BAB II

KONSEP PROSES RANDOM

2.1. KONSEP PROSES RANDOM

Konsep dari proses random adalah suatu konsep yang didasarkan pada perluasan konsep variabel random dengan memasukkan unsur waktu. Suatu variabel random X adalah suatu fungsi dari s hasil yang mungkin dari suatu eksperimen, dan dengan memasukkan unsur waktu ke dalamnya fungsi tersebut menjadi fungsi yang meliputi keduanya baik s yaitu hasil yang mungkin dari suatu eksperimen maupun t yaitu waktu yang diperlukan untuk eksperimen tersebut, kemudian disebut sebagai proses random. Dengan kata lain, disesuaikan dengan beberapa aturan yang berlaku, ditentukan suatu fungsi waktu

$$X(t;s) \qquad \text{......(2.1.1)}$$

Keluarga dari fungsi demikian, yang dinyatakan dengan $X(t;s)$, disebut *proses random*. Seperti halnya pada variabel random di mana x menyatakan harga atau nilai spesifik dari variabel random X, sering pula digunakan notasibentuk pendek $x(t)$ untuk menggambarkan suatu bentuk gelombang specifik dari suatu proses random yang dinyatakan dengan $X(t)$.

Suatu proses random $X(t;s)$ menggambarkan suatu keluarga (*himpunan*) fungsi waktu bilamana t dan s keduanya merupakan variabel. Gambar (2.1.1) menjelaskan beberapa anggota dari suatu fungsi sampel. Tiap-tiap anggota fungsi waktu disebut *fungsi sampel*.

Bilamana t merupakan harga spesifik, maka proses randomnya menggambarkan suatu fungsi waktu yang tunggal. Suatu proses random juga menggambarkan suatu variabel random bilamana t adalah tetapan dan s merupakan suatu variabel. Sebagai contoh, variabel random $X(t_1;s) = X(t_1)$ diperoleh dari proses bilamana waktu "berhenti" pada harga t_1. Sering digunakan notasi X_1 untuk menyatakan variabel random sehubungan dengan proses $X(t)$ pada saat harga t sama dengan t_1. Di mana X_1 bersesuaian untuk suatu "irisan" vertikal yan g melalui ensambel saat t_1, seperti nampak pada *Gambar* 2.1.1. Sifat-sifat satistik dari $X_1 = X(t_1)$ melukiskan sifat-sifat statistik dari proses random pada saat t_1.Nilai harapan dari X_1 disebut *rataan fungsi sampel* dari proses random dari proses random (pada saat t_1). Karena t_1 bisa mempunyai nilai beragam, maka nilai mean dari suatu proses tidak konstan; secara umum, harga mean merupakan fungsi dari waktu. Dengan mudah divisualisasikan tiap bilangan dari variabel random $X(t_1)$ pada saat t_i, dengan $i = 1,2,3,..$

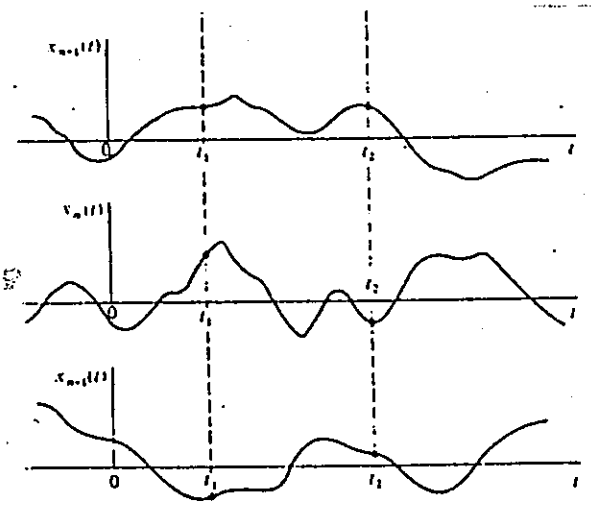
$$X_i = X(t_i;s) = X(t_i) \qquad .....(2.1.2)$$

Suatu proses random dapat juga menggambarkan suatu bilangan asli bilamana t dan s keduanya adalah tetapan. Hal semacam ini bisa saja terjadi manakala t dan sproses tersebut adalah konstan.

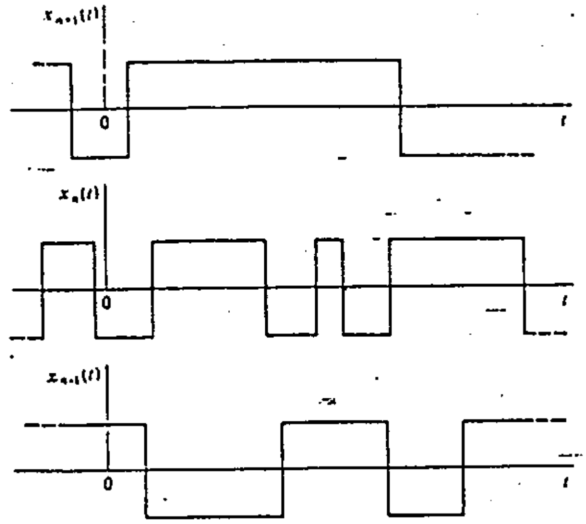
2.2. Klasifikasi dari proses random

Klasifikasi proses random dipakai untuk membagi (menggolongkan) proses-proses random sesuai dengan karakteristik dari t dan variabel random $X = X(t)$ pada saat t. Dalam hal ini akan dibahas empat kasus dasar mengenai t dan X yang mempunyai harga-harga dalam batas interval $-\infty < t < \infty$ dan $-\infty < x < \infty$.

Kelas pertama, apabila X kontinu dan t juga kontinu, maka $X(t)$ disebut *proses random kontinu*. *Gambar* 2.1.1 merupakan penjelasan dari proses kelas (jenis) ini



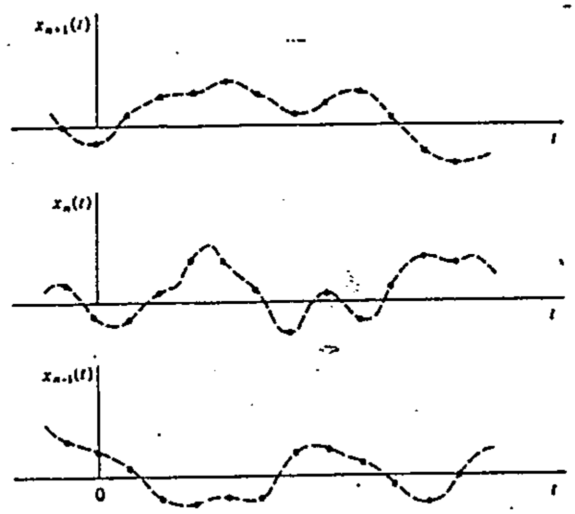
Gambar 2.1.1. *Suatu proses random kontinu*



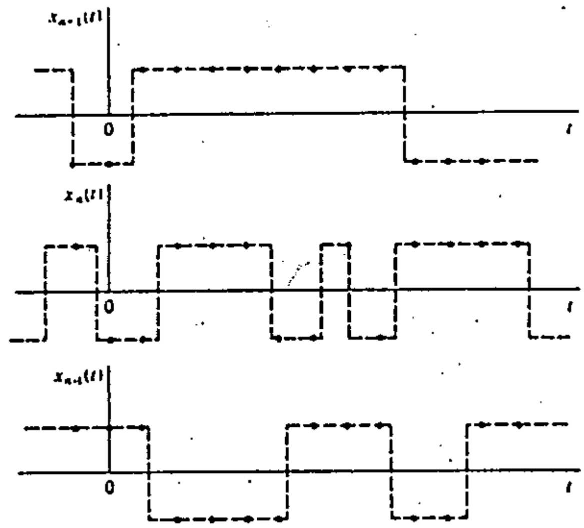
Gambar 2.1.2. *Suatu proses random diskret*

Kelas kedua dari proses random, disebut *proses random diskret*, apabila variabel random X mempunyai harga diskret sedangkan *t* berharga kontinu. *Gambar* 2.1.2 menjelaskan suatu proses demikian yang berasal dari *Gambar*2.1.1. Fungsi sampel hanya mempunyai dua harga diskret: yaitu level positif menghasilkan suatu fungsi sampel dalam *Gambar* 2.1.1 dan level negatip untuk watu-waktu yang lain.

Kelas ketiga , suatu proses random yang varibel randomnya *X* kontinu tetapi waktu *t* mempunyai harga diskret, disebut *barisan random kontinu*. Suatu barisan demikian dapat dibentuk dengan sampling anggota-nggota fungsi sampel pada waktu tertentu dari proses yang ada pada *Gambar* 2.1.1. Dan hasilnya dijelaskan *Gambar* 2.1.3.



Gambar 2.1.3. Suatu barisan random kontinu



Gambar 2.1.4. Suatu barisan random diskret

Kelas keempat suatu proses random, yang kedua harga X dan t adalah diskret disebut *barisan random diskret*, maka proses random sesuai untuk kedua waktu dan *Gambar*

2.1.4 menjelaskan suatu barisan random diskret yang dikembangkan dengan sampling fungsi-fungsi sampel dari *Gambar* 2.1.2.

Dalam pembahasan selanjutnya, akan digunakan notasi $X(t)$ untuk menyajikan proses random dengan mengabaikan, seperti pada kasus random, dependensinya pada s.Jadi, $X(t)$ mempunyai interpretasi sebagai berikut;

1. $X(t)$ adalah keluarga (atau *himpunan* fungsi $X(t;s)$. Dalam interpretasi ini, t dan s adalah variabel.
2. $X(t)$ adalah fungsi waktu tunggal (atau *sampel* dari proses). Dalam keadaan ini, t adalah variabel dan s tetapan (tertentu).
3. Bila t tertentu dan s variabel, maka $X(t)$ adalah variabel random yang sama dengan *keadaan* proses pada waktu ke-t.
4. Bila t dan s tertentu, aka $X(t)$ adalah bilangan.

2.3. Beberapa pengertian dalam proses random

Suatu proses random adalah keluarga variabel random yang banyaknya tak berhingga, dari satu variabel random untuk setiap t. Untuk t tertentu, $X(t)$ adalah variabel random dengan distribusi

$$F(x;t) = P\{X(t) \leq x\} \qquad .....(2.3.1)$$

Fungsi ini bergantung pada t dan harganya sama dengan probabilitas peristiwa $\{X(t) \leq x\}$ yang terdiri dari semua hasil s_i sedemikian hingga untuk t tertentu,sampel $X(t;s_i)$ proses $X(t;s_i)$ proses yang diberikan tidak melebihi bilangan x.

Fungsi $F(x,t) = P\{X(t)\}$ disebut *distribusi tingkat pertama* proses $X(t)$. Derivatifnya terhadap x adalah

$$f_X(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x} \qquad ......(2.3.2)$$

disebut *densitas* (kepadatan) tingkat pertama dari $X(t)$.

Distribusi tingkat dua proses $X(t)$ adalah distribusi gabungan

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \le x_1,\ X(t_2) \le x_2\}. \qquad .....(2.3.3)$$

variabel random $X(t_1)$ dan $X(t_2)$. Fungsi densitas yang sesuai

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad ......(2.3.4)$$

Distribusi tingkat ke-N variabel random $X(t)$ adalah distribusigabungan $F(x_1,x_2,...,x_N)$ variabel[1] random $X(t_1),X(t_2),...,X(t_N)$. Derivatifnya terhadap X adalah

$$f_X(x_1,...,x_N;t_1,...,t_N) = \frac{\partial^N F(x_1,...,x_N;t_1,...,t_N)}{\partial x_1\ \partial x_2} \qquad ......(2.3.5)$$

Mean. Mean $E[X(t)]$ variabel random $X(t)$ adalah harga harapan variabel random $X(t)$,

$$E[X(t)] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x;t)dx \qquad ......(2.3.6)$$

Autokorelasi. Autokorelasi $R_{XX}(t_1,t_2)$ variabel *random* $X(t)$ adalah harga harapan perkalian $X(t_1)X(t_2)$.

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\,[X(t_1).X(t_2)]$$

untuk $X(t)$ dan $X(t)$ yang saling independen

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\,[\,X(t_2)]\;\;E\,[\,X(t_1)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1.x_2.f_{XX}(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

.....(2.3.7)

Korelasi silang. Korelasi silang R_{XY} dua proses random $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah fungsi

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\,[\,X(t_1)Y(t_2)] \qquad .....(2.3.8)$$

Autokovarian. Autokovarian $C_{XX}\ (t_1,t_2)$ dua proses random $X(t_1)$ dan $X(t_2)$

$$C_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) - E\,[\,X(t_1)]\,.E\,[\,X(t_2)]$$

......(2.3.7)

di mana $E\,[\,X(t)]$ adalah *mean* dari $X(t)$.

Kovarian silang. Kovarian silang dari dua proses random $X(t_1)$ dan $Y(t_2)$

$$C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - E\,[\,X(t_1)]\,.E\,[\,Yt_2)]$$

.....(2.3.8)

Catatan:

1. Dua proses random $X(t_1)$ dan $Y(t_2)$ disebut saling ortogonal, bila

$R_{XY}(t_1,t_2) = 0$, untuk setiap t_1 dan t_2.

2. Sedangkan $X(t_1)$ dan $Y(t_2)$ disebut takberkorelasi (uncorrelated) bila $C_{XY}(t_1,t_2) = 0$, untuk setiap $t_1$dan t_2.

3. Dua proses random $X(t)$ dan $Y(t)$ dikatakan sama, bila sampel-sampel yang bersesuaian $X(t;s_i)$ dan $Y(t;s_i)$ dari $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah identik untuk setiap s_i.Dengan pemikiranyang sama, kesamaan $Z(t) = X(t)+Y(t)$ mempunyai arti bahwa $Z(t;s_i) = X(t;s_i)+Y(t;s_i)$ untuk setiap s_i.

4. Bila dua proses random $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah sedemikian hingga variabel $X(t_1),X(t_2),...,X(t_N)$ dan $Y(t_1),Y(t_2),...,Y(t_N)$ saling independen, maka kedua proses tersebut independen.

1