PENYELESAIAN SISTEM DUA SISI DALAM ALJABAR MAX-PLUS

[1]Ratna Novitasari, [2]Subiono
[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
[2] Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember
e-mail : [1] r4tn4nop@yahoo.com, [2] subiono2003@telkom.net

Abstrak. Dalam penelitian ini, sistem $A \otimes x = B \otimes y$ akan diselesaikan dengan menggunakan iterasi. Adapun metode yang digunakan adalah metode alternatif. Selanjutnya, metode alternatif ini digunakan untuk menyelesaikan sistem dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$. Kemudian diberikan sistem dua sisi dengan syarat khusus, yaitu $C \otimes y = D \otimes y$, dengan $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$ yang akan diselesaikan dengan menggunakan iterasi.
Keywords: *Aljabar max-plus, sistem dua sisi.*

1. Pendahuluan

Banyak penelitian yang telah membahas mengenai penyelesaian sistem dua sisi, antara lain *Stepping Stone Method* (Butkovic, 2006), Metode Alternatif (Cunninghame-Green, 2003) dan yang membandingkan kedua metode tersebut (Aminu, 2008). Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai masalah penyelesaian dari sistem $A \otimes x = B \otimes y$, sistem dua sisi secara umum $A \otimes x = B \otimes x$ dan sistem dua sisi dengan syarat khusus $C \otimes y = D \otimes y$, dengan $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$, menggunakan iterasi. Untuk menentukan nilai komputasi digunakan toolbox Aljabar Max-Plus dengan program Scilab–4.1.2.

2. Aljabar Max-Plus

Didefinisikan $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} -\infty$ dan $e \overset{\text{def}}{=} 0$. Himpunan $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil.

Definisi dari struktur Aljabar dari $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ dijelaskan dalam definisi berikut ini:

Definisi 1 Struktur aljabar $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ (Bacelli dkk., 1992, hal. 102)

Simbol $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ menyatakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan dua operasi biner yaitu maksimum yang dinotasikan $\oplus$ dan penjumlahan yang dinotasikan $\otimes$. □

Untuk setiap a, b $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah $a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \text{maks}(a,b)$ dan $a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b$. Sehingga untuk setiap a $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ dan ε, didapatkan $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ dan $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Himpunan $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar Max-Plus dan dinyatakan dengan R = ($\mathbb{R}_{\text{maks}}$, $\oplus$, $\otimes$, ε, e).

Himpunan matriks di dalam Aljabar Max-Plus dinyatakan dengan $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$, dimana n, m $\in$ $\mathbb{N}$. Didefinisikan $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Elemen dari matriks A $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$ pada baris ke i dan kolom ke j dinyatakan dengan a_{ij} atau $[A]_{ij}$, untuk $i \in \underline{n}$ dan js$\in \underline{m}$.

Matriks A sebagaimana biasa dapat ditulis dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

Operasi penjumlahan matriks A, B $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$, dinotasikan dengan $A \oplus B$, didefinisikan $[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \text{maks}(a_{ij}, b_{ij})$, dimana $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Adapun operasi perkalian A $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$ dengan skalar α $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}$, didefinisikan oleh $\alpha \otimes A = [\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$, dengan $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Tranpose dari matriks A $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$ dinotasikan A^T, didefinisikan sebagai $[A^T]_{ij} = a_{ji}$, untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Adapun definisi *eigenvalue* dan *eigenvector* dalam Aljabar Max-Plus diberikan sebagai berikut:

Definisi 2 (Heidergott dkk., 2006)

Misalkan A $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times n}$ adalah matriks bujur sangkar. Jika $\lambda \in \mathbb{R}_{\text{maks}}$ adalah sebuah skalar dan v $\in$ $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n}$ adalah sebuah vektor yang memuat minimal satu elemen yang berhingga sehingga memenuhi $A \otimes v = \lambda \otimes v$, maka λ disebut *eigenvalue* dari matriks A dan v adalah *eigenvector* dari matriks A yang bersesuaian dengan *eigenvalue* λ. □

Untuk mendapatkan *eigenvalue* dan *eigenvector* dari suatu matriks dalam Aljabar Max-Plus digunakan algoritma maxalgol (Subiono, 2007).

3. Penyelesaian Sistem Dua Sisi

Persamaan linear $Ax = b$ dalam Aljabar Max-Plus ditulis $A \otimes x = b$. Matriks $A \in R_{\text{maks}}^{n \times m}$ dan $b \in R^n$. Karena $\otimes$ berarti maksimum, maka didapatkan $A \otimes x \leq b$, sehingga untuk setiap $i \in n$ dan ,$j \in m$ dalam aljabar biasa menjadi:

$a_{ij} + x_j \leq b_i$,

$\Leftrightarrow x_j \leq b_i - a_{ij}$,

$\Leftrightarrow x_j \leq \min\{b_i - a_{ij}, i \in \underline{n}\}$,

$\Leftrightarrow -x_j \geq \text{maks}\{-b_i + a_{ij}, i \in \underline{n}\}$,

$\Leftrightarrow -x_j \geq \text{maks}\{a_{ji} + (-b_i), i \in \underline{n}\}$,

$\Leftrightarrow -x = A^T \otimes (-b)$,

$\Leftrightarrow x = -(A^T \otimes (-b)).$ (1)

Pada sistem $A \otimes x = B \otimes y$, dengan matriks A dan B mempunyai baris atau kolom minimal terdiri dari satu elemen berhingga. Sistem $A \otimes x = B \otimes y$ ini akan diselesaikan menggunakan Persamaan (3.1) dengan cara iterasi.

Contoh 1.

Diberikan suatu persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ dan akan didapatkan penyelesaiannya.

Matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dengan $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dan

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Misalkan di ambil $x = x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 0, didapatkan $A \otimes x = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, dan $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ serta $B \otimes y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 1, diperoleh $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \otimes x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $B \otimes y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 2, diperoleh $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $A \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Karena $A \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $B \otimes y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, maka penyelesaian dari persamaan

$A \otimes x = B \otimes y$ adalah $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. •

Cunningham-Green(2003) mengenalkan suatu algoritma yang konvergen ke suatu penyelesaian yang berhingga dari sebarang titik awal berhingga. Metode ini dinamakan Metode Alternatif, dengan algoritmanya adalah sebagai berikut.

Algoritma 1. (Cunninghame-Green, 2003)

1. Pilih sebarang vektor x yang berhingga.
2. Tetapkan $r = 0$ dan $x(0) = x$.
3. Hitung $a = A \otimes x$.
4. Definisikan $y = -\left(B^T \otimes -a\right)$.
5. Hitung $b = B \otimes y$.
6. Hitung $x = -\left(A^T \otimes -b\right)$.
7. Tetapkan $r = r + 1$ dan ulangi hingga konvergen.

Bukti:

Diketahui bahwa $U \otimes \left(-\left(U^T \otimes W\right)\right) \leq W$. Maka

$$A \otimes x = A \otimes \left(-\left(A^T \otimes -(B \otimes y)\right)\right) \leq B \otimes y = B \otimes \left(-\left(B^T \otimes -(A \otimes x)\right)\right) \leq A \otimes x$$

Jadi, $A \otimes x = B \otimes y$.

Berikut ini diberikan contoh untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan dengan menggunakan metode alternatif di atas.

Contoh 2.

Diberikan $A \otimes x = B \otimes y$, dengan matriks A dan B seperti pada Contoh 1.

Jika diberikan $x = x(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ diperoleh $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ yang juga merupakan penyelesaian dari $A \otimes x = B \otimes y$ dengan $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan $x = x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ diperoleh $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ yang juga merupakan penyelesaian dari $A \otimes x = B \otimes y$, tetapi $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jadi, penyelesaian dari persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ tidak tunggal yaitu pasangan $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ atau kelipatan masing-masing. •

Pada sistem $A \otimes x = B \otimes y$, jika $x = y$ maka didapatkan $A \otimes x = B \otimes x$ yang merupakan sistem dua sisi. Dengan menggunakan metode alternatif, akan diselesaikan sistem dua sisi seperti pada contoh berikut ini.

Contoh 3.

Diberikan suatu Sistem $A \otimes x = B \otimes x$ dan akan didapatkan penyelesaiannya. Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -\infty \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ambil sebarang $x = x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Maka diperoleh $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan nilai awal $x = x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ diperoleh $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan nilai awal $x = x(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ diperoleh $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Jadi, penyelesaian dari persamaan $A \otimes x = B \otimes x$ adalah $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ atau kelipatannya. •

Berikut ini adalah sistem dua sisi dengan syarat khusus yaitu:

$C \otimes y = D \otimes y$, dengan $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$, (2)

dengan N menyatakan himpunan baris {1, 2, ..., n} dan M adalah himpunan kolom {1, 2, ..., m} dari matriks C dan D. Ukuran matriks C dan D ini haruslah sama.

Berikut ini akan diberikan suatu lemma yang menyatakan syarat bahwa sistem dua sisi tidak mempunyai penyelesaian.

Lemma 1. (Cechlarova, 2005)

Jika ada sebuah baris i sehingga $c_{ij} > d_{ij}$ untuk setiap j, maka sistem dua sisi tidak mempunyai penyelesaian.

Bukti:

Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi. Anggap bahwa sebuah vektor **y** adalah sebuah penyelesaian dari Sistem dua sisi (2) dan bahwa nilai maksimum pada ruas kiri adalah $c_{ij} + y_j = \underset{k}{\text{maks}}\{c_{ik} + y_k\}$. Dan nilai maksimum pada ruas kanan adalah $d_{il} + y_l = \underset{k}{\text{maks}}\{d_{ik} + y_k\}$.

Maka didapatkan $c_{ij} + y_j \geq c_{il} + y_l > d_{il} + y_l$.

Karena $c_{il} + y_l > d_{il} + y_l$, berarti bahwa **y** bukan merupakan penyelesaian dari Sistem dua sisi (2) sebab jika **y** merupakan penyelesaian seharusnya $c_{il} + y_l = d_{il} + y_l$.

Jadi, kontradiksi. Δ

Dari Lemma 1. di atas, memberikan akibat sebagai berikut:

Akibat 1. (Cechlarova, 2005)

Untuk tiap Sistem dua sisi (2) yang mempunyai penyelesaian, ada untuk tiap baris i suatu indeks j sehingga $c_{ij} = d_{ij}$.

Bukti:

Misalkan vektor **y** adalah penyelesaian dari Sistem dua sisi (2). Sehingga nilai maksimum pada ruas kiri adalah $c_{ij} + y_j = \underset{k}{\text{maks}}\{c_{ik} + y_k\}$.

Sedangkan nilai maksimum pada ruas kanan adalah $d_{il} + y_l = \underset{k}{\text{maks}}\{d_{ik} + y_k\}$.

Maka didapatkan $c_{ij} + y_j \geq d_{il} + y_l$. Hal ini berarti untuk tiap baris i ada $l = j$ sehingga $c_{ij} + y_j = d_{ij} + y_j$ dan didapatkan $c_{ij} = d_{ij}$. Δ

Pada sistem dua sisi $C \otimes x = D \otimes x$, $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$. Jika diberikan nilai awal x sebarang, maka didapatkan $D \otimes x = y$. Sehingga sistem berubah menjadi $C \otimes x = y$. Karena C dan y diketahui, maka $x = -(C^T \otimes -y)$ bisa diperoleh. Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga didapatkan nilai x yang memenuhi $C \otimes x = D \otimes x$.

Berikut ini akan diberikan contoh menyelesaikan sistem dua sisi $C \otimes x = D \otimes x$, dimana $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$.

Contoh 4.

Diberikan suatu sistem dua sisi $C \otimes x = D \otimes x$, dimana $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$ dengan matriks $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ dan matriks $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Didapatkan matriks $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ dan $D^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Misal di ambil $x = x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 0, maka diperoleh $y = D \otimes x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ sehingga didapatkan $C \otimes x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Akibatnya, diperoleh nilai $x = -\left(C^T \otimes -y\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 1, didapatkan nilai $y = D \otimes x = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ sehingga $C \otimes x = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$. Maka diperoleh nilai $x = -\left(C^T \otimes -y\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 2, diperoleh nilai $y = D \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ sehingga $C \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$. Akibatnya didapatkan nilai $x = -\left(C^T \otimes -y\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Untuk r = 3, didapatkan $y = D \otimes x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Maka penyelesaian dari sistem dua sisi $C \otimes x = D \otimes x$, dimana $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$ adalah $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. •

Berikut ini diberikan algoritma untuk menyelesaikan sistem dua sisi.

Algoritma 2.

1. Pilih sebarang vektor x yang berhingga.
2. Tetapkan $r = 0$ dan $x(0) = x$.
3. Hitung $b = B \otimes x$.
4. Definisikan $x = -\left(A^T \otimes -b\right)$.
5. Hitung $a = A \otimes x$.
6. Hitung $x = -\left(B^T \otimes -a\right)$.
7. Ulangi hingga memenuhi $A \otimes x = B \otimes x$.

Pembuktian Algoritma 2 sama dengan pembuktian Algoritma 1.

Berikut ini diberikan contoh untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan dengan menggunakan Algoritma 2 di atas.

Contoh 5.

Diberikan suatu sistem dua sisi $C \otimes x = D \otimes x$, dimana $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$ dengan matriks C dan D seperti pada Contoh 4.

Jika diberikan nilai awal $x = x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ maka diperoleh $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ yang merupakan kelipatan dari $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan nilai awal $x = x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka diperoleh $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ yang bukan merupakan kelipatan dari $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Jika diberikan nilai awal $x = x(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ maka diperoleh $x = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ yang bukan merupakan kelipatan dari $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ atau $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jadi, penyelesaian sistem dua sisi $C \otimes x = D \otimes x$, dimana $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$ adalah tidak tunggal yaitu $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ atau kelipatannya. •

4. Kesimpulan

Sistem dua sisi $A \otimes x = B \otimes x$ dapat diselesaikan dengan iterasi menggunakan metode alternatif. Sistem dua sisi dengan syarat khusus $C \otimes y = D \otimes y$, dengan $c_{ij} \geq d_{ij}$ untuk setiap $i \in N$ dan $j \in M$, dapat diselesaikan dengan menggunakan iterasi. Penyelesaian yang dihasilkan bisa tunggal atau tidak tunggal yang berupa kelipatannya.

5. Daftar Pustaka

Aminu, Abdulhadi, Butkovic,P., (2008), *Comparison of methods for solving two-sided systems in max-algebra*,

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. dan Quadrat, J.P. (1992), *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley & Sons, New York.

Butkovic, P., Zimmermann, K., (2006), *A strongly polynomial algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra*, Theoret.Comput. Sci., 154 hal. 437-446.

Cechlarova, K. (2005), "Eigenvectors of Interval Matrices over Max-Plus Algebra", *Journal of Discrete Applied Mathematics*, vol. 150, hal. 2–15.

Cunninghame-Green, R. A., Butkovic, P. (2003), "The Equation $A \otimes x = B \otimes y$ over(max, +)", *Journal of Theoretical Computer Science*, vol. 293, hal. 3 – 12.

Heidergott, B., Olsder, G.J. dan Woude, J. van der (2006), *Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, New Jersey.

Subiono (2007), *Max-plus Algebra Toolbox*, ver. 1.0, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.