}$  diasumsikan bernilai konstan yaitu sebesar 0.0722, begitu juga dengan koefisien laju penyerapan karbon oleh atmosfer dari vegetasi  $k_{L2}$  diasumsikan bernilai konstan sebesar 0.0994 [8]. Berdasarkan data tersebut, maka diperoleh grafik sebagai berikut :



Gambar 2.2. Grafik : perubahan jumlah karbon di atmosfer dan vegetasi terhadap waktu  $t$

Misalkan jumlah karbon mula-mula di vegetasi berkurang menjadi 400 miliar ton, maka perubahan jumlah karbon di masing-masing atmosfer dan vegetasi dengan jumlah karbon vegetasi mula-mula yang berbeda akan ditunjukkan pada gambar berikut :



Gambar 2.3. Grafik : perubahan jumlah karbon di atmosfer dan vegetasi terhadap waktu  $t$  dengan  $m_V(0)$  yang berbeda

Pada Gambar 2.3 terlihat bahwa terdapat perpotongan antara grafik  $m_{A2}(t)$  dan  $m_V(t)$ , sedangkan antara grafik  $m_{A1}(t)$  dan  $m_V(t)$  tidak terjadi perpotongan sampai akhirnya keduanya sama-sama menuju nol. Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya jumlah pelepasan karbon dari vegetasi yang lebih sedikit, akan terjadi keseimbangan jumlah karbon diantara atmosfer dan vegetasi. Akan tetapi, apabila jumlah pelepasan karbon dari vegetasi semakin besar maka tidak terjadi keseimbangan jumlah karbon diantara keduanya.

Dari ketiga grafik tersebut, dapat diketahui bahwa jumlah karbon vegetasi mula-mula mempengaruhi besarnya perubahan jumlah karbon di atmosfer. Semakin banyak jumlah karbon mula-mula di vegetasi, maka jumlah penyerapan karbon oleh atmosfer dari vegetasi akan semakin besar dan jumlah karbon di atmosferpun akan semakin bertambah sehingga apabila terjadi deforestasi, kemungkinan terjadinya penambahan karbon di atmosfer akibat karbon yang dilepas vegetasi akan semakin banyak jumlahnya. Begitu juga sebaliknya, apabila jumlah karbon mula-mula di vegetasi berkurang maka jumlah penyerapan karbon oleh atmosfer dari vegetasi juga akan berkurang. Selain itu dengan jumlah pelepasan karbon vegetasi ke atmosfer yang lebih sedikit, keseimbangan jumlah karbon akan terjadi yang berarti pelepasan dan pengikatan karbon diantara atmosfer dan vegetasi akan terjadi secara seimbang.

### **III. KESIMPULAN**

Dari hasil pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa jumlah karbon di atmosfer dan vegetasi memiliki ketergantungan, yaitu jumlah karbon di atmosfer tergantung pada jumlah karbon yang dilepaskan oleh vegetasi, begitu juga sebaliknya. Jumlah karbon mula-mula di atmosfer mempengaruhi perubahan jumlah karbon di vegetasi dan jumlah karbon mula-mula di vegetasi mempengaruhi perubahan jumlah karbon di atmosfer. Banyaknya jumlah karbon mula-mula di vegetasi berbanding lurus terhadap banyaknya jumlah karbon di atmosfer. Semakin banyak jumlah karbon mula-mula di vegetasi, maka apabila terjadi deforestasi kemungkinan jumlah karbon yang dilepas kembali ke atmosfer akan semakin banyak. Agar jumlah karbon di atmosfer tidak semakin bertambah

banyak, maka jumlah karbon mula-mula di vegetasi serta jumlah pelepasan karbon ke atmosfer dari vegetasi harus dikurangi.

#### **IV. UCAPAN TERIMA KASIH**

Banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Tugas Akhir ini, oleh karena itu penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Drs. Kartono, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah sabar membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
2. Drs. Solichin Zaki, M.Kom selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dan mengarahkan penulis hingga selesainya Tugas Akhir ini.
3. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya Tugas Akhir ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

#### **V. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] Edwin J. Purcell, Dale Varberg, Steven E. Rigdon. 2003. *Kalkulus edisi kedelapan jilid 1* (Terjemahan I Nyoman Susila). Erlangga: Jakarta.
- [2] Jumin, Hasan Basri. 1989. *Ekologi Tanaman Suatu Pendekatan Fisiologis*. Jakarta: Rajawali Pers.
- [3] Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa : Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [4] Kimball, John W. 1983. *Biologi Edisi Kelima Jilid 3* (Terjemahan Siti Soetarmi Tjitrosomo , Nawangsari Sugiri). Jakarta: Erlangga.
- [5] Leithold, Louis. 1986. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik edisi kelima jilid 1* (Terjemahan Hutahaen). Erlangga: Jakarta.
- [6] Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.
- [7] Ogata, Katsuhiko. 1990. *Teknik Kontrol Automatik* (Terjemahan Edi Leksono). Jakarta: Erlangga.
- [8] Sile Li, Andrew J. Jarvis, David T. Leedal. 2008. Are Respon Function Representations of the Global Carbon Cycle Ever Interpretable?. *Lancaster Environment Centre 61B: 361-371*.



- [9] Soemarwoto, Otto. 1997. *Ekologi Lingkungan Hidup dan Pembangunan*. Jakarta: Ikrar Mandiri Abadi.
- [10] Spiegel, Murray R. 1985. *Transformasi Laplace* (Terjemahan Pantur Silaban dan Hans Wospakrik). Jakarta: Erlangga.
- [11] Team SOS. 2011. *Pemanasan Global Solusi dan Peluang Bisnis*. Jakarta: Gramedia.