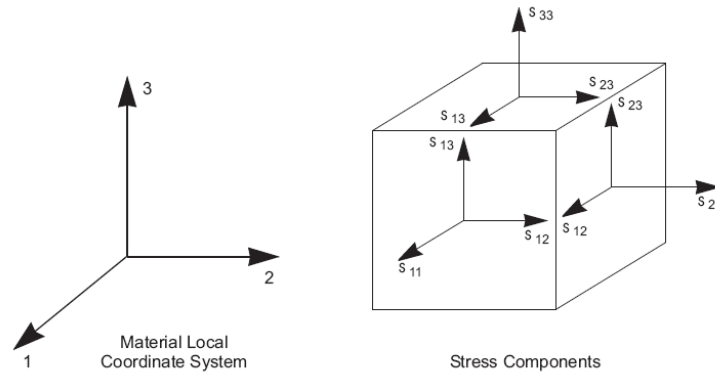


BAB III

METODE ELEMEN HINGGA

3.1 Tegangan

Tegangan adalah gaya per unit area pada suatu material sebagai reaksi akibat gaya luar yang dibebankan pada struktur. Pada Gambar 3.1. diperlihatkan elemen kubus dalam koordiant kartesian. Permukaan kubus adalah sebagai objek untuk memperlihatkan vector tegangan yang berisikan komponen normal yang tegak lurus permukaan dan dua tegangan geser yang melewati permukaan, yang membentuk sudut siku-siku satu dengan yang lainnya. Seluruh elemen kubus memiliki tiga tegangan normal (s11, s22, s33) atau ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) dalam koordinat global dan enam tegangan geser (s12, s23, s31, s13, s32, s21) atau ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$) bila dinyatakan dalam koordinat global.



Gambar 3.1 Tegangan-tegangan elemen kubus dalam koordinat lokal (SAP Manual)

Kesembilan komponen tegangan tersebut dapat disatukan dalam bentuk tensor tegangan:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Elemen kubus berada dalam keadaan keseimbangan statis, oleh karena itu jumlah momen pada ujung-ujungnya haruslah nol, jadi:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3.2)$$

Persamaan diatas hanya berlaku jika tidak ada kopel, aspek termal ataupun fenomena yang lain. State of stress sekarang ditulis hanya dalam enam tegangan dan tensor tegangan ditulis dalam bentuk sederhana:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & & sym \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Pada kenyataanya tegangan yang terjadi pada end block menyebar secara radial tiga dimensi. Tegangan yang terbentuk berupa tegangan radial dan tangensial dalam koordiant polar. Namun begitu tegangan tersebut dapat dikonversi dalam bentuk tegangan transversal dan longitudinal dalam koordinat kartesian.

Tegangan yang terjadi pada end block sangat rumit untuk diformulasikan secara matematis. Untuk melacak tegangan yang terjadi pada *endblock* dapat dilakukan dengan metode elemen hingga. Metode elemen hingga (*finite element method*) adalah prosedur numerik untuk menyelesaikan masalah mekanika kontinum dengan tingkat ketelitian yang dapat diandalkan. Dengan metode ini nilai tegangan pada tiap-tiap titik nodal yang terbentuk melalui proses meshing pada struktur dapat diketahui dengan memformulasikan perpindahan, dan regangan serta korelasinya dengan tegangan.

3.2 Respon Terhadap Tegangan

3.2.1 Hubungan Perpindahan dan Regangan

Hubungan antara perpindahan dan regangan merupakan hal yang sangat penting dalam pembentukan elemen. Ketika suatu elemen menerima gaya, elemen kecil tersebut mengalami deformasi, perpindahan yang terjadi dinyatakan dalam vector (u,v, w) yang setia titik mempunyai kedudukan sendiri dalam vektor.

Ketika dau titik berada dalam elemen kecil tertutup, perpindahan titik tersebut dituliskan dalam bentuk diferensial:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (3.4)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (3.5)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (3.6)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk vektorial:

$$\{da\} = Te\{dr\} \quad (3.7)$$

Dimana $\{da\}$ dan $\{dr\}$ adalah komponen-komponen (du, dv, dw) dan (dx, dy, dz) berturut-turut dan Te adalah tensor yang didefinisikan dengan

$$Te = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Tensor dapat dibagi kedalam tiga komponen tensor:

$$Te = Te' + Te'' + Te''' \quad (3.9)$$

Dimana:

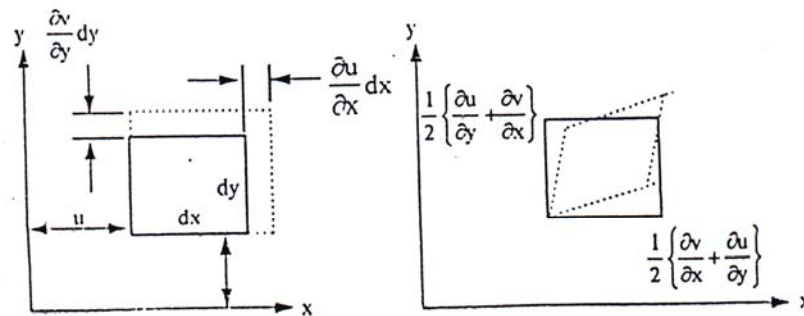
$$Te' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$Te'' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dan,

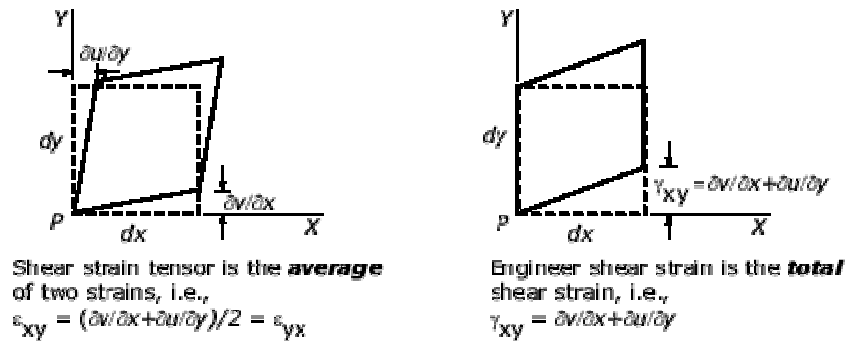
$$Te'' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Pada gambar (3.2) memperlihatkan deformasi pada elemen segi empat yang merupakan proyeksi dari elemen kubus pada bidang x-y (hal yang sama dapat dilakukan pada bidang y-z dan z-x). Perubahan total elemen dapat dibagi kedalam tiga komponen, dua diantaranya memperlihatkan dua bentuk deformasi dan yang ketiga adalah perubahan posisi tanpa adanya deformasi (rotasi).



Gambar 3. 2 Deformasi elemen segi empat hasil proyeksi kubus pada bidang x-y (Popov, 1989)

Dalam penyelidikan tiga tensor, dapat dilihat ciri masing-masing tensor dengan perubahan. Tensor Te' dan Te'' menunjukkan adanya deformasi pada sebuah elemen dan tensor Te''' memperlihatkan adanya rotasi. Pembahasan ini akan ditekankan hanya pada regangan dan deformasi terhadap elemen, untuk tensor Te''' diabaikan, dan perhatian yang lebih jauh akan diarahkan pada tensor Te' dan Te'' .



Gambar 3. 3. Deformasi geser pada suatu titik (Popov, 1989)

Apabila dua tensor deformasi disatukan menjadi:

$$Te = Te' + Te'' \quad (3.13)$$

jadi :

$$Te = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (3.14), dapat ditulis dengan

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.15a)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.15b)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.15c)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.16a)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.16b)$$

$$e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.16c)$$

Untuk standar Teknik symbol-simbol pada persamaan-persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\epsilon_x = e_{xx} \quad \epsilon_y = e_{yy} \quad \epsilon_z = e_{zz} \quad (3.17)$$

dan:

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy} \quad \gamma_{yz} = 2e_{yz} \quad \gamma_{zx} = 2e_{zx} \quad (3.18)$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$T_e = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

komponen-komponen ϵ_x , ϵ_y , dan ϵ_z adalah regangan normal, sedangkan γ_{xy} , γ_{yz} dan γ_{zx} merupakan regangan geser.

3.2.2 Hubungan Tegangan dan Regangan

Hubungan antara tegangan dan regangan merupakan hal yang sangat penting dalam pembentukan elemen. Ketika suatu elemen menerima gaya, elemen kecil itu mengalami deformasi, yang masing-masing titik memiliki kedudukan sendiri dalam vektor. Ketika dua titik berada dalam elemen kecil tertutup, perpindahan titik itu dapat dituliskan dalam bentuk persamaan differensial.

Hubungan antara komponen tegangan dan komponen regangan pada kondisi elastis dikenal dengan hukum Hook:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.20a)$$

Dimana:

ϵ_x = Komponen regangan pada sumbu x

σ_x = komponen tegangan pada sumbu x

E = Modulus elastisitas

Perpanjangan elemen ini dalam arah x diikuti dengan kontraksi melintang (pengecilan) sebesar:

$$\epsilon_y = \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.20b)$$

$$\epsilon_z = \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.20c)$$

Dimana ν adalah poisson ratio .

Apabila elemen diatas mengalami kerja tegangan normal $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ secara serempak dan terbagi rata disepanjang sisinya, berdasarkan percobaan yang dapat dibuktikan bahwa untuk material isotropik dan linear elastik, hubungan antara tegangan dan regangan dapat dinyatakan dengan:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.21a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (3.21b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.21c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.22a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.22b)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (3.22c)$$

Dimana G adalah modulus geser yang besarnya adalah;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.23)$$

Persamaan-persamaan tersebut diatas dapat digunakan untuk mendapatkan komponen-komponen tegangan sebagai fungsi regangan, yaitu sebagai berikut:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] \quad (3.24a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)] \quad (3.24b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] \quad (3.24c)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.25a)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.25b)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.25c)$$

Untuk kasus khusus dimana sumbu x, y, z berimpit dengan sumbu utama 1,2,3, persamaan tersebut dapat disederhanakan dengan menganggap semua tegangan geser sama dengan nol dan $\sigma_3 = 0$, sehingga persamaan menjadi;

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \quad (3.26a)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \quad (3.26b)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.26c)$$

Untuk menyelesaikan persamaan 2.31 dalam kasus $\sigma_3 = 0$ persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi:

$$\epsilon_3 = \frac{-\nu}{1-\nu}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (3.27)$$

Persamaan terakhir ini dapat disubstitusikan kedalam persamaan 2.31 sehingga didapatkan:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \quad (3.28a)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \quad (3.28b)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (3.28c)$$

Untuk pembahasan dalam metode elemen hingga, hukum hooke selanjutnya ditulis kedalam bentuk matrix:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Inverse dari matrix tersebut adalah

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Disederhanakan menjadi:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (3.31)$$

Dimana $\{\sigma\}$ dan $\{\epsilon\}$ adalah vector untuk tegangan dan regangan. Matriks $[D]$, merupakan matrik kekakuan:

$$[D] = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Dalam metode elemen hingga, persamaan diatas merupakan dasar analisis untuk tegangan 3 dimensi. Untuk elemen 2 dimensi komponen dalam sumbu z dapat diabaikan, dengan pertimbangan maka tegangannya dapat diasumsikan:

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0 \quad (3.33)$$

dengan demikian, maka:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (3.34)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (3.35)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (3.35)$$

Matrix yang memperhatikan hukum hooks menjadi;

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Inverse dari matrix tersebut adalah;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Dimana matriks kekakuan menjadi:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Untuk plat yang sangat tebal, deformasi diasumsikan terjadi hanya dalam arah sumbu x dan y dan kasusnya menjadi kasus regangan bidang. Karena batas dari tipis dan tebal tidak jelas dan teori lebih mengandalkan pada pendekatan praktis, sehingga:

$$\epsilon_z = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} = 0 \quad (3.39)$$

Tegangan σ_z tidak nol, dengan mengikuti persamaan (3.24c). Dari hubungan tegangan dan regangan, persamaan (2.30) dapat dirubah dalam bentuk:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Matriks bidang elastiknya sama dengan:

$$E = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.3 Konsentrasi Tegangan

Berdasarkan formulasi hukum hook yang telah diuraikan sebelumnya, terlihat bahwa tegangan-tegangan selalu disertai dengan deformasi. Bila deformasi tersebut terjadi pada elemen yang berdampingan dengan tingkat keseragaman yang sama, maka pada bahan-bahan yang isotropik tidak akan kita dapati tegangan-tegangan tambahan selain yang diberikan oleh persamaan diatas. Tetapi bila keseragaman dari luas yang sangat kecil, maka suatu gangguan pada tegangan dapat terjadi. Hal ini terjadi karena pada kenyataanya status deformasi

deformasi pada elemen-elemen yang berbatasan harus kontinu secara fisis. Deformasi tersebut haruslah merentang dan menciut dengan jumlah yang sama dari semua partikel-partikel yang teretak pada sebelha menyebelah perbatasan deformasi-deformasi yang dihasilkan oleh deformsai perpanjangan dan geser, hal ini menyangkut sifat-sifat bahan E , G , ν serta gaya-gaya terpkai.

Metoda untuk mendapatkan distribusi tegangan dibahas dalam teori kekenyalan matematis. Bahkan dengan metode-metode tingkat lanjut tersebut hanya untuk keadaan yang sederhana yang dapat diselesaikan. Kesukaran-kesukaran matematis akan menjadi lebih besar bila menyelesaikan berbagai soal penting praktis. Untuk kondisi yang cukup rumit prosedur-prosedur pendekatan numerik yang dirumuskan berdasarkan elemen berhingga atau persamaan-persamaan yang berbeda hingga adalah sangat luas dipergunakan dalam penyelesaian-penyelesaian yang rumit. Untuk mendapatkan distribusi tegangan yang sesungguhnya telah dikembangkan Teknik eksperimental khusus seperti fotoelastisitas.

Pada *endblock* dengan menganalogikan sebagai blok pendek yang dikenakan gaya terpusat P . Secara kualitatif jelas bahwa regangan haruslah maksimum disekitar gaya terpakai, karena tegangan yang bersangkutan pun maksimum. Hal ini tentulah jawaban yang diberikan oleh teori elastisitas.

Dapat diperhatikan bahwa puncak dari tegangan normal pada sustu irisan yang dekat letaknya dengan gaya terpakai, dan bagaimana cepatnya puncak ini merata menjadi suatu distribusi tegangan yang hamper sama pada irisan bawah dengan lebar blok tersebut. Gambaran ini dikenal dengan asas St. Venant dari penyebaran cepat tegangan yang terlokalisasi. Asas ini menyatakan bahwa efek gaya atau tegangan yang bekerja pada luas yang kecil, boleh diperlakukan suatu sitem setara statis pada jarak selebar atau setebal benda, sehingga menyebabkan distribusi tegangan dapat mengikuti hukum yang sederhana.

Karena besarnya kesukarana yang harus diatasi untuk menyelesaikan tegangan local tersebut, maka dalam praktek dikembangkan suatu skema yang tepat. Skema ini secara sederhana terdiri dari perhitungan tegangan dengan persamaan-

persamaan elementer dan kemudian mengalikan tegangan yang telah dihitung dengan angka yang disebut faktor konsentrasi tegangan (K). Harga factor konsentrasi tegangan tergantung pada perbandingan geometris dari bagian bangunan. Faktor ini dapat diperoleh dalam bentuk table dan grafik.

3.4 Teori Kegagalan

Kriteria kegagalan dimaksudkan untuk memprediksi atau untuk memperkirakan keruntuhan/leleh dari suatu bagian struktur. Ada berbagai teori yang digunakan. Namun, yang paling banyak digunakan dan diuji penerapannya untuk material isotropik. Teori-teori ini, tergantung dari kondisi alami bahan (getas atau ductile), berikut disajikan dalam table.

Tabel 3. 1. Tipe Material dan Teori Kegagalan yang Digunakan

Tipe Material	Teori Kegagalan
Ductile	Tegangan geser maximum, Teori Von Mises
Brittle	Tegangan normal maximum, Teori Mohr

Empat kriteria tersebut disajikan dalam bentuk tegangan utama. Oleh karena itu, semua tegangan harus ditransformasikan dalam tegangan utama sebelum diterapkan dalam kriteria keruntuhan. Berikut ini adalah hal-hal yang perlu diperhatikan:

1. Untuk menentukan apakah material tersebut getas atau ductile dapat menjadi suatu yang subjektif, karena sering tergantung pada suhu, tingkat regangan, dan kondisi lingkungan. Sehingga, 5 % dari kriteria perpanjangan pada saat putus adalah yang dapat membatasinya. Bahan dengan elongasi yang lebih besar dapat dianggap sebagai material ductile. Perbedaan lainnya antara kuat tekan material brittle biasanya lebih besar dari kuat tariknya.

2. Semua kriteria keruntuhan tergantung pada pengujian dasar (seperti tari uniaxial dan/atau kuat tekan), walupun kebanyakan dari elemen struktur menalami pembebanan yang multiaxial. Perbedaan ini biasanya terkait dengan biaya karena pengujian keruntuhan dengan beban multiaxial lebih luas, rumit dan mahal.

3.4.1 Kriteria Tegangan Geser Maximum

Teori tegangan geser maksimum merupakan hasil pengamatan dalam bahan yang liat, gelincir yang terjadi selama peluluhan sepanjang bidang yang berorientasi secara kritis. Hal ini memberi kesan bahwa tegangan geser maksimum memainkan peranan kunci dan peluluhan (yielding) bahan tersebut tergantung hanya kepada tegangan geser maksimum yang dicapai dalam sebuah elemen. Karena itu pada saat harga kritis tertentu τ_{cr} dicapai, maka peluluhan dalam suatu elemen mulai terjadi. Untuk bahan tertentu harga ini dibuat sama dengan tegangan geser luluh dalam pengaruh tarik atau tekan sederhana. Jadi bila $\sigma_x = \pm \sigma_1 \neq 0$ dan $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, maka:

$$\tau_{\max} \equiv \tau_{cr} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{yp}}{2} \quad (3.1)$$

yang berarti bahwa bila σ_{yp} yaitu tegangan titik luluh kita peroleh, maka tegangan geser yang bersangkutan adalah setengahnya. Kesimpulan ini dapat pula diambil dengan mudah dari lingkaran tegangan mohr.

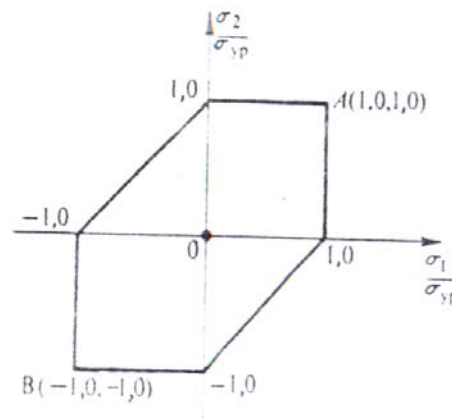
Untuk menggunakan criteria tegangan geser maksimum pada status tegangan biaksial, mula-mula harus ditentukan tegangan geser maksimum tersebut barulah disamakan dengan τ_{\max} yang diberikan oleh persamaan diatas. Dengan menyatakan tegangan geser maksimum untuk status tegangan geser maksimum untuk status tegangan yang diberikan dalam bentuk tegangan utama, sehingga kriteria luluh dapat dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{yp} \quad \text{dan} \quad |\sigma_2| \leq \sigma_{yp} \quad (3.2)$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_{yp} \quad (3.3)$$

Persamaan 3.2 hanya berlaku bila σ_1 dan σ_2 mempunyai tanda yang sama, sedangkan persamaan 3.3 berlaku hanya bila σ_1 dan σ_2 mempunyai tanda yang berlawanan. Dalam kasus sumbu ganda, bila tegangan-tegangan utama mempunyai tanda yang sama, maka tegangan geser maksimum diperoleh dengan meninjau elemen sepanjang sumbu tegangan yang lebih kecil, untuk tegangan utama yang berlawanan tanda, maka tegangan geser terbesar diberikan oleh $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Dengan meninjau σ_1 dan σ_2 sebagai koordinat sebuah titik dalam ruangan tegangan σ_1 - σ_2 , maka persamaan-persamaan tersebut menentukan pembatasan segi enam gambar 3.1. Tegangan yang berada pada segienam ini menunjukkan tidak ada peluluhan bahan yang terjadi, yang berarti bahan tersebut bersifat elastis. Status tegangan yang berhubungan dengan titik yang terdapat pada segienam memperlihatkan bahwa bahan tersebut dalam keadaan meluluh. Tidak ada titik-titik yang berada di luar segienam.



Gambar 3. 4 Kriteria luluh berdasarkan tegangan geser maksimum (Popov, 1989)

3.4.2 Teori Distorsi Energi/Teori Von Mises

Kriteria lain mengenai peluluhan bahan liat yang isotropik, yang diterima secara luas ialah yang berdasarkan konsep energi. Dalam pendekatan ini, energi elastis total dibagi kedalam dua bagian: satu yang berhubungan dengan

perubahan volumetrik bahan, sedang yang lain menyamakan energi distorsi geser pada titik luluh dalam pengaruh tegangan tarik sederhana dengan yang dibawah pengaruh tegangan gabungan, kita dapat membuat kriteria luluh untuk tegangan gabungan.

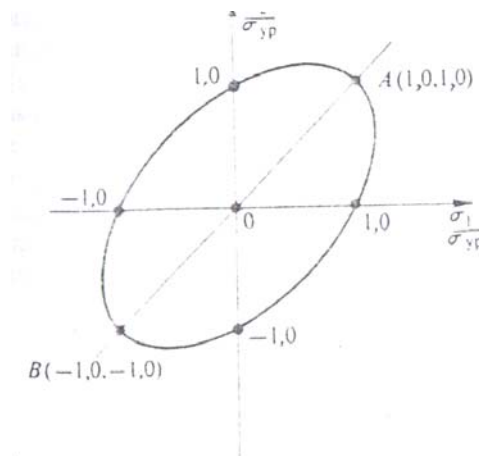
Kita dapat melihat bahwa syarat luluh untuk bahan plastis secara idel dibawah status tegangan triaksial dapat kita peroleh dalam bentuk tegangan utama sebagai:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{yp}^2 \quad (3.4)$$

Untuk tegangan bidang $\sigma_3 = 0$, maka persamaan 3.4 menjadi:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right)^2 = 1 \quad (3.5)$$

ini merupakan persamaan sebuah elips, yang dapat digambarkan pada gambar 3.2. Tegangan yang terletak dalam elips menunjukkan bahwa bahan bersifat secara kenyal. Titik-titik pada elips menunjukkan bahwa bahan dalam keadaan meluluh. Ini merupakan penafsiran yang sama dengan teori tegangan geser maksimum. Pada saat tanpa pembebanan bahan tersebut bersifat secara elastis.

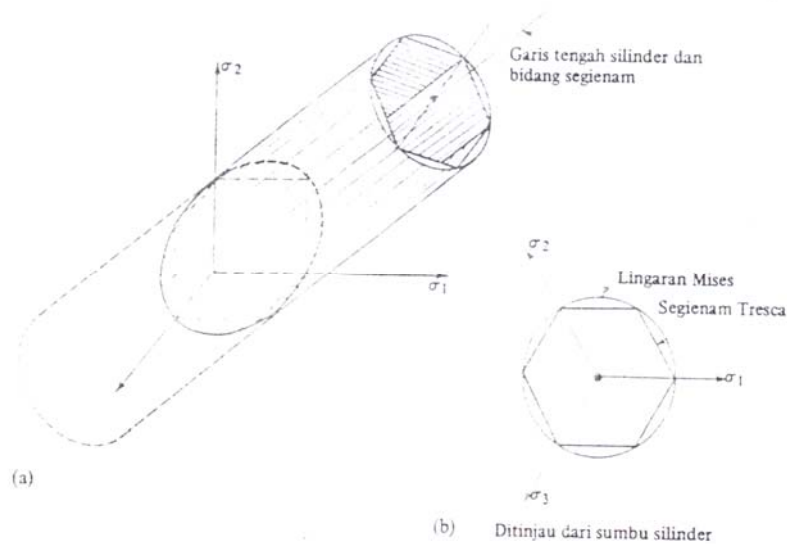


Gambar 3. 5 Kriteria luluh berdasarkan energi distorsi maksimum (Popov, 1989)

Adalah penting untuk diperhatikan bahwa teori ini tidak memperkirakan perubahan tanggapan bahan tersebut bila ditambahkan tegangan tarik dan tekan hidrolis. Ini melihat kenyataab bahwa berhubung hanya perbedaan tegangan yang terkait pada persamaan 3.4, maka penambahan tegangan konstan masing-masing

tidak mempengaruhi syarat luluh. Untuk alasan ini dalam ruang tiga dimensi, dengan sumbunya adalah sama dengan $1/\sqrt{3}$. Silinder yang demikian dapat dilihat pada gambar 3.3. Elips pada gambar 3.2 hanyalah perpotongan silinder dengan bidang σ_1 - σ_2 . Kita dapat pula melihat bahwa permukaan luluh untuk kriteria tegangan geser maksimum adalah sebuah segienam yang sesuai dimasukkan kedalam tabung seperti gambar 3.3.

Syarat luluh yang diungkapkan pada persamaan 3.4. dapat dilihat sebagai invariant tegangan yang lain. Ini juga merupakan suatu fungsi yang kontinu. Gambaran ini membuat penggunaan dari hukum peluluhan plastis ini untuk tegangan gabungan menarik dari sudut pandang teoritis.



Gambar 3. 6 Permukaan luluh untuk status tegangan tiga dimensi (Popov, 1989)

BAB III	25
METODE ELEMEN HINGGA	25
3.1 Tegangan	25
3.2 Respon Terhadap Tegangan	26
3.2.1 Hubungan Perpindahan dan Regangan	26
3.2.2 Hubungan Tegangan dan Regangan	30
3.3 Konsentrasi Tegangan	35
3.4 Teori Kegagalan	37
3.4.1 Kriteria Tegangan Geser Maximum	38
3.4.2 Teori Distorsi Energi/Teori Von Mises	39
Gambar 3. 1 Tegangan-tegangan elemen kubus dalam koordinat lokal	25
Gambar 3. 2 Deformasi elemen segi empat, proyeksi kubus pada bidang x-y	28
Gambar 3. 3 Deformasi geser pada suatu titik	29
Gambar 3. 4 Kriteria luluh berdasarkan tegangan geser maksimum	39
Gambar 3. 5 Kriteria luluh berdasarkan energi distorsi maksimum	40
Gambar 3. 5 Permukaan luluh untuk status tegangan tiga dimensi	41
Tabel 3. 1. Tipe Material dan Teori Kegagalan yang Digunakan	37