

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

II.1. Torsi Pada Balok Sederhana

Ditinjau sebuah elemen balok sederhana dengan penampang persegi menerima beban momen lentur konstan seperti ditunjukkan dalam gambar II.1(a). Diasumsikan bahwa perilaku elemen mengikuti Hukum Hooke, dimana deformasi yang terjadi sangat kecil dan tidak terjadi perubahan geometri penampang selama terjadinya deformasi. Beban kritis dapat diperoleh dengan mencari beban terbesar sedemikian sehingga elemen masih dalam keadaan seimbang (Chajes, 1970).

Pada elemen terdeformasi seperti ditunjukkan dalam gambar II.1(b), terjadi perubahan orientasi sumbu elemen. Sumbu yang semula XYZ berubah menjadi X'Y'Z' yang ditunjukkan dengan deformasi dalam tiga sumbu secara simultan seperti terlihat pada gambar II.1(c) yaitu u untuk deformasi ke arah sumbu X, v untuk deformasi ke arah sumbu Y, dan β untuk deformasi rotasi ke arah sumbu Z. Sumbu X'Y' merupakan sumbu penampang terdeformasi yang bergeser sejauh β dari sumbu penampang asli. Sedangkan sumbu Z' mempunyai arah tegak lurus terhadap penampang terdeformasi yang berubah terhadap Z.

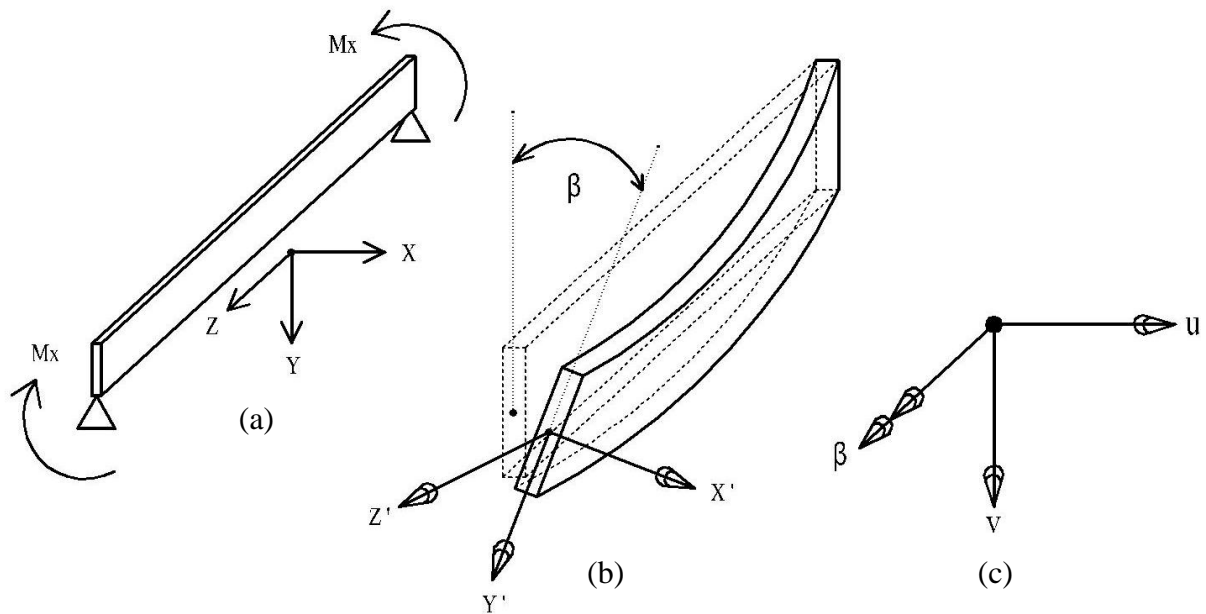
Beberapa asumsi digunakan untuk mempermudah pembacaan deformasi titik. Untuk deformasi u diambil positif jika searah dengan sumbu X positif, v diambil positif jika searah dengan sumbu Y positif, dan β diambil positif jika berputar searah jarum jam searah sumbu utama Z.

Kedua ujung balok ditumpu secara sederhana dimana deformasi u dan v tidak terjadi, sehingga :

$$u = v = 0 ; \text{ pada } z = 0 \text{ dan } z = l \quad (\text{II.1})$$

pada kedua ujung balok rotasi terhadap sumbu Z dicegah tetapi bebas terhadap warping, maka didapatkan hubungan :

$$\beta = \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0 ; \text{ pada } z = 0 \text{ dan } z = l \quad (\text{II.2})$$



Gambar II.1. (a) Elemen balok sederhana memikul beban momen konstan M_x ;
 (b) Deformasi balok ; (c) Penamaan sumbu deformasi

Pada elemen terdeformasi, akibat deformasi – deformasi yang terjadi, terbentuk keseimbangan gaya – gaya dalam pada elemen seperti ditunjukkan dalam gambar II.2. Asumsi yang digunakan untuk gaya – gaya dalam pada elemen terdeformasi sama dengan asumsi yang digunakan untuk asumsi pembacaan rotasi β terhadap sumbu Z asli. Oleh karena itu setiap gaya dalam pada sumbu elemen terdeformasi, mempunyai hubungan khusus dengan beban momen M_x yang diberikan.

Berdasarkan deformasi – deformasi yang terjadi pada gambar II.2, maka didapatkan persamaan diferensial untuk lentur dan puntir sebagai berikut :

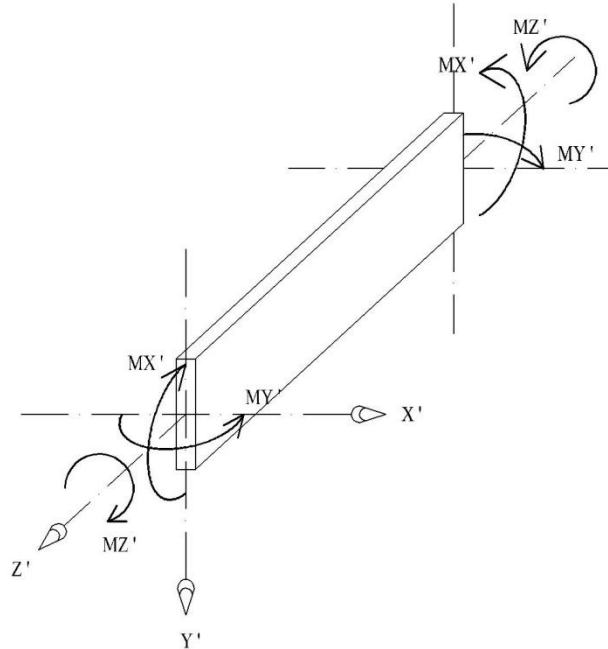
$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = -M_{x'} \quad (\text{II.3})$$

$$EI_y \frac{d^2u}{dz^2} = -M_{y'} \quad (\text{II.4})$$

$$GI_z \frac{d\beta}{dz} = -M_{z'} \quad (\text{II.5})$$

Persamaan (II.3) dan (II.4) merupakan persamaan diferensial untuk lentur balok pada sumbu X' dan Y' , sedangkan persamaan (II.5) merupakan persamaan analog untuk puntir pada sumbu Z' . $M_{x'}$, $M_{y'}$ dan $M_{z'}$ merupakan komponen dari beban momen yang bekerja M_x pada arah sumbunya. Oleh karena itu nilai – nilai $M_{x'}$, $M_{y'}$ dan $M_{z'}$ dapat ditentukan

dengan mengetahui hubungan antara sudut – sudut yang terbentuk oleh sumbu asli (XYZ) dan sumbu terdeformasi (X'Y'Z'). Dengan mengetahui sudut – sudut tersebut, maka posisi sumbu – sumbu asli dan sumbu terdeformasi dapat digambarkan seperti dalam gambar II.3.



Gambar II.2. Keseimbangan gaya – gaya dalam yang terjadi pada balok

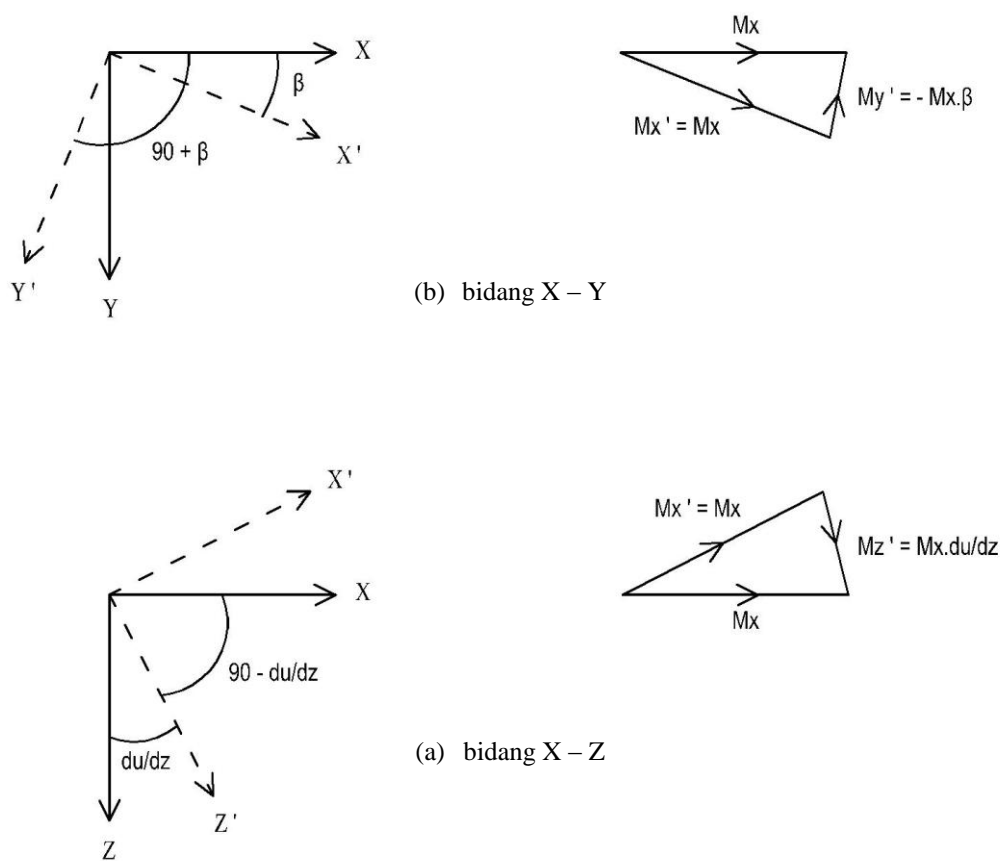
Pada gambar II.3(a) ditunjukkan bahwa sudut antara sumbu X dan X' adalah sebesar β , dan sudut antara sumbu Y' dan X adalah sebesar $(90 + \beta)$. Dari hubungan tersebut dapat ditentukan besarnya $M_{x'}$ dan $M_{y'}$ dalam M_x dengan menggunakan hubungan vektor seperti terlihat dalam gambar. Oleh karena itu, besarnya $M_{x'}$, $M_{y'}$ dan $M_{z'}$ adalah :

$$M_{x'} = M_x \cdot \cos\beta = M_x \quad (\text{II.6})$$

$$M_{y'} = M_x \cdot \cos(90 + \beta) = -M_x \cdot \sin\beta = -M_x \cdot \beta \quad (\text{II.7})$$

$$M_{z'} = M_x \cdot \cos\left(90 - \frac{du}{dz}\right) = M_x \cdot \sin\left(\frac{du}{dz}\right) = M_x \cdot \frac{du}{dz} \quad (\text{II.8})$$

Untuk $\beta = 0$ pada kedua ujung balok menyebabkan $M_{y'} = 0$ dan $\frac{d^2u}{dz^2} = 0$.



Gambar II.3. Komponen M_x dalam arah sumbu X' , Y' , Z'

Dengan memasukkan persamaan (II.6), (II.7) dan (II.8) ke dalam persamaan (II.3), (II.4) dan (II.5), maka didapatkan persamaan baru :

$$EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} + Mx = 0 \tag{II.9}$$

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + Mx \cdot \beta = 0 \tag{II.10}$$

$$GI_z \frac{d\beta}{dz} - Mx \cdot \frac{du}{dz} = 0 \tag{II.11}$$

Persamaan (II.9) dapat dipecahkan secara terpisah, sedangkan persamaan (II.10) dan (II.11) merupakan persamaan yang saling bergantung sehingga harus diselesaikan secara simultan. Dengan menurunkan persamaan (II.11) sekali terhadap z , maka persamaan (II.11) mempunyai suku $\frac{d^2 u}{dz^2}$. Kemudian suku tersebut disubstitusikan ke persamaan (II.10) sehingga didapat :

$$GI_z \frac{d^2\beta}{dz^2} + \frac{M_x^2}{EI_y} \beta = 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + k^2 \beta = 0 \quad (\text{II.12})$$

dengan $k^2 = \frac{M_x^2}{EI_y GI_z}$;

Solusi untuk persamaan II.12) adalah :

$$\beta = A. \sin(kz) + B. \cos(kz) \quad (\text{II.13})$$

Dengan memasukkan kondisi batas $\beta = 0$ untuk $z = 0$ maka didapatkan :

$$B = 0$$

dan untuk $z = l$, maka didapatkan persamaan berikut :

$$A. \sin(kl) = 0 \quad (\text{II.14})$$

Untuk menyelesaikan kasus yang dimodelkan di awal, maka :

$$\begin{aligned} \sin(kl) &= 0 \\ kl &= \pi \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

dengan mensubstitusikan nilai k ke persamaan (II.15) maka didapat :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GI_z} \quad (\text{II.16})$$

Persamaan (II.16) di atas merupakan persamaan momen kritis M_x untuk balok ditumpu secara sederhana. Persamaan tersebut berlaku untuk elemen yang memikul beban lentur murni (A. Chajes, 1970, George J. Simitses, 2006).

II.2. Analisis Numerik

Tidak semua permasalahan dalam perhitungan matematis dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan eksak. Sebagai contoh perhitungan momen kritis balok yang ditunjukkan pada persamaan II.16. Persamaan tersebut hanya dapat digunakan untuk balok sederhana pada gambar II.1a dengan momen konstan. Namun, pada kenyataannya kasus teknis yang dihadapi tidaklah sesederhana model tersebut. Sebagai contoh, balok yang diasumsikan sebagai dinding geser tersebut diberi pegas spiral yang digunakan untuk mengasumsikan pelat lantai. Untuk balok dengan momen tidak konstan atau balok dengan *cross beam*, momen kritis tidak dapat dipecahkan secara eksak, harus pendekatan numerik. Banyak analisis dengan metode numerik diantaranya FEM, FDM dan cara – cara lainnya. Namun pada tugas akhir ini akan digunakan metode segmentasi bidang konstan. Analisis numerik perlu divalidasi dengan hasil yang sudah pasti kebenarannya.

Meskipun demikian, solusi untuk kasus tersebut tetap dapat ditentukan berdasarkan metode numerik. Metode ini digunakan untuk melakukan perhitungan pendekatan sehingga diharapkan akan memberikan nilai yang mendekati nilai eksak sebagai solusi. Nilai hasil pendekatan yang didapatkan dapat dikontrol sesuai dengan ketelitian perhitunganyang diinginkan. Dengan cara ini pengguna yakin dengan keakuratan perhitungan dengan metode ini. Pada penelitian ini metode numerik digunakan untuk melakukan perhitungan secara teliti pada perhitungan momen kritis dengan interval yang diperhalus sehingga nilai yang didapatkan cukup mewakili hasil eksak yang didapatkan.

II.3. Determinan Matriks Momen Kritis

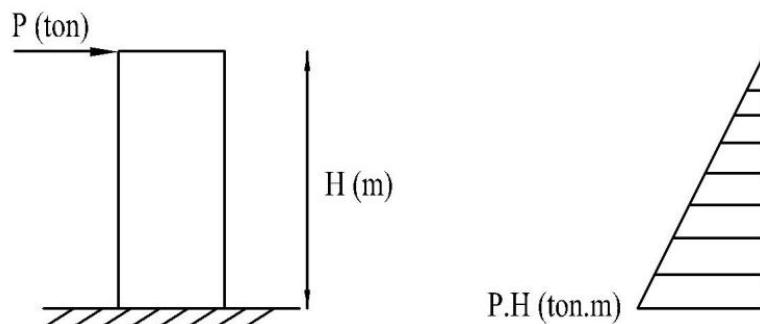
Analisis momen kritis balok dengan tambahan pegas spiral tidak dapat dilakukan dengan cara yang sederhana seperti pada persamaan (II.16). Untuk menyelesaikan persamaan momen kritis, maka nilai – nilai batas pada balok disusun ke dalam bentuk matriks. Koefisien persamaan homogen yang didapat dari kondisi batas berupa fungsi sinus dan cossinus yang beragam. Untuk mendapatkan *eigen value* dari determinan ini hanya ada satu cara, yakni dengan coba – coba sedemikian sehingga didapat suatu harga yang memenuhi determinan mendekati harga nol. Dengan inkrementasi yang kecil dan dengan control nilai determinan berubah tanda, maka pada suatu saat akan dicapai nilai coba yang memberikan determinan mendekati 0 (Sri Tudjono, 2005; George J. Simitzes, 2006).

Perhitungan determinan momen kritis dilakukan dengan menggunakan teori eliminasi Gauss dengan menempatkan elemen terbesar matriks pada diagonal utama (F. Arbabi, 1991). Prosedur untuk menghitung determinan matriks ditunjukkan oleh langkah sebagai berikut :

1. Mengambil nilai awal determinan sebesar 1.
2. Mencari elemen maksimum dalam matriks momen kritis.
3. Menyimpan identitas baris dan kolom elemen maksimum.
4. Menukar elemen – elemen pada baris dan kolom elemen maksimum dengan elemen – elemen pada baris dan kolom diagonal utama.
5. Untuk setiap penukaran baik baris maupun kolom, nilai determinan dikalikan dengan -1.
6. Melakukan faktorisasi elemen – elemen dalam baris diagonal utama.
7. Untuk setiap faktorisasi elemen baris, nilai determinan dikalikan dengan faktor elemen.
8. Melakukan eliminasi baris selain diagonal utama.
9. Nilai determinan akhir merupakan perkalian nilai determinan sebelumnya dengan elemen matriks diagonal utama bawah (ujung bawah).

II.4. Segmentasi Bidang Momen Konstan

Ditinjau sebuah dinding geser sederhana seperti diperlihatkan pada gambar II.4. Bidang momen yang terjadi akibat beban terpusat P merupakan momen tidak konstan. Persamaan momen kritis eksak (II.16) tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus bidang momen tidak konstan.

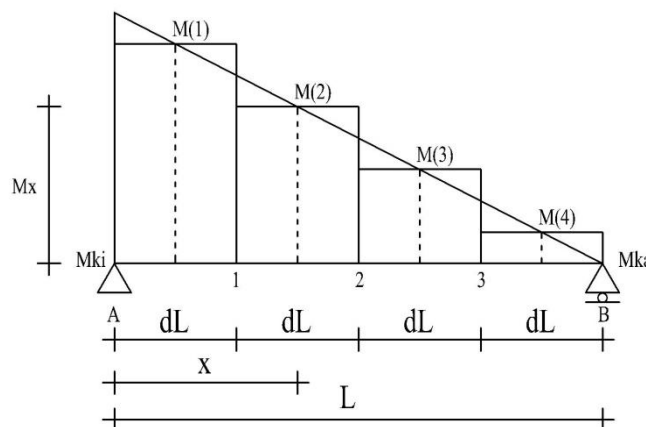


Gambar II.4. Bidang momen tidak konstan pada dinding geser

Dalam penelitian ini diusulkan pendekatan lain, yaitu balok dipandang terdiri dari banyak segmen yang masing – masing panjangnya adalah dL yang harganya kecil berhingga. Karena panjang segmen sangat kecil maka Mx segmen dapat didekati oleh momen konstan sebesar harga Mx di tengah segmen (Sri Tudjono, 2005). Dengan demikian masing – masing segmen mempunyai persamaan differensial (II.16) dengan Mx yang konstan. Solusi eksak masing – masing segmen dapat ditentukan dan masing – masing segmen mempunyai 2 konstanta integrasi. Kalau banyak segmen n maka akan didapat $2n$ konstanta integrasi. Pada titik i pertemuan segmen mempunyai 2 kondisi batas :

$$\begin{aligned}\beta_{ki i} &= \beta_{ka i} \\ \beta'_{ki i} &= \beta'_{ka i}\end{aligned}\quad (\text{II.17})$$

Dan pada setiap perletakkan atau ujung terdapa 1 kondisi batas sehingga keseluruhan kondisi batas = $2 (n - 1) + 1 + 1 = 2n$. Dari $2n$ kondisi batas akan tersusun $2n$ persamaan homogeny dengan $2n$ konstanta integrasi sebagai variabel. Koefisien sistem persamaan homogeny mengandung variabel momen. Sehingga supaya ada harga konstanta integrasi maka determinan koefisien persamaan harus sama dengan 0. Dari determinan 0 akan didapat momen kritis tekuk torsi.



Gambar II.5. Segmentasi bidang momen tidak konstan

Momen tengah untuk setiap segmen dihitung dengan cara :

$$Mx = \frac{x}{L} \cdot (Mki - Mka) \quad (\text{II.17})$$