Jurnal Sains & Matematika (JSM)
Volume 14, Nomor 1, Januari 2006

ISSN 0854 – 0675
Kajian Pustaka: 37 - 42

Struktur Tiga Soliton pada Persamaan Kadomtsev-Petviashvili

Agus Rusgiyono*, Sutimin*
* Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro

ABSTRACT --- The three solution of Kadomtsev-Petviashvili equation was obtained using Hirota's method. In the limiting cases $A_{ij} = 0 \quad ,1 \le i < j \le 3$, it's shown here that the three solitons solution reduce to four branch soliton. Among those solutions, it's found that there exist three solitons in which one of its individual solitons undergo no phase shift.

Keywords: Hirotas's method, solitons

PENDAHULUAN

Fenomena soliton dan persamaan dife-rensial parsial tak linier yang terintegral banyak dijumpai dalam bidang fisika dan matematika. Persamaan diferensial tak linier yang menjelaskan masalah soliton mempunyai sifat yang universal. Penyelesaiannya sangat rumit dan tidak bisa diintegralkan secara lang-sung.Fenomena interaksi tiga soliton ini dikembangkan dari interaksi dua soliton. Pola interaksi dua soliton telah diamati dan dipotret dan dikaji secara analitik geometri oleh Peterson. Selanjutnya kajian analitik juga telah dilakukan oleh Sutimin dkk, yang melihat perilaku interaksi disekitar puncak interaksi. Disini dikaji fenomena interaksi tiga soliton yang dimodelkan oleh persamaan KP.

Persamaan Kadomtsev- Petviashvili (KP-I,II) dapat dipandang sebagai generalisasi dimensi dua dari persamaan Kortewegde Vries (KDV) dan menggambarkan gelombang dimensi dua yang merambat pada arah X,dengan variasi yang lamban pada arah Y. Persamaan KP(I,II) ini telah disajikan oleh Kadomtsev dan Petviashvili untuk membahas stabilitas soliton dimensi satu pada suatu me-dia dengan dispersi lemah (weak dispersion)

Dalam diferensial parsial persamaan Kadomtsev - Petviashvili untuk tinggi gelom-bang $U = U(x,y,t)$ diberikan dengan

$$(U_t + 6UU_x + U_{xxx})_x + 3\varepsilon U_{yy} = 0$$

Dimana $\varepsilon = -1$, berkenaan dengan KP-I dan untuk $\varepsilon = 1$, berkenaan dengan KP-II. Solusi exact 3-soliton dari persamaan KP(I-II) diperoleh melalui metode Hirota. Solusi ini mempunyai bentuk fungsional yang sama sebagaimana pada persamaan KDV.

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan KP(I-II) , merupakan salah satu persamaan non linier yang mempunyai solusi soliton. Untuk solusi dua soliton dari persamaan KP telah diselesaikan oleh Edy Soewono dkk, menggunakan metode Hirota bilinier ([6]).

Metode transformasi scattering invers ditemukan 31 tahun yang lalu memberikan alat matematika , suatu dasar teori matematika dari fenomena soliton telah dinyatakan oleh Gar-ner, Green,Kruskal dan Miura pada paper tahun 1967 ([1]). Mereka menemukan solusi mengenai soliton masalah dari harga awal untuk persamaan Kortewegde Vries (KdV).

TIGA-SOLITON KP (I-II)

Solusi tiga soliton dari persamaan KP (I-II) akan diselesaikan melalui metode Hirota. Selanjutnya dari solusi yang diperoleh akan diselidiki bentuk asimtotik dan resonansi dari soliton-soliton tersebut.

Perhatikan persamaan KP (I-II) yang diberikan oleh

$$(U_t + 6UU_x + U_{xxx})_x + 3\varepsilon U_{yy} = 0$$

dimana $U = U(x,y,t)$ adalah fungsi riil scalar.

Untuk menyelesaikan persamaan ini , pertama didefinisikan fungsi

$U = 2(\ln f)_{xx}$

Dengan syarat batas untuk $|x| \to \infty$ berlaku $|U(x,y,t)| \to 0$ beserta turunan-turunannya . Melalui transformasi persamaan (2) ke persamaan (1) diperoleh

$$f(f_t + f_{xxx})_x - f_x(f_t + f_{xxx}) - 3(f_x f_{xxx} - f_{xx}^2) + 3\varepsilon(ff_{yy} - f_y^2) = 0 \qquad (3)$$

Persamaan (3) ini dikatakan persamaan Hirota KP(I-II).

Solusi eksak 3 soliton untuk fungsi f dari persamaan Hirota KP(I-II) diperoleh melalui metode Hirota D dengan

$$D_x^l D_y^m D_t^n a(x,y,t)b(x,y,t)$$

$$= \left(\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{\partial}{\partial x'}\right)^l \left(\tfrac{\partial}{\partial y} - \tfrac{\partial}{\partial y'}\right)^m \left(\tfrac{\partial}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial t'}\right)^n a(x,y,t)b(x,y,t)\Big|_{x=x',y=y',t=t'}$$

dimana $a(x,y,t)\ dan\ b(x,y,t)$ adalah fungsi bernilai riil. Dengan menggunakan operator ini diperoleh persamaan Hirota KP(I-II) dalam bentuk bilinier

$$\left(D_t D_x + D_x^4 + 3\varepsilon D_y^2\right) f.f = 0 \qquad (4)$$

Bentuk f dapat dinyatakan sebagai deret pangkat dalam parameter β , misalkan

$$f = 1 + \beta f_1 + \beta^2 f_2 + \beta^3 f_3 \qquad (5)$$

substitusikan (5) ke (4) dan menghimpun koefisien dari β dengan pangkat yang sama , diperoleh :

$$\left(D_t D_x + D_x^4 + 3\varepsilon D_y^2\right)\left(1 + \beta f_1 + \beta^2 f_2 + \beta^3 f_3\right)\left(1 + \beta f_1 + \beta^2 f_2 + \beta^3 f_3\right) = 0$$

dan

$$\left(D_t D_x + D_x^4 + 3\varepsilon D_y^2\right) f_1.f_1 = 0 \qquad (6)$$

$$2\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\varepsilon \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f_2 = -\left(D_t D_x + D_x^4 + 3\varepsilon D_y^2\right) f_1.f_1 \qquad (7)$$

$$2\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\varepsilon \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f_3 = -\left(D_t D_x + D_x^4 + 3\varepsilon D_y^2\right)\left(f_2.f_1 + f_1 f_2\right) \qquad (8)$$

Solusi tiga soliton dari persamaan KP(I-II) dilakukan dengan memisalkan

$$f_1 = \sum_{i=1}^{3} e^{2\phi_1}$$

dimana $\phi_1 = \mu_i(x + \rho_i y - c_i t)\ dan \quad c_i = 4\mu_i^2 + 3\rho_i^2, i = 1,2,3$

Kita substitusikan $f_1 = \sum_{i=1}^{3} e^{2\phi_1}$ ke persamaan (7)

$$2\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\varepsilon \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f_2 = -2 \sum_{1\le i\le j\le 3}\left(D_t D_x + D_x^4 + 3\varepsilon D_y^2\right) e^{2\phi_1} e^{2\phi_j}$$

$$= -2 \sum_{1\le i\le j\le 3} \frac{(-\mu_i c_i + \mu_j c_j)(\mu_i - \mu_j) + 4(\mu_i - \mu_j)^4 + 3\varepsilon(\mu_i\rho_i - \mu_j\rho_j)^2}{(\mu_i c_i + \mu_j c_j)(\mu_i + \mu_j) + 4(\mu_i + \mu_j)^4 + 3\varepsilon(\mu_i\rho_i + \mu_j\rho_j)^2}$$

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 3\varepsilon \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) e^{2\phi_1 + 2\phi_j} \qquad (9)$$

sehingga diperoleh

$$f_2 = \sum_{1\le i\le j\le 3} \frac{4(\mu_1-\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1-\rho_2)^2}{4(\mu_1+\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1+\rho_2)^2}\, e^{2\phi_1+2\phi_j}$$

dan selanjutnya substitusikan (10) ke persamaan (8) diperoleh

$$f_3 = \sum_{1\le i\le j\le 3} A_{ij} A_{jk} A_{ik}\ e^{2\phi_1+2\phi_j+2\phi_k}$$

dimana

$$A_{ij} = \frac{4(\mu_1-\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1-\rho_2)^2}{4(\mu_1+\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1+\rho_2)^2}\quad ,1\le i\le j\le 3$$

sehingga diperoleh solusi tiga soliton yang dapat dinyatakan sebagai

$$f = 1+\sum_{i=1}^{N} e^{2\phi_i} + \sum_{1\le i\le j\le N} A_{ij} e^{2\phi_i+2\phi_j} + \sum_{1\le i\le j<k\le 3} A_{ij} A_{jk} A_{ki}\ e^{2\phi_i+2\phi_j+2\phi_k}\ ,\quad A_{ij} > 0$$

$1 < i < j < 3$

dimana

$$A_{ij} = \frac{4(\mu_1-\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1-\rho_2)^2}{4(\mu_1+\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1+\rho_2)^2}\quad ,1\le i\le j\le 3$$

$\phi_i = \mu_i(x+\rho_i y - c_i t)\ dan\ \ c_i = 4\mu_i^2 + 3\rho_i^2, i = 1,2,3$ dan

$$A_{ij} = \frac{4(\mu_1-\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1-\rho_2)^2}{4(\mu_1+\mu_2)^2-\varepsilon(\rho_1+\rho_2)^2}$$

Solusi tiga soliton persamaan KP(I-II) adalah $U = 2\frac{\partial}{\partial x^2}\ln f$

Dengan f dinyatakan pada persamaan (11)

Selanjutnya untuk menentukan perubahan fase dari masing-masingsoliton, perlu diselidiki bentuk asimtotik dari solusi tiga soliton dalam pelimitan $y \to \pm\infty$, dengan memperhati-kanparameter waktu t tetap. Untuk ini kita menyelidiki solusi melalui koordinat bergerak dengan kecepatan konstan c_n , $1 \le n \le 3$ atau dengan memandang $\phi_n = kons\tan$.

Untuk $y \to -\infty$, sepanjang $\phi_1 = kons\tan$

Tanpa mengurangi keumuman asumsikan ϕ_2 , $\phi_3 \to -\infty$, sehingga

$f \to 1+e^{1\phi_1}$ dan

$U \to 2\mu_1^2 \sec h^2(\mu_1(x+\rho_1 y - c_1 t))$, yaitu solusi soliton pertama yang tidak mengalami perubahan fase.

sepanjang $\phi_2 = kons\tan$

untuk $\phi_1 \to \infty$, $\phi_3 \to -\infty$ fungsi f dapat dituliskan kembali menjadi

$$f = e^{2\phi_1}\left[e^{-2\phi_1} + 1 + e^{2\phi_2-2\phi_1} + e^{2\phi_3-2\phi_2} + A_{23}e^{2\phi_2+2\phi_3-2\phi_1} + A_{13}e^{2\phi_3} + A_{12}e^{2\phi_2} + A_{123}e^{2\phi_2+2\phi_3}\right]$$ maka

$U \to 2\mu_1^2 \sec h^2(\phi_2 + \frac{1}{2}\ln(A_{12}))$, yaitu solusi soliton kedua dimana fase berubah dengan factor $\frac{1}{2}\ln(A_{12})$.

Sepanjang $\phi_3 = kons\tan$

Untuk ϕ_1 , $\phi_2 \to \infty$ fungsi f dapat ditulis

$$f = e^{2\phi_1+2\phi_2}\left[e^{-2\phi_1+2\phi_2} + e^{-2\phi_2} + e^{-2\phi_1} + e^{2\phi_3-2\phi_1-2\phi_2} + A_{12} + A_{13}e^{2\phi_3-2\phi_2} + A_{23}e^{2\phi_3-2\phi_1} + A_{123}e^{2\phi_3}\right] \text{maka}$$

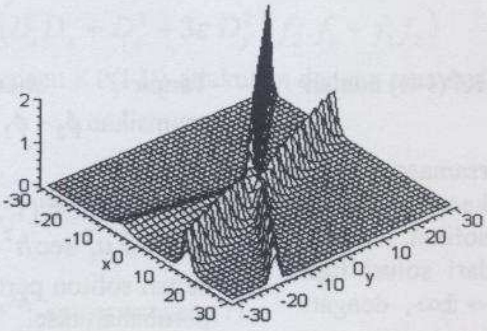
$U \to 2\mu_3^2 \sec h(\phi_3 + \frac{1}{2}\ln(A_{23}A_{13}))$, yaitu solusi soliton ketiga dimana fase berubah dengan factor $\frac{1}{2}\ln(A_{23}A_{13})$. Bentuk asimtotik untuk $y \to \infty$ dilakukan dengan cara yang sama . Sehingga diperoleh bentuk asimtotik solusi tiga soliton adalah sebagai berikut

$$U = 2\mu_1^2 \sec h^2(\phi_1) + 2\mu_2^2 \sec h^2(\phi_2 + \tfrac{1}{2}\ln(A_{12})) + 2\mu_3^2 \sec h^2(\phi_3 + \tfrac{1}{2}\ln(A_{23}A_{13})),$$
$$y \to \infty$$
$$U = 2\mu_1^2 \sec h^2(\phi_1 + \tfrac{1}{2}\ln(A_{12}A_{13})) + 2\mu_2^2 \sec h^2(\phi_2 + \tfrac{1}{2}\ln(A_{23})) + 2\mu_3^2 \sec h^2(\phi_3),$$
$$y \to \infty$$
$$\ldots\ldots \qquad (12)$$

Dari bentuk asimtotik solusi tiga soliton pada persamaan (13) dapat dinyatakan besarnya perubahan fase untuk soliton ke-i , i=1,2,3 katakanlah Δ_i. Perubahan fase soliton ke-i , i= 1,2,3 yang diakibatkan setelah tumbukan dengan dua soliton yang lain diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\tfrac{1}{2}[\ln(A_{12}) + \ln(A_{13})]\\ \Delta_2 &= -\tfrac{1}{2}[\ln(A_{12}) + \ln(A_{23})] \qquad (14)\\ \Delta_3 &= -\tfrac{1}{2}[\ln(A_{23}) + \ln(A_{13})]\end{aligned}$$

Pada solusi tiga soliton, soliton kedua berjalan tidak berubah fase setelah tumbukan fase jika dan hanya jika $A_{12} = A_{23}$



Gambar 1: Gambar solusi tiga soliton dari persamaan KP.

Gambar solusi tiga soliton dari persamaan KP. dengan mengambil

$$\mu_1 = 0.7\,,\ \mu_2 = 0.65622\,,\ \mu_3 = 0.6$$
$$\rho_1 = 0.1\,,\ \rho_2 = 0.7\,,\ \rho_3 = 1.25$$

Aspek lain dari soliton adalah resonansi soliton dimana dua soliton terhadap kondisi tertentu beresonansi menghasilkan soliton yang baru . Kondisi resonansi soliton dan soliton virtual untuk solusi dua soliton dari persamaan KP(I-II) telah ditunjukkan oleh E.Cahyono dkk.([3]).

Kita definisikan besaran A_{ij}

dengan $A_{ij} = \frac{1}{2}\ln(A_{ij})$, $A_{ij} > 0$, $i < j$, $i, j = 1,2,3$ (15)

selanjutnya jika $A_{ij} \to 0$, dengan $i, j = 1,2,3$ ini berarti $|A_{ij}| \to \infty$, maka panjang soliton virtual menjadi tak hingga. Ini dapat itunjukkan sebagai suatu soliton yang lain. Hal ini dapat dipikirkan sebagai resonansi soliton antara soliton ke -i dan soliton ke –j . Resonansi soliton ini dapat dinyatakan sebagai suatu soliton yang nyata bila soliton virtual ini diubah menjadi suatu soliton yang nyata. Untuk itu pada soliton virtual ini harus memenuhi kondisi dispersi

$$D(\mu_j - \mu_k, \mu_j\rho_j - \mu_k\rho_k, \mu_j c_j + \mu_k c_k) = 0$$

Hal ini dinyatakan dalam proporsi berikut.

Proposisi 2.1.

Jika $A_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le 3$ maka terdapat 4 cabang arah fase yang tidak hilang, yaitu sepanjang $\phi_i = konstan$, dengan $1 \le i \le 3$ pada setengah bidang atas dan sepanjang $\phi_i - \phi_k = konstan$, $j < k$, $j,k = 1,2,3$ pada setengah bidang bawah dari bidang XY.

Bukti :
Untuk $y \to \infty$
Sepanjang $\phi_i = konstan$, dengan $1 \le i \le 3$
Untuk $\phi_j \to \infty$, dengan $i \ne j$
Maka $U \to 2\mu_1^2 \operatorname{sec}h^2(\phi_i)$ yaitu merupakan soliton ke-1, $1 \le i \le 3$.
Untuk $y \to -\infty$
sepanjang $\phi_i - \phi_k = konstan$

Untuk $\phi_j, \phi_k \to \infty$ dan $\phi_i \to -\infty, i \ne j \ne k$

Maka

$f \to 1 + e^{2\phi_j - 2\phi_k}$ sehingga $U \to 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(1 + e^{2\phi_j - 2\phi_k})$

yaitu merupakan soliton yang lain dengan arah fase $\phi_j - \phi_k$.
Andaikan ada arah lain , misalkan $\Phi = \phi_j + \alpha\phi_k = konstan$, $j \ne k$, $j,k = 1,2,3$
Pada setengah bidang bawah dari bidang XY yaitu untuk arah y negatif dengan $\alpha \ne -1$.

1. Jika $\phi_k \to \infty$, $\phi_i \to -\infty$, $i \ne k$ bentuk f dapat ditulis kembali

$$f = e^{2\phi_k}[e^{2\phi_k} + \sum_{1 \le i \le 3, i \ne j} e^{2\phi_i - 2\phi_k} + e^{2\phi_{ji} - 2\phi_k} + 1]$$

maka $f \to 1$ sehingga $U \to 0$, $\forall \alpha \ne -1$ kontradiksi dengan asumsi bahwa Φ arah fase yang tidak hilang.

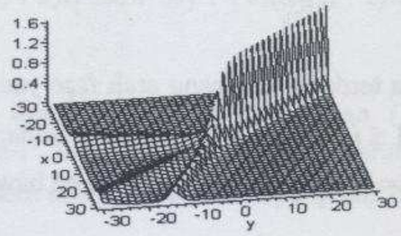
2. $\phi_j \to \infty$, dengan $1 \le i \le 3$ bentuk f dapat ditulis kembali

$$f = e^{\sum_{1\le i\le 3} 2\phi_k}\,[e^{-\sum_{1\le i\le 3} 2\phi_k} + \sum_{1\le j\le 3} e^{2\phi_i - \sum_{1\le i\le 3} 2\phi_k} + 1]$$

maka $f \to 1$. Sehingga $U \to 0$, $\forall \alpha \neq -1$, kontradiksi dengan asumsi bahwa Φ arah fase yang tidak hilang.

$\phi_i \to -\infty$ dilakukan dengan cara yang sama .

Karena solusi $U^{(j-k)} \to 2(\mu_j - \mu_k)^2 \sec h^2(\phi_i - \phi_k)$ memenuhi relasi dispersi $D(\mu_j - \mu_k, \mu_j\rho_j - \mu_k\rho_k, -\mu_j c_j + \mu_k c_k) = 0$ yaitu $4(\mu_j - \mu_k)^2 - \varepsilon(\rho_j - \rho_k)^2 = 0$ maka dikatakan solusi soliton tersebut merupakan soliton yang nyata.



Gambar 2 . Solusi tiga soliton dengan 4 cabang arah fase yang tidak hilang, untuk $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.695$, $\mu_3 = 0.25$, $\rho_1 = -0.5$, $\rho_2 = 0.11$, $\rho_3 = 1$

KESIMPULAN

Sebagaimana umumnya persamaan gelombang tak linier, persamaan Kadomtsev-Petviashvili mempunyai relatif masih banyak fenomena yang belum terungkap. Pemahaman kelas solusi (analitik) khususnya sulusi tiga soliton akan membantu mengungkapkan feno-mena lain yang terkait dengan kelas solusi periodic.

Hasil yang diperoleh di sini mengenai solusi tiga soliton yang tak berubah fase kecuali yang terujung, pada dasarnya me-ngungkapkan adanya kelas solusi sederhana (yang tak trivial) yang hampir berperilaku seperti gelombang linier.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dari Dana DIK rutin Universitas Diponegoro No.3908/PT09.H2/N/1998, yang turut membantu dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Cahyono, E., E.Van Groesen,E.Soewono & S.Subariyah, Genus-two soliton to The Kadomtsev & Petviashvili Equations, on international Conference Diferen-tial Equations,1996.

Kenji Okhuma dan Miki Wadati , The Kadomtsev & Petviashvili Equations, The Trace Method and The soliton Resonance, , J.The Phisycal Society of Japan, Vol 52,No.3, March 1983.

Satsuma, N-Solitons solution of the two Dimentional Korteweg de Vries Equations, J.The Phisycal Society of Japan, Vol 40, No.1 Januari 1976.

Segur, H & A.Finkel, An analytical Model of periodic Waves in Shallow wa-ter,Studies in Applied Mathematics 73, Massachusetts Institude of Techno-logy, 1985

Soewono, E & Sutimin, N-Soliton Solution dari Persamaan Kadomtsev – Petvia-shvili KP-(I,II), to appear.

Zakharov, VE dan A.B Shabat, Funct.-anal.appl.8 (1974) 226.