BAB II

MATERI PENUNJANG

Persamaan differensial biasa dibagi menjadi dua kelompok besar : persamaan linier dan persamaan non linier. Dalam bab ini kita akan mempelajari sedikit tentang persamaan differensial, integral dan cara penyelesaian.

2.1. Derivatip dan Integral

Definisi 1 :

Derivatip dari fungsi $y = f(x)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δy perubahan pada fungsi $f(x)$

Δx perubahan pada x

Definisi 2 :

Derivatip dari $y = f(x)$ pada $x = a$, ialah nilai dari derivatipnya untuk $x = a$.

Contoh :

Tentukan harga derivatip dari :

$$f(x) = x^2 + 3x, \text{ pada } x = 2$$

Jawab :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - (x^2 + 3x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x\ x^2 - 3x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\ \Delta x + 3\ \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 3 + (\Delta x)$$

$$= 2x + 3$$

Sehingga menurut definisi (2) harga derivatif dari f (x) = $x^2 + 3x$ pada x = 2, adalah :

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(2) = 2.2 + 3$$

$$= 7$$

Definisi 3 :

Integral atau anti differensial dengan notasi $\int$ adalah suatu cara untuk mencari suatu fungsi bila derivatifnya diketahui, sedemikian sehingga bila F'(x) = f (x) maka $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ dengan :

F (x) = fungsi integral

f (x) = integrad

c = konstanta integrasi

Definisi 4 :

Jika f (x) kontinu pada interval a < x < b, F'(x) = f (x) maka :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$$

$$= F\cdot(b) - F(a)$$

Contoh :

Diketahui $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$

Tentukan nilai $\int f(x)\,dx$ pada interval $3 < x < 4$

Jawab :

Menurut definisi (3) dan (4) maka diperoleh :

$$\int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 (3x^2 + 2x - 6)\,dx$$

$$= x^3 + x^2 - 6x\Big]_3^4$$

$$= 38$$

2.2. Persamaan Differensial

Definisi 5 :

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang mengandung paling sedikit satu derivatif.

Contoh :

$y' + x = 0$, Mengandung satu derivatif, yaitu y'

$y'' + y' - y = 0$, Mengandung dua derivatif, yaitu y'' dan y'

2.2.1. Persamaan Differensial Homogen

Suatu persamaan differensial homogen dengan koefisien konstan dapat ditulis dengan :

$$P_o \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

dengan P_o, P_1, ... P_n = konstan, $P_o \neq 0$

Contoh :

$$\frac{dy}{dx} - my = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = my$$

$$\frac{dy}{y} = m.dx$$

$y = e^{mx}$, merupakan penyelesaian dari persamaan differensial.

Sehingga dapat diambil kesimpulan :

Bila m merupakan akar dari persamaan differensial, f (m) = 0 , maka :

$$f(D)\, e^{mx} = 0$$

yang berarti bahwa $y = e^{mx}$ merupakan penyelesaian persamaan differensial.

(i). Akar-akar persamaan f (m) = 0 semua riil dan berlainan.

Andaikan akar-akar f (m) = 0 adalah :

$$m_1 \neq m_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \neq m_n$$

Maka ada n penyelesaian, yaitu :

$$y = e^{m_1 x},\ y = e^{m_2 x},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y = e^{m_n x}$$

yang bebas linier.

Jadi penyelesaian umumnya :

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$$

disini c_1, c_2, ... c_n, konstan sembarang

Contoh :

$$y'' - 4y = 0$$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik/persamaan pembantu

$m^2 - 4 = 0$, --------> $m = \pm 2$

penyelesaian umum persamaan differensial :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

(ii). Akar-akar persamaan f (m) = 0 semua riil ada yang sama.

Andaikan akar-akar f (m) = 0 adalah :

m_1, m_2, m_3, ... m_n

$m_1 = m_2 \neq m_3 \neq \ldots\ldots\ldots\ldots \neq m_n$

Penyelesaian umumnya :

$$y = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x) + c_3 e^{m_3 x} \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian umum persamaan differensial di bawah ini :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Jawab :

Persamaan karakteristik :

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m - 2)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 2$$

Penyelesaian umum persamaan differensial :

$$y = e^{2x} (c_1 + c_2 x)$$

(iii). Akar-akar persamaan f (m) = 0 kompleks dan berlainan.

Jika $(a \pm ib)$ merupakan akar-akar dari persamaan $f(m) = 0$, maka $y = A_1 e^{(a + ib)x} + A_2 e^{(a - ib)x}$ (*) adalah penyelesaian persamaan differensial, dengan A_1, A_2 konstan sembarang.

Pandang bentuk :

$$y = A_1 e^{(a+ib)x} + A_2 e^{(a-ib)x} = (A_1 e^{ibx} + A_2 e^{-ibx}) e^{ax}$$

Karena

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i.\sin x$$

maka dari persamaan (*) diperoleh :

$$y = \{A_1(\cos bx + i.\sin bx) + A_2(\cos bx - i.\sin bx)\} e^{ax}$$

$$= (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)\, e^{ax}$$

dengan : $c_1 = A_1 + A_2$, $c_2 = i.(A_1 - A_2)$

Jadi penyelesaian umumnya :

$$y = (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) e^{ax}$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian umum persamaan differensial

$$y'' + 2y'' + 5y = 0$$

Jawab :

Persamaan karakteristik :

$$(m^2 + 2m + 5)e^{mx} = 0$$

$$m_{12} = \frac{-2 \pm (4 - 20)^{1/2}}{2}$$

$$= (-1 \pm 2i)$$

Maka bentuk umumnya :

$$y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{-x}$$

2.2.2. Persamaan Differensial Tak Homogen

Bentuk umum persamaan differensial linier orde n yang tak homogen adalah :

$$(P_o D^n + P_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1} D + P) y = Q(x)$$

Dengan $P_o = 0$, P_i konstan, untuk i = 1, 2, 3 ..... n dan Q (x) merupakan fungsi dengan perubah x atau konstan. Jadi penyelesaian persamaan differensial adalah :

$$y = y_k + y_p$$

Dengan y_k merupakan penyelesaian umum persamaan homogen, sedang y_p disebut penyelesaian khusus.

Untuk fungsi Q (x) ada beberapa kemungkinan :

(i) Jika Q (x) merupakan suatu polinomial.

a. Apabila y_k tidak memuat bentuk polinomial yang sama dengan bentuk Q (x), maka diambil penyelesaian yang berbentuk polinomial dan berpangkat sama dengan Q (x).

b. Apabila y_k memuat suku-suku polinomial, maka diambil penyelesaian yang berbentuk polinomial dan dimulai dengan suku yang berpangkat lebih tinggi satu tingkat dari pangkat polinomial yang terdapat dalam y_k.

Contoh :

Selesaikan persamaan differensial berikut :

$$y'' + y = 2 + x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1)$$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik :

$$m^2 + 1 = 0, \text{ ----> } m = \pm i$$

Fungsi komplementer :

$$y_k = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

karena Q (x) = $2 + x^2$, sedang y_k tidak memuat bentuk polinomial, maka diambil bentuk penyelesaian khusus :

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2)$$

$$y'_p = B + 2Cx$$

$$y''_p = 2C$$

Sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$2C + A + Bx + Cx^2 = 2 + x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3)$$

Dengan melihat koefisien-koefisien dari persamaan (2.3) diperoleh :

$$B = 0, \ C = 1$$

$$2C + A = 2 \text{ ----> } A = 0$$

Sehingga diperoleh penyelesaian khusus :

$$y_p = x^2$$

Jadi penyelesaian umum persamaan differensial :

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2$$

(ii) Jika Q (x) berbentuk sin ax dan cos ax

a. Apabila bentuk sin ax atau cos ax belum terdapat dalam y_k, maka diambil bentuk :

$$y_p = A \sin ax + B \cos ax$$

yang sesuai dengan bentuk Q (x) dan memenuhi persamaan :

$$f(D)\, y = Q(x)$$

b. Apabila y_k telah memuat bentuk sin ax atau cos ax, maka bentuk y_p harus dimulai dengan suku x^k, dimana k merupakan pangkat dari x yang lebih besar dari pangkat x dalam y_k.

Contoh :

Tentukan persamaan differensial :

$$y'' - 3y' + 2y = \sin 2x$$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik :

$$m^2 - 3m + 2 = 0, \;\text{---->}\; (m - 1)(m - 2) = 0$$

mempunyai akar-akar m = 1,2

Fungsi komplementer :

$$y_k = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Oleh karena Q (x) = sin 2x, untuk mencari y_p diambil bentuk :

$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$

$y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$

$y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$

setelah dimasukkan dalam persamaan differensial didapat :

$(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) - 3\ (2A \cos 2x - 2B \sin 2x) +$
$2(A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x$

Maka diperoleh :

$(-2A - 6B) \sin 2x + 3(-2B - 6A) \cos 2x = \sin 2x$

$-2A - 6B = 1$ dan $-2B - 6A = 0$

dari dua persamaan diatas diperoleh :

$A = -1/16 \quad B = -3/16$

Jadi penyelesaian khusus :

$y_p = (1/16) \sin 2x - (3/16) \cos 2x$

dan penyelesaian umumnya :

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 1/16 \sin 2x - 1/16 \cos 2x$