BAB III

STASIONARITAS PROSES RANDOM

3.1. Stasionaritas

Seperti telah dijelaskan dalam BAB II yang menyatakan bahwa suatu proses random menggambarkan suatu variabel random bilamana waktu adalah tetapan. Suatu variabel random mempunyai beberapa sifat statistik, seperti misalnya mean, momen, varian, dan sifat-sifat statistik lainnya yang berhubungan dengan fungsi densitasnya. Dalam hubungannya dengan proses random, suatu proses random dikatakan *stasioner* bila semua sifat-sifat statistiknya tidak berubah terhadap pergeseranwaktu. Dan proses yang random yang tidak demikian disebut *nonstasioner.*

3.1.1. Stasionaritas orde pertama

Suatu proses random dikatakan *stasioner berorde satu* bila fungsi densitas orde pertamanya tidak berubah terhadap pergeseran waktu.

$$f_X(x_1, t_1) = f_X(x_1, t_1 + c) \qquad .....(3.1.1)$$

untuk tiap t_1 dan bilangan real c, bila $X(t)$ mempunyai proses random stasioner orde pertama.

Akibat dari (3.1.1) adalah $f_X(x_1, t_1)$ independen dengan dari t, dan harga mean proses $E[X(t)]$ konstan

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{konstan} \qquad .....(3.1.2)$$

untuk membuktikan (3.1.2) dicari harga mean dari variabel random $X_1 = X(t)$ dan $X_2 = X(t)$. Di mana untuk X_1;

$$E[X_1] = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1, t_1) \qquad .....(3.1.3)$$

dan untuk X_2;

$$E[X_2] = E[X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_2)\, dx_1 \qquad .....(3.1.4)$$

di mana variabel x_2 dari (3.1.4) telah diganti dengan variabel alternatif x_1 untuk memudahkan penghitungan. Dengan memberikan $t_2 = t_1 + c$ dalam (3.1.4), mensubstitusikan (3.1.1), dan menggunakan (3.1.3) diperoleh

$$E\,[X(t_1 + c)] = E\,[X(t_1)] \qquad ......(3.1.5)$$

Bukti dari (3.1.5), diperoleh dengan memasukkan $t_2 = t_1 + c$ ke dalam (3.1.4) dan diperoleh

$$E\,[X_2] = E\,[X(t_2)] = E\,[X(t_1 + c)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1 + c)\, dx_1 \qquad ......(3.1.6)$$

Persamaan (3.1.1) menyatakan

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + c)$$

maka (3.1.6) dapat ditulis dalam bentuk

$$E\,[X(t_1 + c)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1 + c)\, dx_1$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1; t_1)\, dx_1 \qquad ......(3.1.7)$$

Karena (3.1.3) menyatakan

$$E\,[\,X((t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1;t_1)\, dx_1 \qquad ......(3.1.8)$$

maka terbukti bahwa (3.1.7) sama dengan (3.1.8)

yaitu $E\,[\,X(t_1+c)] = E\,[\,(t_1)]$

Dengan demikian (3.1.5) terbukti.

3.1.2. Stasionaritas orde dua dan stasionaritas dalam arti luas

Suatu proses dikatakan *stasioner order dua* bila fungsi densitas orde keduanya memenuhi,

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c) \qquad .....(3.1.9)$$

untuk semua t_1, t_2, dan c.

Persamaan (3.1.9) merupakan fungsi dari selisih waktu t_2-t_1 dan bukan fungsi dari waktu penuh t,misal diberikan waktu sembarang $c = -t_1$.

Suatu korelasi $E\,[\,X_1X_2] = E\,[\,X(t_1)X(t_2)]$ dari proses random, yang secara umum, merupakan suatu fungsi dari t_1 dan t_2. Fungsi ini disajikan dengan $R_{XX}(t_1,t_2)$ dan disebut *fungsi autokorelasi* dari proses random $X(t)$

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\,[\,X(t_1)X(t_2)] \qquad .....(3.1.10)$$

Suatu konsekuensi dari (3.1.10), bahwa fungsi autokorelasi dari suatu proses stasioner orde kedua adalah suatu fungsi hanya dari selisih waktu dan bukan fungsi dari waktu penuh, yaitu bila,

$$\tau = t_2 - t_1 \qquad \text{.....(3.1.11)}$$

maka (3.1.10) menjadi

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\,[\,X(t_1)X(t_1+\tau)] = R_{XX}(\tau) \qquad \text{.....(3.1.12)}$$

Untuk membuktikan (3.1.12) digunakan (3.1.9)

Bukti dari (3.1.9);

Dengan menggunakan sembarang $c = -t$, maka (3.1.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2) \qquad \text{.....(3.1.13)}$$

Dalam kasus ini $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ dianggap saling independ (bebas) sehingga $E\,[\,X(t_1)X(t_2)]$ dapat ditulis dalam bentuk terpisah $E\,[\,X(t)]\ \ E\,[\,X(t)]$.

*) Dari (3.1.13) dicari mean prosesnya

$$E\,[\,X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx$$

$$\text{......(3.1.14)}$$

$$E\,[\,X(t_2-t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_X(x_1,x_2;t_2-t_1)dx_1dx_2$$

$$\text{.....(3.1.15)}$$

karena (3.1.9) menyatakan

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$$

$$= f_X(x_1,x_2;t_2-t_1) \qquad \text{.....(3.1.16)}$$

untuk semua $c = -t_1$, maka (3.1.15) dapat ditulis dalam bentuk

$$E\,[\,X(t_2-t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1,x_2f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$$\text{......(3.1.17)}$$

Jadi $E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_2-t_1)]$ .....(3.1.18)

**) Dari(3.1.10) dicari harga meannya

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

.....(3.1.19)

Harga mean dari (3.1.12) adalah

$$R_{XX}(t_1,t_1+\tau) = E[X(t_1)X(t_1+\tau)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_1+\tau)dx_1dx_2.$$

.....(3.1.20)

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t_2-t_1) = E[X(t_2-t_1)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1,x_2;t_2-t_1)dx_1dx_2$$

.....(3.1.21)

Persamaan (3.1.11) menyatakan $\tau = t_2-t_1$ atau $t_2 = t_1+\tau$, maka

$E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1+\tau)]$, atau (3.1.19) sama dengan (3.1.20).

Dengan menggunakan (3.1.9), yaitu bahwa

$E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_2-t_1)]$, atau (3.1.14) sama dengan (3.1.15), aka

$E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_2-t_1)]$, atau (3.1.19) sama dengan (3.1.21).

Karena

*).(3.19) sama dengan (3.1.20),

yaitu $E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1+\tau)]$,

**).(3.1.19) sama dengan (3.1.21),

yaitu $E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = E[X(t_2-t_1)]$, maka

***).(3.1.20) sama dengan (3.1.21)

yaitu $E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = E[X(t_2-t_1)]$.

Jadi, terbukti (3.1.12), bahwa

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_1+\tau)]$$
$$= R_{XX}(\tau).$$

Dua proses merupakan *proses stasioner dalam arti luas* apabila proses tersebut memenuhi dua kondisi berikut,

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{konstan}$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau) \qquad \text{......(3.1.22)}$$

Suatu proses stasioner berorde dua adalah *stasioner dalam arti luas*, karena memang memenuhi dua persyaratan tersebut di atas. Tetapi tidak demikian halnya dengan yang sebaliknya. Artinya, suatu proses stasioner dalam arti luas tidak harus suatu proses yang berorde dua.

COntoh 3.1.1

Hendak ditunjukkan bahwa proses random berikut $X(t) = A.\cos(\varphi_0 t+\theta)$ adalah proses stasioner dalam arti luas apabila dalam proses tersebut dianggap bahwa A dan φ_0 merupakan konstan dan θ berdistribusi seragam pada interval $(0,2\pi)$.

Penyelesaian :

$$E\,[\,X(t)] = \int_0^{2\pi} A.\cos(\varphi_o t+\theta)(1/2\pi)d\theta$$

$$= A.\sin(\varphi_o t+2\pi)(1/2\pi) - A.\sin(\varphi_o t+0)(1/2\pi)$$

$$= A\,[\,\sin(\varphi_o t+2\pi)(1/2\pi) - \sin(\varphi_o t+0)(1/2\pi)]$$

$$= A.0 = 0$$

Fungsi autokorelasi dari (3.1.10) dengan $t_1 = t$ dan $t_2 = t+\tau$, menjadi

$$R_{xx}(t,t+\tau) = E\,[\,X(t)X(t+\tau]$$

$$= E\,[\,A.\cos(\varphi_o t+\theta).A.\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau+\theta)]$$

$$= (A^2/2).E\,[\cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+2\theta) + \cos(\varphi_o\tau)]$$

$$= (A^2/2).E\,[\cos\,(\varphi_o\tau)+\cos(2\varphi_o\tau+\varphi_o\tau+2\theta)]$$

$$= (A^2/2).\cos(\varphi_o\tau)+A^2/2.E\,[\,\cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+2\theta)]$$

$$= (A^2/2).\cos(\varphi_o)$$

Karena,

$$A^2/2.E[\,\mathrm{Cos}(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+2\theta)]$$

$$= (A^2/2)\int_0^{2\pi} \cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+2\theta)d\theta$$

$$= (A^2/2)\ \sin(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+2\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= (A^2/2)\{\sin(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+2\pi) - \sin(2\varphi_o t+\varphi_o\tau+0)\}$$

$$= (A^2/2).0 = 0$$

Terlihat bahwa fungsi korelasi hanya tergantung pada τ (jadi merupakan fungsi dari τ), dan harga meannya adalah konstan. Jadi proses random $X(t)$ di atas adalah stasioner dalam arti luas, karena memenuhi dua kondisi yang jadi persyaratan, seperti tertera (3.1.22)

Selanjutnya, dua proses random $X(t_1)$ dan $Y(t_2)$ dikatakan stasioner dalam arti luas *bersama* apabila masing-masing memenuhi (3.1.22) dan *fungsi korelasi silangnya* secara umum didefiniskan sebagai

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\,[\,X(t_1)Y(t_2)] \qquad \text{......(3.1.23)}$$

adalah fungsi hanya untuk selisih waktu $\tau = t_2 - t_1$, dan bukan fungsi dari waktu penuh t. Bila $t_1 = t$, maka $t_2 = t + \tau$. Kemudian persamaan (3.1.15) dapat disajikan sebagai

$$\begin{aligned} R_{XY}(t,t+\tau) &= E\,[\,X(t)Y(t+\tau)] \\ &= R_{XY}(\tau) \qquad \text{.....(3.1.24)} \end{aligned}$$

3.1.3. Stasionaritas orde ke-N dan stasionaritas dalam arti tegas.

Proses random $X(t)$ dikatakan *stasionaritas dalam artitegas* bila sifat-sifat statistiknya invarian terhadappergeseran titik awal vaktu. Ini berarti bahwa proses $X(t)$
dan $X(t+c)$ mempunyai statistik yang sama untuk sebarang c.

Dari definisi terlihat bahwa densitas tingkat ke-N proses stasioner dalam arti tegas harus sedemikian hingga

$$f_X(x_1,...,x_N;t_1,...,t_N) = f_X(x_1,...x_N;t_1+c,...,t_N+c) \quad .....(3.1.25)$$

Dari bentuk diatas terlihat bahwa $f_X(x;t) = f_X(x;t+c)$ untuk sebarang c. Karena itu densitas tingkat pertama $X(t)$ independen (tidak bergantung) dengan t.

$$f_X(x;t) = f_X(x) \quad .....(3.1.26)$$

Dengan pemikiran yang sama, $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ independen dengan c, untuk sebarang c.

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;\tau) \quad ......(3.1.27)$$

dengan $\tau = t_2 - t_1$.

Persamaan (3.1.15) akan dibuktikan.

Berdasar pada $f_X(x;t) = f_X(x;t+c)$, maka (3.1.27) dapat disajikan sebagai

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c) \quad ......(3.1.28)$$

untuk sebarang c, misal $c = -t_1$, maka (3.1.28) dapat disajikan sebagai

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$$

$$= f_X(x_1,x_2;t_2-t_1) \quad ......(3.1.29)$$

Persamaan (3.1.27) menyatakan $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;\tau)$ dengan $\tau = t_2 - t_1$.

Dengan demikian persamaan (3.1.29) dapat disajikan sebagaimana persamaan (3.1.27) tersaji

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$$

$$= f_X(x_1,x_2;t_2-t_1)$$

$$= f_X(x_1,x_2;\tau) \qquad ......(3.1.30)$$

Jadi, densitas bersama variabel random $X(t+\tau)$ dan $X(t)$ independen (tidak bergantung) dengan t dan sama dengan $f_X(x_1,x_2;\tau)$.

3.2. Fungsi korelasi

Fungsi-fungsi autokorelasi dan korelasi silang sudah diperkenalkan dalam bagian sebelum ini. Tetapi fungsi-fungsi tersebut akan dibahas lebih lanjut dalam bab ini. Juga sakan diperkenalkan funghsi-fungsi model lain yang ada kaitannya dengan proses random.

3.2.1. Fungsi autokorelasi

Fungsi autokorelasi dari suatu proses random $X(t)$ adalah korelasi $E[X_1X_2]$ dari dua variabel random $X_1 = X(t_1)$ dan $X_2 = X(t_2)$ yang didefinisikan oleh proses pada $t_1$dan t_2. Yang secara matematis dinyatakan oleh

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\,[X(t_1)X(t_2)] \qquad ......(3.2.1)$$

Untuk waktu t_1=t dan t_2= $t+\tau$ di mana τ = real, maka bentuk (3.2.1) menjadi

$$R_{XX}(t,t+\tau) = E\,[\,X(t)X(t+\tau)] \qquad .....(3.2.2)$$

Jika $X(t)$ proses hampir stasioner dalam arti luas, maka $R_{XX}(t,t+\tau)$ merupakan fungsi selisih waktu $\tau = t_2- t_1$.Jadi untuk proses stasioner dalam arti luas autokorelasinya adalah

$$R_{XX}(\tau) = E\,[\,X(t)X(t+\tau)] \qquad .....(3.2.3)$$

Untuk proses demikian fungsi korelasi memiliki beberapa sifat, antara lain

(i). $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$, sifat simetri

(ii). $R_{XX}(0) = E\,[\,X^2(t)]$, nilai mean kuadrat

(iii). Jika $E\,[\,X(t)] = \overline{X} \neq 0$, maka $R_{XX}(\tau)$ akan mempunyai bentuk konstan sama untuk $(\overline{X})^2$

Contoh 3.2.1

Diberikan suatu fungsi autokorelasi

$$R_{XX}(\tau) = 25 + 4/(1+6\tau^2)$$

akan dicari harga mean dan varian dari proses $X(t)$.

Penyelesaian

Dari sifat iii, harga mean adalah

$$E[\,X(t)] = \overline{X} = \sqrt{25} = \pm\,5$$

Varian diberikan oleh

$$\sigma_X^2 = E[\,X^2(t)] - E[\,X(t)]^2$$

Dari sifat ii,

$$E[\,X^2(t)] = R_{XX}(0) = 25 + 4 = 29$$

Maka

$$\sigma_X^2 = 29 - 25 = 4$$

3.2.2. Fungsi korelasi silang

Fungsi korelasi silang untuk dua proses random $X(t)$dan $Y(t)$ didefinisikan di dalam (3.1.23). Dengan mengambil $t_1 = t$ dan $\tau = t_2 - t_1$, maka (3.1.23) dapat ditulis sebagai

$$R_{XY}(\tau) = E\,[\,X(t).Y(t+\tau)] \qquad .....(3.2.4)$$

Bila $X(t)$ dan $Y(t)$ keduanya merupakan proses hampir stasioner dalam arti luas, maka $R_{XY}(t,t+\tau)$ adalah independen dari waktu penuh dan dapat ditulis dalam bentuk

$$R_{XY}(\tau) = E\,[\,X(t).Y(t+\tau)] \qquad .....(3.2.5)$$

Jika

$$R_{XY}(t,t+\tau) = 0 \qquad .....(3.2.6)$$

maka $X(t)$ dan $Y(t)$ disebut *proses-proses ortogonal*.Jika kedua proses saling independen secara, maka fungsi korelasi silangnya menjadi

$$R_{XY}(t;t+\tau) = E\,[\,X(t)]\;E\,[\,Y(t+\tau)] \qquad .....(3.2.7)$$

Jika $X(t)$ dan $Y(t)$ keduanya hampir stasioner dalam arti luas, maka (3.2.7) menjadi

$$\begin{aligned} R_{XY} &= E\,[\,X(t)]\;E\,[\,Y(t)] \\ &= \overline{X}.\overline{Y} \qquad .....(3.2.8) \end{aligned}$$

Contoh 3.2.2

Diberikan dua proses random yang didefinisikan oleh

$X(t) = A\cos(\varphi_0 t) + B\sin(\varphi_0 t)$

$Y(t) = B\cos(\varphi_0 t) - A\sin(\varphi_0 t)$

di mana A dan B merupakan variabel random dan φ_o adalah suatu konstanta. Maka carilah fungsi korelasi silang daridua proses random tersebut.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan bahwa $X(t)$ merupakan stasioner dalam arti luas bila A dan B uncorrelated. Dengan perlakuan yang sama atas A dan B, maka $Y(t)$ juga merupakan stasioner dalam arti luas. Sekarang akan deicari dulu fungsi korelasi silang $R_{XY}(t;t+\tau)$, dan akan ditunjukkan bahwa $X(t)$

dan $Y(t)$ adalah stasioner dalam arti luas bersama.

Dengan menggunakan (3.2.7) diperoleh

$$
\begin{aligned}
R_{XY}(t;t+\tau) &= E[\,X(t).Y(t+\tau)] \\
&= E[\,\{A\cos(\varphi_o t).B\sin(\varphi_o t)\} \\
&\quad \{B\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau)-A\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)\}] \\
&= E[\,AB\cos(\varphi_o t).\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau) \\
&\quad + B^2\sin(\varphi_o t).\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau) \\
&\quad - A^2\cos(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau) \\
&\quad - AB\sin(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)] \\
&= E[\,AB\{\cos(\varphi_o t).\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau) \\
&\quad - \sin(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)\} \\
&\quad + B^2\sin(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)) \\
&\quad - A^2\cos(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau) \\
&= E[\,\{AB\{1/2.(\cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau).\cos(\varphi_o\tau))\}
\end{aligned}
$$

$$- AB\{-1/2.\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau)-\cos(\varphi_o\tau)\}$$

$$+ B^2\sin\ (\varphi_o t).\cos(\varphi_o t\varphi_o\tau)$$

$$-.A^2\cos(\varphi t).\sin\ (\varphi_o t+\varphi_o\tau)]$$

$$= E[\ AB\{1/2.\cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau)+1/2.\cos(\varphi_o t)\}$$

$$- AB\{-1/2.\cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau)+1/2.\cos(\varphi_o\tau)\}$$

$$+ B^2\sin(\varphi_o t).\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau)$$

$$- A^2\cos(\varphi t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)]$$

$$= E[\ AB]\cos(2\varphi_o t+\varphi_o\tau)$$

$$+ E[\ B^2]\sin(\varphi_o t).\cos(\varphi_o t\varphi_o\tau)$$

$$- E[\ A^2]\cos(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)$$

Karena A dan B dianggap zero-mean, yaitu variabel uncorrelated, maka $E[\ AB] = 0$. Juga karena A dan B dianggap mempunyai varian yang sama, maka $E[\ A^2] = E[\ B^2] = \sigma^2$ dan diperoleh

$$R_{XY}(t,t+\tau) = \sigma^2\ \sin(\varphi_o t).\cos(\varphi_o t+\varphi_o\tau)$$

$$- \sigma^2\ \cos(\varphi_o t).\sin(\varphi_o t+\varphi_o\tau)$$

$$= \sigma^2\ \{1/2.(\sin(2\varphi_o t+\varphi_o\tau)+\sin(\varphi_o\tau))\}$$

$$- \sigma^2\ \{1/2.(\sin(2\varphi_o t+\varphi_o\tau)-\sin(\varphi_o\tau))\}$$

$$= 1/2.\sigma^2\ \sin(2\varphi t+\varphi\tau)$$

$$+ 1/2.\sigma^2\ \sin(\varphi_o\tau)$$

$$- 1/2.\sigma^2\ \sin(2\varphi_o t+\varphi_o\tau)$$

$$+ 1/2.\sigma^2\ \sin(\varphi_o\tau)$$

$$= \sigma^2\ \sin(\varphi_o\tau)$$

Dengan demikian $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah stasioner dalam arti luas bersama, karena $R_{XY}(t,t+\tau)$ hanya tergantung pada τ.

3.2.3. Fungsi kovarian

Konsep kovarian dari dua variabel random, dapat diperluas untuk proses-proses random. *fungsi autokovarian* didefinisikan sebagai

$$C_{XX}(t,t+\tau) = E\left[\{X(t)-E[X(t)]\}.\{X(t+\tau)-E[X(t+\tau)]\}\right]$$

$$= E\left[X(t)X(t+\tau) - E[X(t)]X(t+\tau) - X(t)E[X(t)] + E[X(t)]E[X(t+\tau)]\right]$$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]\ E[X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)] + E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] - 2E[X(t)]E[X(t+\tau)] + E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= R_{XX}(t,t+\tau) - E[X(t)]E[X(t+\tau)] \quad \ldots\ldots(3.2.9)$$

yang berarti bahwa persamaan (3.2.9) dapat juga disajikan dalam bentuk

$$C_{XX}(t,t+\tau) = R_{XX}(t,t+\tau)-E[X(t)]E[X(t+\tau)] \quad \ldots\ldots(3.2.10)$$

Sedangkan *fungsi kovarian silang* untuk dua proses random didefinisikan sebagai

$$C_{XY}(t,t+\tau) = E\left[\{X(t)-E[X(t)]\}.\{Y(t+\tau)-E[Y(t+\tau)]\}\right]$$

$$= E\left[X(t)Y(t+\tau) - E[X(t)]Y(t+\tau) - X(t)E[X(t)] + E[X(t)]E[Y(t+\tau)]\right]$$

$$= E\,[X(t)Y(t+\tau)] - E\,[X(t)]\,E[Y(t+\tau)]$$
$$-E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)] + E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)]$$
$$= E\,[X(t)Y(t+\tau)] - 2\,E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)]$$
$$+\,E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)]$$
$$= E\,[X(t)Y(t+\tau)] - E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)]$$
$$= R_{XY}(t,t+\tau) - E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)] \qquad \ldots\ldots(3.2.11)$$

yang berarti bahwa persamaan (3.2.10) dapat juga disajikan dalam bentuk

$$C_{XY}(t,t+\tau) = R_{XY}(t,t+\tau) - E[X(t)]E[Y(t+\tau)] \ldots\ldots(3.2.12)$$

Untuk proses-proses yang merupakan hampir stasioner dalam arti luas bersama (3.2.9) dan (3.2.12) direduksi menjadi

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - (\overline{X})^2 \qquad \ldots\ldots(3.2.13)$$
$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \overline{X}\;\overline{Y} \qquad \ldots\ldots(3.2.14)$$

Varian dari suatu proses random diberikan dalam bentuk umum (3.2.10) dengan $\tau = 0$. Untuk suatu proses stasioner dalam arti luas, varian tidak tergantung pada waktu dan diberikan oleh (3.2.13) dengan $\tau^{1} = 0$..

$$\sigma_X^2 = E[\{X(t)\;\; E[X(t)]\}^2]$$
$$= R_{XX}(0) - (\overline{X})^2 \qquad \ldots\ldots(3.2.15)$$

Untuk dua proses random jika

$$C_{XY}(t,t+\tau) = 0 \qquad \ldots\ldots(3.2.16)$$

maka $X(t)$ dan $Y(t)$ disebut uncorrelated.