

SIFAT-SIFAT BI- Γ -IDEAL PADA Γ -SEMIGRUP

Romi Setiawardi¹, Y.D. Sumanto², Suryoto³

^{1,2,3}Program Studi Matematika Jurusan Matematika FSM UNDIP

romisetiawardi@gmail.com

ABSTRAK. Suatu Γ -semigrup merupakan generalisasi dari semigrup. Diberikan dua himpunan tak kosong M dan Γ , M disebut Γ -semigrup jika terdapat pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yaitu $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$ dan memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$ untuk setiap $a, b, c \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Sub Γ -semigrup B dari Γ -semigrup M disebut bi- Γ -ideal dari M jika $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$. Jika M adalah Γ -semigrup dengan elemen nol, maka setiap bi- Γ -ideal dari M memuat elemen nol. Γ -semigrup M merupakan bi-simple- Γ -semigrup jika dan hanya jika $M = m\Gamma M\Gamma m$ untuk semua $m \in M$. Bi- Γ -ideal B dari Γ -semigrup M merupakan minimal bi- Γ -ideal dari M jika dan hanya jika B merupakan bi-simple- Γ -semigrup.

Kata kunci : Γ -semigrup, bi- Γ -ideal, elemen nol, minimal bi- Γ -ideal, bi-simple- Γ -semigrup

I. PENDAHULUAN

Semigrup pertama kali diperkenalkan oleh A.K. Suchkewitsch pada tahun 1928. Himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat asosiatif membentuk suatu struktur aljabar yang disebut semigrup. Pada tahun 1952 R.A.Good dan D.R.Hughes memperkenalkan konsep bi-ideal pada semigrup. Misalkan S adalah semigrup dan B adalah subsemigrup dari S , maka B disebut bi-ideal dari S jika $BSB \subseteq B$.

Pada tahun 1981, M.K. Sen memperkenalkan konsep Γ -semigrup yang merupakan pengembangan dari semigrup. yaitu diberikan dua himpunan tak kosong M dan Γ , M disebut Γ -semigrup jika terdapat pemetaan $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$, didefinisikan dengan $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$ yang memenuhi $a\gamma b \in S$ dan $a\gamma b(\mu c) = a\gamma(b\mu c)$ untuk semua $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Pada semigrup terdapat bi-ideal semigrup. Pada Γ -semigrup juga terdapat konsep bi-ideal yaitu bi- Γ -ideal pada Γ -semigrup. Suatu himpunan tak kosong Q dari Γ -semigrup M disebut quasi- Γ -ideal dari M jika $M\Gamma Q \cap Q\Gamma M \subseteq Q$

Dalam paper ini akan dibahas mengenai bahwa setiap Γ -ideal pada Γ -semigrup merupakan quasi- Γ -ideal pada Γ -semigrup tersebut, setiap quasi- Γ -ideal pada Γ -semigrup juga merupakan bi- Γ ideal pada Γ -semigrup tersebut serta setiap Γ -ideal pada Γ -semigrup juga merupakan bi- Γ -ideal pada

Γ -semigrup tersebut. Selain itu juga akan dibahas mengenai bi-simple- Γ -semigrup dan minimal bi- Γ -ideal dari Γ -semigrup.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan membahas mengenai Γ -semigrup dan bi- Γ -ideal dan sifat-sifatnya.

2.1 Γ -semigrup

Definisi 2.1. [9] Diberikan dua himpunan tak kosong M dan Γ . Himpunan M disebut Γ -semigrup jika terdapat pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$ dan memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$ untuk setiap $a, b, c \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$.

Contoh 2.1 Misalkan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ dan

$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ dengan \mathbb{Z}_2 adalah himpunan bilangan bulat modulo 2.

Diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(C_1, \gamma, C_2) \mapsto C_1\gamma C_2$ untuk setiap $C_1, C_2 \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Untuk setiap $C_1, C_2, C_3 \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ berlaku $C_1\gamma C_2 \in M$ dan $(C_1\gamma C_2)\mu C_3 = C_1\gamma(C_2\mu C_3)$. Sehingga M adalah Γ -semigrup.

Contoh 2.2 Misalkan $(S, *)$ adalah sebarang semigrup dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Diberikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \rightarrow S$ yang didefinisikan dengan $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b = a*b$ untuk setiap $a, b \in S$. Karena $(S, *)$ adalah semigrup maka $a*b \in S$ dan $(a*b)*c = a*(b*c)$. Lalu pemetaan $a\gamma b = a*b \in S$ dan $(a\gamma b)\mu c = (a*b)*c = a*(b*c) = a\gamma(b\mu c)$ untuk setiap $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Sehingga $(S, *)$ adalah Γ -semigrup.

Definisi 2.2. [3] Misalkan M adalah Γ -semigrup. Sebuah elemen $0 \in M$ yang mengakibatkan $0\gamma a = a\gamma 0 = 0$ untuk setiap $a \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$ disebut elemen nol dari M . Suatu Γ -semigrup M disebut Γ -semigrup dengan elemen nol jika memuat elemen nol.

Definisi 2.3. [9] Misalkan M adalah Γ -semigrup dan K adalah himpunan tak kosong dengan $K \subseteq M$, K disebut sub Γ -semigrup dari M jika $K\Gamma K \subseteq K$ dengan $K\Gamma K = \{x\gamma y \mid x, y \in K \text{ dan } \gamma \in \Gamma\}$.

Contoh 2.3 Diberikan $M = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ dan $\Gamma = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Diberikan pemetaan

$M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(x, \gamma, y) \mapsto x\gamma y$ untuk setiap $x, y \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Untuk setiap $x, y, z \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ berlaku $x\gamma y \in M$ dan $(x\gamma y)\mu z = x\gamma(y\mu z)$. Sehingga M adalah Γ -semigrup. Misalkan $K = \left[0, \frac{1}{4} \right] \subseteq M$.

Untuk setiap $a, b \in K$ dan $\gamma \in \Gamma$ maka $a\gamma b \in K$. Dengan demikian $K\Gamma K = \left[0, \frac{1}{16} \right] \subseteq K$. Jadi, K adalah sub Γ -smigrup dari M .

Definisi 2.4. [9] Himpunan bagian tak kosong I dari Γ -semigrup M disebut Γ -ideal dari M jika $M\Gamma I \subseteq I$ dan $I\Gamma M \subseteq I$.

Definisi 2.5. [4] Himpunan bagian tak kosong Q dari Γ -semigrup M disebut quasi- Γ -ideal dari M jika $M\Gamma Q \cap Q\Gamma M \subseteq Q$.

Contoh 2.4 Diberikan Γ -semigrup M seperti pada Contoh 2.1 yaitu

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ dan $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ dengan \mathbb{Z}_2 adalah

himpunan bilangan bulat modulo 2. Diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(C_1, \gamma, C_2) \mapsto C_1\gamma C_2$ untuk setiap $C_1, C_2 \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$.

Misalkan $Q = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ maka $M\Gamma Q = \left\{ \begin{pmatrix} axp & 0 \\ cxp & 0 \end{pmatrix} \mid axp, cxp \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ dan

$Q\Gamma M = \left\{ \begin{pmatrix} pxa & pxb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid pxa, pxb \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. Sehingga

$M\Gamma Q \cap Q\Gamma M = \left\{ \begin{pmatrix} axp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid axp \in \mathbb{Z}_2 \right\} \subseteq Q$. Jadi Q adalah quasi- Γ -ideal dari

M .

Teorema 2.6. [9] Misalkan M adalah Γ -semigrup. Setiap Γ -ideal kiri, Γ -ideal kanan dan Γ -ideal dari M merupakan quasi- Γ -ideal dari M .

Bukti

Misalkan L adalah Γ -ideal kiri dari M maka $M\Gamma L \subseteq L$. Kemudian $M\Gamma L \cap L\Gamma M \subseteq M\Gamma L \subseteq L$. Didapat $M\Gamma L \cap L\Gamma M \subseteq L$, sehingga L adalah quasi- Γ -ideal dari M . Misalkan R adalah Γ -ideal kanan dari M maka $R\Gamma M \subseteq R$. Kemudian $M\Gamma R \cap R\Gamma M \subseteq R\Gamma M \subseteq R$. Didapat $M\Gamma R \cap R\Gamma M \subseteq R$, sehingga R adalah quasi- Γ -ideal dari M . Misalkan I adalah Γ -ideal dari M maka $I\Gamma M \subseteq I$ dan $M\Gamma I \subseteq I$. Kemudian $M\Gamma I \cap I\Gamma M \subseteq M\Gamma I \cap I\Gamma M \subseteq I \cap I \subseteq I$. Didapat $M\Gamma I \cap I\Gamma M \subseteq I$, sehingga I adalah quasi- Γ -ideal dari M .

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku, karena terdapat quasi- Γ -ideal yang bukan Γ -ideal kiri. Untuk memperjelas hal tersebut akan diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.5 Diberikan quasi- Γ -ideal Q seperti pada Contoh 2.4. Misalkan $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ dan $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q$ maka $C\gamma T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin Q$.

Dengan demikian $M\Gamma Q \not\subseteq Q$, sehingga Q bukan ideal kiri dari M .

2.2 Bi- Γ -ideal dan sifat-sifatnya

Definisi 2.7 [5] Misalkan M adalah Γ -semigrup dan B adalah sub Γ -semigrup dari M . Sub Γ -semigrup B disebut bi- Γ -ideal dari M jika $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$, yaitu untuk setiap $a, c \in B$, $b \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ maka $(a\gamma b)\mu c \in B$.

Contoh 2.6

Diberikan sub Γ -semigrup M seperti pada Contoh 2.3 dengan $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ dan $\Gamma = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(x, \gamma, y) \mapsto x\gamma y$ untuk setiap $x, y \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Misalkan $K = \left[0, \frac{1}{4} \right] \subseteq M$. Misal diambil sebarang $a, c \in K$, $b \in M$, $\gamma = \frac{1}{p^2} \in \Gamma$ dan

$\mu = \frac{1}{q^2} \in \Gamma$ berlaku $(a\gamma b)\mu c = \frac{abc}{p^2 q^2} \in M$ sehingga $K\Gamma M\Gamma K = \left[0, \frac{1}{16}\right] \subseteq K$.

Jadi, K adalah bi- Γ -ideal dari M .

Teorema 2.8 [9] Jika Γ -semigrup M memuat elemen nol dari M maka setiap bi- Γ -ideal dari M memuat elemen nol dari M .

Bukti

Diberikan M adalah Γ -semigrup yang memuat elemen nol x dari M sedemikian sehingga $x\gamma y = y\gamma x = x$, untuk setiap $y \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$.

Andaikan B adalah bi- Γ -ideal yang tidak memuat elemen nol x dari M ($x \notin B$) maka untuk setiap $a, c \in B$, $b \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ berlaku $(a\gamma b)\mu c \in B$.

Untuk $x \in M$ maka $(a\gamma x)\mu c = x\mu c = x$, karena x adalah elemen nol dari M .

Terjadi kontradiksi yaitu $(a\gamma x)\mu c = x \notin B$. Berarti pengandaian salah. Yang benar B adalah bi- Γ -ideal yang memuat elemen nol dari M .

Teorema 2.9 [5] Misalkan A adalah himpunan bagian tak kosong dari Γ -semigrup M dan $(A)_b$ merupakan bi- Γ -ideal terkecil yang memuat A . Maka $(A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A$. Selanjutnya $(A)_b$ merupakan bi- Γ -ideal dari M yang dibangun oleh A .

Bukti

Misalkan $B = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A$ maka $A \subseteq B$. Kemudian $B\Gamma B = (A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A)\Gamma (A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A) \subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A \subseteq B$. Sehingga B adalah sub Γ -semigrup. Selanjutnya, $B\Gamma M\Gamma B = (A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A)\Gamma M \Gamma (A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A) \subseteq A\Gamma M\Gamma A \subseteq B$. Jadi, B adalah bi- Γ -ideal dari M .

Misalkan C adalah bi- Γ -ideal dari M yang memuat A sehingga C adalah sub Γ -semigrup dari M dan $C\Gamma M\Gamma C \subseteq C$. Karena C adalah sub Γ -semigrup dari M dan $A \subseteq C$, maka $A\Gamma A \subseteq C$. Karena C adalah bi- Γ -ideal dari M dan $A \subseteq C$, maka $A\Gamma M\Gamma A \subseteq C$. Oleh karena itu $A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A \subseteq C$. Sehingga $B \subseteq C$. Dengan demikian $B = (A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A$ adalah bi- Γ -ideal terkecil dari M yang memuat A .

Contoh 2.7 Diberikan Γ -semigrup M seperti pada Contoh 2.3 dengan

$$M = [0,1] \subseteq \mathbb{R} \text{ dan } \Gamma = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \text{ Diberikan pemetaan}$$

$M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(x, \gamma, y) \mapsto x\gamma y$ untuk setiap

$x, y \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Misalkan $A = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \subseteq M$. Kemudian didapat

$$A\Gamma A = \left[\frac{1}{25}, \frac{1}{16} \right] \cup \left[\frac{1}{100}, \frac{1}{64} \right] \cup \left[\frac{1}{225}, \frac{1}{144} \right] \cup \dots \left[\frac{1}{25n^2}, \frac{1}{16n^2} \right] \text{ dan}$$

$A\Gamma M\Gamma A = \left[0, \frac{1}{16} \right]$. Sehingga bi- Γ -ideal dari M yang dibangun dari A adalah

$$(A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma M\Gamma A = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[0, \frac{1}{16} \right].$$

Teorema 2.10 [1] Diberikan Γ -semigrup M . Setiap quasi- Γ -ideal dari M juga merupakan bi- Γ -ideal dari M .

Bukti

Misalkan M adalah Γ -semigrup dan Q adalah quasi- Γ -ideal dari M , maka $Q \subseteq M$ dan $M\Gamma Q \cap Q\Gamma M \subseteq Q$.

$$\begin{aligned} Q\Gamma M\Gamma Q &= ((Q\Gamma M)\Gamma Q \cap Q\Gamma(M\Gamma Q)) \\ &\subseteq ((Q\Gamma M)\Gamma M \cap M\Gamma(M\Gamma Q)) \\ &= (Q\Gamma(M\Gamma M) \cap (M\Gamma M)\Gamma Q) \\ &\subseteq Q\Gamma M \cap M\Gamma Q \\ &\subseteq Q, \end{aligned}$$

Karena $Q\Gamma M\Gamma Q \subseteq Q$, maka Q adalah bi- Γ -ideal dari M .

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku karena terdapat bi- Γ -ideal yang bukan merupakan quasi- Γ -ideal. Untuk memperjelas hal tersebut akan diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.8 Diberikan $(A)_b = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[0, \frac{1}{16} \right]$ adalah bi- Γ -ideal dari

Γ -semigrup M seperti pada Contoh 2.7 dengan $M = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ dan

$\Gamma = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan

dengan $(x, \gamma, y) \mapsto x\gamma y$ untuk setiap $x, y \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Kemudian didapat

$$(A)_b \Gamma M = \left[0, \frac{1}{4} \right] \quad \text{dan} \quad M \Gamma (A)_b = \left[0, \frac{1}{4} \right] \quad \text{sehingga}$$

$$(A)_b \Gamma M \cap M \Gamma (A)_b = \left[0, \frac{1}{4} \right] \subsetneq (A)_b. \quad \text{Jadi } (A)_b \text{ bukan merupakan}$$

quasi- Γ -ideal dari Γ -semigup M

Teorema 2.11 [9] Diberikan M adalah Γ -semigrup. Setiap Γ -ideal kiri atau Γ -ideal kanan atau Γ -ideal (kiri dan kanan) adalah bi- Γ -ideal dari M .

Bukti

Misalkan M adalah Γ -semigrup dan L adalah Γ -ideal kiri dari M , maka $L \subseteq M$ dan $M \Gamma L \subseteq L$. Kemudian

$$\begin{aligned} L \Gamma M \Gamma L &= (L \Gamma (M \Gamma L) \cap (L \Gamma M) \Gamma L) \\ &\subseteq (M \Gamma (M \Gamma L)), \text{ karena } L \subseteq M \\ &\subseteq M \Gamma L \cap (L \Gamma M) \Gamma M, \text{ karena } L \text{ adalah } \Gamma\text{-ideal kiri dari } M \\ &\subseteq M \Gamma L \\ &\subseteq L, \text{ } L \text{ adalah } \Gamma\text{-ideal kiri dari } M. \end{aligned}$$

Karena diperoleh $L \Gamma M \Gamma L \subseteq L$, maka L adalah bi- Γ -ideal dari M .

Dengan cara yang sama akan diperoleh setiap Γ -ideal kanan atau Γ -ideal adalah bi- Γ -ideal dari M .

Kebalikan dari teorema ini tidak berlaku karena terdapat bi- Γ -ideal yang bukan merupakan Γ -ideal. Untuk memperjelas hal tersebut akan diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.9 Diberikan $(A)_b = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[0, \frac{1}{16} \right]$ adalah bi- Γ -ideal dari

Γ -semigrup M seperti pada Contoh 2.7 dengan $M = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ dan

$\Gamma = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Diberikan pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan

dengan $(x, \gamma, y) \mapsto x\gamma y$ untuk setiap $x, y \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$. Kemudian didapat

$$(A)_b \Gamma M = \left[0, \frac{1}{4}\right] \subsetneq (A)_b. \text{ Jadi, } (A)_b \text{ bukan } \Gamma \text{-ideal kanan dari } M.$$

Definisi 2.12 [5] Misalkan M adalah Γ -semigrup, M disebut *bi-simple- Γ -semigrup* jika tidak ada $C \subset M$ sedemikian sehingga C adalah *bi- Γ -ideal* dari M . Kalaupun ada $C \subseteq M$ sedemikian sehingga C adalah *bi- Γ -ideal* dari M maka $C = M$.

Teorema 2.13 [5] Misalkan M adalah Γ -semigrup, maka M merupakan *bi-simple- Γ -semigrup* jika dan hanya jika $M = m\Gamma M\Gamma m$ untuk $\forall m \in M$.

Bukti

(\Rightarrow)

Diketahui M adalah *bi-simple- Γ -semigrup*. Misalkan $m \in M$, maka $m\Gamma M\Gamma m$ adalah *bi- Γ -ideal* dari M karena $m\Gamma M\Gamma m$ adalah sub- Γ -semigrup dari M dan memenuhi $(m\Gamma M\Gamma m) \Gamma M\Gamma (m\Gamma M\Gamma m) \subseteq (m\Gamma M\Gamma m)$. Karena M adalah *bi-simple- Γ -semigrup* serta $m\Gamma M\Gamma m \subseteq M$ dengan $m\Gamma M\Gamma m$ adalah *bi- Γ -ideal* dari M , maka dari Definisi 2.11 didapat $M = m\Gamma M\Gamma m$.

(\Leftarrow)

Diketahui $M = (m\Gamma M\Gamma m)$. Misalkan B adalah *bi- Γ -ideal* dari M , maka $B \subseteq M$. Misalkan $b \in B$, maka $b \in M$ karena $B \subseteq M$, sehingga $M = b\Gamma M\Gamma b \subseteq B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$. Diperoleh $M \subseteq B$. karena $B \subseteq M$ dan $M \subseteq B$ mengakibatkan $B = M$, maka M adalah *bi-simple- Γ -semigrup*.

Definisi 2.14 [5] Diberikan M adalah Γ -semigrup dan B adalah *bi- Γ -ideal* dari M , B disebut *minimal bi- Γ -ideal* dari M jika tidak ada $C \subset B$ sedemikian sehingga C adalah *bi- Γ -ideal* dari M . Kalaupun ada $C \subseteq B$ di mana C adalah *bi- Γ -ideal* dari M maka $C = B$.

Teorema 2.15 [5] Diberikan M adalah Γ -semigrup dan B adalah *bi- Γ -ideal* dari M , maka B merupakan *minimal bi- Γ -ideal* dari M jika dan hanya jika B adalah *bi-simple- Γ -semigrup*.

Bukti

(\Rightarrow)

Diketahui B adalah minimal bi- Γ -ideal dari M . Misalkan C adalah bi- Γ -ideal dari B , maka $C \subseteq B, C \subseteq M$ dan $C\Gamma B\Gamma C \subseteq C \subseteq B \subseteq M$. Selanjutnya $C\Gamma B\Gamma C$ adalah bi- Γ -ideal dari M karena $C\Gamma B\Gamma C$ merupakan sub Γ -semigrup dari M dan memenuhi $(C\Gamma B\Gamma C)\Gamma M\Gamma (C\Gamma B\Gamma C) \subseteq (C\Gamma B\Gamma C)$. Karena B adalah minimal bi- Γ -ideal dari M dan diperoleh $C\Gamma B\Gamma C \subseteq B$ adalah bi- Γ -ideal dari M , maka dari Definisi 2.14 diperoleh $C\Gamma B\Gamma C = B$. Diketahui $C \subseteq B$ dan diperoleh $B = C\Gamma B\Gamma C \subseteq C$ maka mengakibatkan $C = B$. Karena $C \subseteq B$ adalah bi- Γ -ideal dari B dan didapat $C = B$ maka B adalah bi-simple- Γ -semigrup.

(\Leftarrow)

Diketahui B adalah bi-simple- Γ -semigrup. Misalkan C adalah bi- Γ -ideal dari M sedemikian sehingga $C \subseteq B$, maka $C\Gamma B\Gamma C \subseteq C\Gamma M\Gamma C \subseteq C$. Didapat C adalah bi- Γ -ideal dari B karena C adalah sub Γ -semigrup dari B serta $C\Gamma B\Gamma C \subseteq C$. Diketahui B adalah bi-simple- Γ -semigrup dan diperoleh C adalah bi- Γ -ideal dari B dengan $C \subseteq B$, maka dari Definisi 2.12 didapat $C = B$. Sehingga B adalah minimal bi- Γ -ideal dari M .

III. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang disajikan sebelumnya. Dapat disimpulkan misal diberikan dua himpunan tak kosong M dan Γ , M disebut Γ -semigrup jika terdapat pemetaan $M \times \Gamma \times M \rightarrow M$ yang didefinisikan dengan $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$ dan memenuhi $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$ untuk setiap $a, b, c \in M$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Setiap sub Γ -semigrup B dari Γ -semigrup M disebut bi- Γ -ideal dari M jika memenuhi $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$. Setiap Γ -ideal kiri atau Γ -ideal kanan atau Γ -ideal merupakan quasi- Γ -ideal. Setiap quasi- Γ -ideal merupakan bi- Γ -ideal. Akibat dari hal ini setiap Γ -ideal kiri atau Γ -ideal kanan atau Γ -ideal merupakan bi- Γ -ideal. Suatu Γ -semigrup M merupakan bi-simple- Γ -semigrup jika M adalah satu-satunya bi- Γ -ideal dari M . Suatu Γ -semigrup M merupakan

bi-simple- Γ -semigrup jika dan hanya jika $M = m\Gamma M\Gamma m$. Suatu bi- Γ -ideal B dari Γ -semigrup M merupakan minimal bi- Γ -ideal jika B tidak memuat bi- Γ -ideal lain dari M . Suatu bi- Γ -ideal B merupakan minimal bi- Γ -ideal jika dan hanya jika B merupakan bi-simple- Γ -semigrup.

IV. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Braja, I. 2009. *Charaterizations of Regular Gamma Semi-Groups Using Quazi-Ideals*. J.Math. Vol 3. 2009. No. 36. 1789-1794
- [2]. Changpas, T. 2012. *On Intra-Reguler Γ -Semigroups*. Int. J. Contemp. Math. Sciences. Vol. 7. No. 273-277.
- [3]. Chattopadhyay, S and S. Kar. 2008. *On Structure Space of Γ -Semigroup*. Acta Univ. Palacki.Olomuc., Fac. rer. Nat.,Mathematica 47, 37-46.
- [4]. Chinram, R. 2006. *On Quasi-gamma-ideals in Gamma- Semigroup*. J.Math .32,351-353.
- [5]. Chinram, R and Jirojkul, C. 2007. *On bi- Γ -ideal in Γ -semigroups*. Songklanakarin J. Sci. Technol. 29(1) : 231-234.
- [6]. Chinram, R. And Sripakarn R. 2009. *Minimal Quasi-ideals in Γ - Semigroup*. Thai.J.Math 4,7-11.
- [7]. El-madhoun, Neveen. R. 2007. *Quasi-ideals and Bi-ideals on Semigroup and Semirings*. Thesis. The Islamic University of Gaza. Palestine
- [8]. Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. *Element Of Modern Algebra*. PWS-Kent Publishing Company. Boston
- [9]. Iampan, A. 2009. *Note on Bi- Γ -ideals in Γ -semigroups*. International journal of Algebra. Vol. 3. No. 181-188.
- [10]. Kehayopulu, Niovi. 2009. *On le- Γ -semigroups*. Internat. Math. Forum. 4. no. 39, 1915-1922.
- [11]. Stephanie, D.A. 2012. *Sifat-sifat Quasi-Ideal- Γ pada Semigrup- Γ* . Skripsi. UNDIP. Semarang