PROSIDING SEMINAR NASIONAL STATISTIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO 2011
ISBN: 978-979-097-142-4

PERBANDINGAN KINERJA DIAGRAM KONTROL MULTIVARIAT UNTUK VARIABILITAS BERDASARKAN MATRIKS KOVARIANSI DAN MATRIKS KORELASI

Dwi Yuli Rakhmawati[1], Muhammad Mashuri[2]

[1,2)]Institut Teknologi Sepuluh Nopember

[1]dwiyuli_rakhmawati@yahoo.com, [2]m_mashuri@statistika.its.ac.id

Abstrak

Dalam beberapa proses seringkali perlu untuk memonitor dua atau lebih karakteristik kualitas secara bersama-sama. Untuk itu dikembangkan diagram kontrol yang mempertimbangkan beberapa karakteristik kualitas secara bersama-sama yang disebut dengan pengontrolan kualitas multivariat. Saat ini telah banyak dikembangkan diagram kontrol multivariat yang digunakan dalam pengontrolan variabilitas proses, antara lain diagram kontrol multivariat yang didasarkan pada matriks kovariansi (Alt dan Smith, 1988) dan diagram kontrol multivariat yang didasarkan pada matriks korelasi (Sindelar, 2007). Sejauh ini belum pernah dibandingkan kinerja dari diagram kontrol yang berbasis pada matriks kovariansi dan matriks korelasi. Dalam makalah ini akan dibandingkan kinerja dari diagram kontrol multivariat berdasarkan matriks kovariansi dan diagram kontrol multivariat berdasarkan matriks korelasi dengan menggunakan *Average Run Length* (ARL). Berdasarkan hasil simulasi ditunjukkan bahwa secara umum diagram kontrol multivariat berdasarkan matriks korelasi lebih sensitif terhadap adanya perubahan daripada diagram kontrol multivariat berdasarkan matriks kovariansi.

Kata Kunci : Matriks Korelasi, Matriks Kovariansi, *Average Run Length*

1. Pendahuluan

Kualitas menjadi faktor penting yang mendasari keputusan konsumen memilih suatu produk baik konsumen tersebut perorangan atau kelompok industri. Oleh karena itu kualitas merupakan faktor kunci bagi keberhasilan bisnis (Montgomery, 1996). Untuk menjaga kualitas produk diperlukan monitoring proses secara statistik yang dikenal dengan *Statistical Process Control* (SPC).

ISBN: 978-979-097-142-4

Statistical Process Control (SPC) yang banyak dikenal adalah diagram kontrol yang memberikan tampilan berbentuk grafik dari suatu proses produksi sehingga dapat diketahui apakah proses tersebut dalam keadaan terkontrol atau tidak. Apabila karakteristik kualitas yang dimonitor lebih dari satu maka untuk memonitor pergeseran variabilitas proses digunakan prosedur pengontrolan multivariat. Pada saat ini telah banyak dikembangkan beberapa metode untuk memonitor variabilitas proses multivariat. Diantaranya adalah penelitian oleh Alt (1985), Hayter dan Tsui (1994), Mason, Tracy dan Young (1995), dan Sindelar (2007).

Alt (1985) memperkenalkan pendekatan lain untuk diagram kontrol multivariat yang memonitor variabilitas berdasarkan matriks kovariansi (W_i) dimana statistik dari diagram kontrol tersebut merupakan pengembangan dari *likelihood ratio test*. Hayter dan Tsui (1994) mengembangkan diagram kontrol M yang mengkombinasikan variabilitas dengan *mean* untuk memonitor proses *mean*. Mason, Tracy dan Young (1995) menunjukkan bahwa dekomposisi nilai T^2 pada diagram kontrol multivariat ternyata mampu memberikan informasi mengenai variabel-variabel tertentu yang mempunyai kontribusi terhadap sinyal *out of control*. Sindelar (2007) memperkenalkan diagram kontrol dengan pendekatan yang menggunakan matriks korelasi. Penelitian tersebut mengembangkan komponen korelasi dari tiga statistik kovariansi ($|\mathbf{S}|$, W_i, dan G) Pertama, statistik uji $|\mathbf{S}|$ dimodifikasi menjadi statistik uji determinan R. Melalui analisis matematis serta simulasi diketahui bahwa batas kontrol untuk statistik uji ini begitu luas sehingga tidak mampu menunjukkan kondisi *out of control*. Kedua, diagram kontrol W_i yang dikembangkan oleh Alt (1985) dikembangkan menjadi diagram kontrol multivariat yang memonitor variabilitas berdasarkan matriks korelasi (W_{Ri}). Baik secara analisis matematis maupun geometris diketahui bahwa komponen korelasi dapat berbeda dengan komponen kovariansinya sehingga dapat dianalisis secara terpisah. Ketiga, statistik uji G, secara matematis statistik uji ini tidak mungkin untuk diaplikasikan pada matriks korelasi R karena bergantung pada *Mean Square Successive Differences* (MSSD) untuk mengevaluasi perubahan dalam kovariansinya yang tidak dapat dikembangkan untuk matrik korelasi.

Sejauh ini belum pernah dilakukan perbandingan kinerja diagram kontrol multivariat untuk memonitor variabilitas proses berdasarkan matriks kovariansi dengan

PROSIDING SEMINAR NASIONAL STATISTIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO 2011
ISBN: 978-979-097-142-4

matriks korelasi. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan diteliti kinerja dari diagram kontrol tersebut dengan menggunakan ARL untuk menindaklanjuti penelitian Sindelar pada kasus yang berkorelasi.

2. Diagram Kontrol W_i

Variabilitas proses multivariat dapat dinyatakan dalam bentuk matriks kovariansi **S** berukuran $p \times p$, dimana elemen diagonal utama merupakan nilai variabilitas dari masing-masing karakteristik kualitas dan elemen selain diagonal utama merupakan nilai kovariansi antar karakteristik kualitas. Terdapat dua komponen yang dapat digunakan untuk mengukur variabilitas total dari sekumpulan data multivariat. Komponen yang pertama adalah determinan matriks kovariansi ($|\mathbf{S}|$) yang biasa disebut dengan *generalized variance*. Operasi determinan dipilih karena pada operasi determinan selain melibatkan diagonal utama juga melibatkan elemen selain diagonal utama. Akar kuadrat dari komponen pertama ini proporsional dengan luasan atau volume yang dibangkitkan oleh data. komponen yang kedua adalah *trace* dari matriks kovariansi (tr(**S**)) yang merupakan jumlahan dari variabilitas masing-masing karakteristik kualitas.

Diagram kontrol ini dikembangkan oleh Alt pada tahun 1985 dengan mengasumsikan bahwa matriks kovariansi sebenarnya, $\mathbf{\Sigma}$, tidak diketahui (diestimasi dari sampel *in control* yang besar), perbandingan dibuat antara matriks kovariansi sampel dari proses dan matriks kovariansi yang tidak diketahui. Perbandingan tersebut adalah serangkaian uji signifikansi dalam bentuk sebagai berikut (Alt, 1985):

$$H_0 : \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_0$$

$$H_1 : \mathbf{\Sigma} \neq \mathbf{\Sigma}_0$$

Dimana $\mathbf{\Sigma}$ dan $\mathbf{\Sigma}_0$ adalah matriks kovariansi populasi dan matriks kovariansi *in control*. Statistik tersebut adalah rasio dari estimator maximum likelihood untuk distribusi N_p ($\vec{\mu}$, $\mathbf{\Sigma}$) dalam bentuk sebagai berikut:

$$\Omega = \{(\vec{\mu}, \mathbf{\Sigma}): -\infty < \vec{\mu} < \infty,\ \mathbf{\Sigma} \text{ adalah definit positif}\}$$

ISBN: 978-979-097-142-4

$\omega = \{(\vec{\mu}, \mathbf{\Sigma}): -\infty < \vec{\mu} < \infty,\ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_0\}$

Hal ini telah dijelaskan (Anderson, 1984) bahwa estimator maximum likelihood untuk kasus multivariat normal adalah sebagai berikut:

$$\hat{\vec{\mu}}_\Omega = \bar{\vec{x}} \qquad \hat{\mathbf{\Sigma}}_\Omega = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\mathbf{A}_\mathrm{i} \tag{1}$$

$$\hat{\vec{\mu}}_\omega = \bar{\vec{x}} \qquad \hat{\mathbf{\Sigma}}_\omega = \mathbf{\Sigma}_0 \tag{2}$$

Dimana $\bar{\vec{x}}$ adalah vektor *mean*, n adalah ukuran sampel, dan $\mathbf{A}_\mathrm{i} = (n-1)\mathbf{S}_\mathrm{i}$ sehingga fungsi likelihood berdasar pada distribusi normal multivariat adalah

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{2\pi}{n-1}\right)^{-pn/2} |\mathbf{A}_\mathrm{i}|^{-n/2} e^{-pn/2} \tag{3}$$

$$L(\hat{\omega}) = (2\pi)^{-pn/2}|\mathbf{\Sigma}_0|^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{i})} \tag{4}$$

Rasio likelihoodnya adalah sebagai berikut:

$$\Lambda(x) = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{pn/2} e^{pn/2}|\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{i}|^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{i})} \tag{5}$$

Rasio log likelihoodnya adalah sebagai berikut :

$$W_i = -2\ln(\Lambda) = -pn + pn\ln n - n\ln(|\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{i}|) + \mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{i}) \tag{6}$$

Statistik uji tersebut dihitung dan digambarkan untuk setiap sampel ke-i. Dimana i = 1,2, …, n, yang akan ditolak jika nilainya lebih dari $\chi^2_{(\alpha, p(p+1)/2)}$. Jika plot nilai W_i lebih dari *upper control limit* (UCL) $\chi^2_{(\alpha, p(p+1)/2)}$, maka proses dapat dikatakan tidak terkontrol.

3. Diagram Kontrol $\mathbf{W}_{\mathbf{Ri}}$

Untuk membuat diagram kontrol berdasarkan matriks korelasi diperlukan hubungan antara **R** dan **S** untuk membandingkan statistik yang ada untuk memonitor perubahan dalam matriks korelasi. Kovariansi sampel merupakan hubungan linier antara dua variabel yang ditunjukkan sebagai berikut :

ISBN: 978-979-097-142-4

$$s_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)\left(X_{kj}-\bar{X}_k\right) \tag{7}$$

Dimana X_i dan X_k adalah nilai dari dua variabel yang berukuran sama (n), dengan *mean* $\bar{X}_i$ dan $\bar{X}_k$. Koefisien korelasi sampel r_{ik}, merupakan standarisasi sampel kovariansi, dimana perkalian dari akar kuadrat dari sampel varian merupakan standarisasinya. Sehingga r_{ik} dapat dianggap sebagai sampel kovariansi (Johnson dan Wichern). Bentuk dari r_{ik} adalah seperti pada persamaan 8:

$$r_{ik} = \frac{s_{ik}}{\sqrt{s_{ii}}\sqrt{s_{kk}}} \tag{8}$$

Dimana i =1, 2, …, p dan k = 1, 2, …, p. Sampel kovariansi dari pengamatan yang distandarisasi adalah koefisien sampel korelasi. Karena korelasi adalah kasus khusus dari kovarian, statistik yang digunakan dalam SPC untuk memonitor kovariansi akan diaplikasikan untuk memonitor korelasi. Dengan begitu, batas kontrol untuk kasus berkorelasi secara umum akan sama dengan statistik untuk kovariansi.

Untuk melakukan estimasi statistik ini akan di uji hipotesis sebagai berikut :

$$\mathrm{H}_0: \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$$

$$\mathrm{H}_1: \boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}_0$$

Dimana $\boldsymbol{\rho}$ dan $\boldsymbol{\rho}_0$ adalah matriks korelasi populasi dan matriks korelasi *in control*. Statistik tersebut adalah rasio dari estimator maximum likelihood untuk distribusi $N_p(\vec{\mu}, \boldsymbol{\rho})$ dalam bentuk sebagai berikut:

$$\Omega = \{(\vec{\mu}, \boldsymbol{\rho}): -\infty < \vec{\mu} < \infty,\ \boldsymbol{\rho} \text{ adalah definit positif}\}$$

$$\omega = \{(\vec{\mu}, \boldsymbol{\rho}): -\infty < \vec{\mu} < \infty,\ \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0\}$$

Pertama mendapatkan rasio maximum likelihood untuk Ω dan ω baru berkenaan dengan korelasi. Jika kita lihat pada persamaan dari statistik W_i, kita akan dapati $|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{A}_\mathrm{i}|$ ekuivalen dengan $|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(n-1)\mathbf{S}_\mathrm{i}|$, atau $(n-1)^p|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}_\mathrm{i}|$. Untuk menyesuaikannya dengan matriks korelasi *in control* maka determinan matriks korelasi

ISBN: 978-979-097-142-4

sampel adalah $|\boldsymbol{\rho}_0^{-1}\mathbf{R}|$, dimana dibutuhkan asumsi bahwa faktor skala untuk kedua kasus adalah sama. Sehingga fungsi likelihood yang berdasarkan pada distribusi multivariat normal adalah sebagai berikut :

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{2\pi}{n-1}\right)^{-pn/2} |\mathbf{A}_{\mathrm{i}}|^{-n/2} e^{-pn/2} \tag{9}$$

$$L(\widehat{\omega}) = (2\pi)^{-pn/2} |\boldsymbol{\rho}_0|^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}_0^{-1}\mathbf{A}_{\mathrm{i}})} \tag{10}$$

Rasio likelihoodnya adalah sebagai berikut :

$$\Lambda(x) = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{pn/2} e^{pn/2} |\boldsymbol{\rho}_0^{-1}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}|^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}_0^{-1}\mathbf{A}_{\mathrm{i}})} \tag{11}$$

Rasio log likelihoodnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} W_{Ri} &= -2\ln(\Lambda) \\ &= -pn + pn\ln n - n\ln((n-1)^p |\boldsymbol{\rho}_0^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}|) + (n-1)\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}_0^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{i}}) \end{aligned} \tag{12}$$

4. *Average Run Length* (ARL)

Kriteria yang digunakan untuk dapat membandingkan kinerja diagram kontrol adalah dengan mengukur seberapa cepat diagram kontrol tersebut membangkitkan sinyal *out of control*. Diagram kontrol yang lebih cepat mendeteksi sinyal *out of control* disebut lebih sensistif terhadap perubahan proses. Salah satu cara untuk mengukur kinerja diagram kontrol adalah dengan menggunakan *Average Run Length* (ARL). ARL adalah rata-rata *run* (observasi) yang harus dilakukan sampai ditemukannya *out of control* yang pertama. Apabila proses dalam keadaan *in control* maka digunakan ARL_0. Dengan demikian ARL_0 akan bernilai besar sedangkan ARL_1 akan bernilai kecil apabila proses dalam keadaan *out of control*.

Dimisalkan β adalah probabilitas bahwa pergeseran proses tidak terdeteksi pada sampel pertama maka probabilitas bahwa pergeseran proses terdeteksi pada sampel pertama adalah 1-β. Dengan demikian, probabilitas bahwa pergeseran proses terdeteksi pada sampel ke-*x* adalah $\beta^{x-1}(1-\beta)$.

ISBN: 978-979-097-142-4

Jika X adalah variabel random yang menyatakan banyaknya sampel sampai ditemukannya *out of control* yang pertama, maka $P(X = x) = \beta^{x-1}(1-\beta)$, sehingga ekspektasi banyak sampel yang harus diamati sampai ditemukan *out of control* yang pertama adalah:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\beta^{x-1}(1-\beta)$$

$$= (1-\beta)\sum_{x=1}^{\infty} x\beta^{x-1} = (1-\beta)\frac{1}{(1-\beta)^2} = \frac{1}{(1-\beta)} \tag{13}$$

Oleh karena itu, ARL pada kondisi *out of control* adalah:

$$\text{ARL}_1 = \frac{1}{(1-\beta)} \text{ atau } \text{ARL}_1 = \frac{1}{\text{P}(\text{menolak } \text{H}_0 | \text{H}_1 \text{ benar})} \tag{14}$$

Sedangkan ARL pada kondisi *in control* adalah:

$$\text{ARL}_0 = \frac{1}{\alpha} \text{ atau } \text{ARL}_0 = \frac{1}{\text{P}(\text{menolak } \text{H}_0 | \text{H}_0 \text{ benar})} \tag{15}$$

Dalam konteks diagram kontrol W_i, β adalah probabilitas bahwa sinyal *out of control* untuk diagram kontrol W_i tidak terdeteksi pada sampel pertama maka probabilitas bahwa sinyal *out of control* untuk diagram kontrol W_i terdeteksi pada sampel pertama adalah 1- β.

$$\beta = \text{P}\{\text{W}_\text{i} \leq \text{UCL} | \text{W}_\text{i} > UCL\} \tag{16}$$

dimana UCL = $\chi^2_{(\alpha, p(p+1)/2)}$ Oleh karena itu, ARL untuk diagram kontrol W_i adalah :

$$\text{ARL} = \frac{1}{1-\beta}$$

$$= \frac{1}{1-\text{P}\{\text{W}_\text{i} \leq \text{UCL} | \text{W}_\text{i} > UCL\}} \tag{17}$$

Sedangkan untuk diagram kontrol W_{Ri}, β adalah probabilitas bahwa sinyal *out of control* untuk diagram kontrol W_{Ri} tidak terdeteksi pada sampel pertama maka probabilitas bahwa sinyal *out of control* untuk diagram kontrol W_{Ri} terdeteksi pada sampel pertama adalah 1- β.

$$\beta = \text{P}\{\text{W}_{\text{Ri}} \leq \text{UCL} | \text{W}_{\text{Ri}} > UCL\} \tag{18}$$

Oleh karena itu, ARL untuk diagram kontrol W_{Ri} adalah :

$$\text{ARL} = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-\text{P}\{\text{W}_{\text{Ri}} \leq \text{UCL} | \text{W}_{\text{Ri}} > UCL\}} \tag{19}$$

ISBN: 978-979-097-142-4

5. Pembahasan

Data matriks kovariansi dalam kondisi *in control* didapatkan dari proses produksi pita plastik di Sidoarjo. Proses pengambilan sampel dilakukan dengan mengambil secara acak 10 gulungan pita, selanjutnya pita tersebut diambil sepanjang 90 cm untuk setiap gulungan. Data yang digunakan adalah data pada bulan Juli dan Agustus 2007, dengan variabel yang diteliti adalah *denier* (berat pita), lebar pita, *strength* (kuat tarik pita), *tenacity* (kekuatan tarik pita per *denier*), dan *elongation* (kemuluran pita). Pengontrolan variabilitas proses terhadap karakteristik kualitas produksi pita *plastik* dilakukan dengan menggunakan diagram kontrol multivariat W_i dan W_{Ri}. Oleh karena belum tersedianya paket program untuk menunjang proses perhitungan, maka dibuat program diagram kontrol multivariat W_i dan W_{Ri} menggunakan *software* statistika.

Langkah-langkah analisis yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan melakukan simulasi dengan replikasi (r) sebanyak 100 kali, ukuran masing-masing subgroup (n) sebanyak 10, dan karakteristik kualitas (p) sebanyak 5. Replikasi dilakukan pada masing-masing perubahan variansi terhadap karakteristik kualitas untuk mendapatkan nilai ARL. Ada lima skenario yang akan digunakan pada makalah ini yaitu perubahan variansi pada variabel 1 (Skenario I), variabel 1 dan 2 (Skenario II), variabel 1, 2 dan 3 (Skenario III), variabel 1, 2, 3 dan 4 (Skenario IV), dan semua variabel (Skenario V). Nilai ARL yang didapatkan dari diagram kontrol W_i dan W_{Ri} dibandingkan untuk mengetahui diagram kontrol mana yang lebih sensitif dalam mendeteksi adanya *out of* control.

Tabel 1 menunjukkan nilai ARL_1 untuk melihat sensitivitas diagram kontrol pada masing-masing pergeseran variansi. Terlihat pada tabel tersebut menunjukkan bahwa nilai ARL_1 pada saat pergeseran varian untuk diagram kontrol W_i lebih besar dari diagram kontrol W_{Ri}. Hal ini menunjukkan bahwa diagram kontrol W_{Ri} hanya membutuhkan rata-rata 2 sampel untuk mendeteksi adanya *out of control*. Sedangkan diagram kontrol W_i membutuhkan rata-rata 4 sampel untuk mendeteksi adanya *out of*

ISBN: 978-979-097-142-4

control. Oleh sebab itu dapat disimpulkan bahwa diagram kontrol W_{Ri} sensitif terhadap deteksi adanya *out of control*.

Tabel 1. Nilai ARL_1 pada Skenario I dan II untuk n = 10

Varian	Skenario I		Skenario II	
	W_i	W_{Ri}	W_i	W_{Ri}
1.1	3.89	2.46	3.72	2.63
1.01	4.16	2.41	4.16	2.85
1.001	4.32	2.69	4.13	2.73
1.0001	4.47	2.58	4.34	2.95
0.1	3.33	2.51	4.27	2.49
0.01	4.59	2.81	4.43	3.13
0.001	4.6	2.81	3.86	2.35
0.0001	4.62	2.78	4.59	2.59

Tabel 2. Nilai ARL_1 pada Skenario III dan IV untuk n = 10

Varian	Skenario III		Skenario IV		Skenario V	
	W_i	W_{Ri}	W_i	W_{Ri}	W_i	W_{Ri}
1.1	4.36	11.23	4.35	12.94	4.64	11.96
1.01	5.15	13.51	3.94	12.72	3.68	11.25
1.001	3.97	12.34	4.85	13.69	4.34	12.94
1.0001	4.14	13.52	3.64	10.78	4.51	12.19
0.1	3.89	10.46	4.47	12.37	4.5	14.37
0.01	4.23	7.33	4.13	8.88	4.2	9.55
0.001	4.18	4.06	4.42	4.42	4.02	4.84
0.0001	4.12	3	4.46	2.84	4.17	2.82

ISBN: 978-979-097-142-4

Tabel 2 menunjukkan bahwa nilai ARL_1 pada saat pergeseran varian untuk Skenario III, IV, dan V pada diagram kontrol W_i relatif konstan, sedangkan pada diagram kontrol W_{Ri} nilai ARL_1 cenderung turun. Hal ini menunjukkan bahwa semakin banyak karakteristik kualitas yang mengalami perubahan varians pada diagram kontrol W_{Ri} maka nilai ARL_1 akan semakin besar namun hal ini tidak berlaku pada diagram kontrol W_i yang memiliki nilai ARL_1 cenderung konstan.

6. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah bahwa secara umum diagram kontrol W_{Ri} lebih sensitif dibandingkan dengan diagram kontrol W_i khususnya untuk kasus yang berkorelasi. Pada diagram kontrol W_{Ri} semakin kecil nilai korelasi maka deteksi terhadap sinyal *out of control* membutuhkan waktu yang lama. Pada diagram kontrol W_i, nilai ARL cenderung konstan terhadap pergeseran variansi.

Daftar Pustaka

Alt, F.B. (1985), Multivariate Quality Control. In: Kotz, S, Johnson, N. eds. *Encyclopedia of Statistical Sciences*. 6. New York, N. Y.: John Wiley & Sons, hal. 110-122.

Anderson, T. W. (1971), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Hayter, A. dan Tsui, K. (1994), "Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No 3, hal. 197-208.

Johnson, R,. dan Wichern, D., (1988), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 2nd edition, Prentice-Hall.

Montgomery, D. C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*. 5th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

ISBN: 978-979-097-142-4

Petros, M. (2003). *An Investigation of Some Characteristics of Univariate and Multivariate Control Chart,* Department of Statistics, Athens University of Economics and Business.

Sindelar, M.F. (2007), *Multivariate Statistical Process Control For Corellation Matrices*, Tesis Ph.D, University of Pittsburgh, Pittsburgh.