BAB III

TENSOR INERSIA

III.1. Pengertian Tensor Inersia

Tensor inersia adalah salah satu bentuk khusus dari tensor Cartesian yang dapat ditemukan dalam permasalahan mekanika dimensi tiga, yang banyak melibatkan benda-benda tegar. Di mana tensor inersia ini merupakan dasar perumusan benda-benda tegar tersebut. Istilah tensor inersia muncul/didefinisikan dari rumus momentum sudut (mementum anguler) dari suatu benda yang berputar dan juga dari rumus energi kinetik benda.

Sekarang akan diperlihatkan, bagaimana tensor inersia tersebut muncul dalam rumus momentum sudut dan energi kinetik dari benda yang berputar.

III.1.1. Definisi Tensor Inersia - Momentum Sudut.

Pandang suatu benda tegar yang berputar dengan kecepatan sudut ω terhadap suatu titik tetap O. Pada keadaan ini, momentum sudut pada O diberikan dengan rumus integral :

$$H(O) = \int_V \rho(\mathbf{r})\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}\ dV \qquad (3.1)$$

Dimana : $\mathbf{r}$ adalah vektor posisi dari suatu titik yang mempunyai kecepatan linier v, $\rho(\mathbf{r})$ adalah kerapatan benda, dan V menyatakan volume benda.

Jika ω menyatakan kecepatan sudut, maka kecepatan linier v dari bendanya diberikan dengan :

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

Sehingga persamaan (3.1) menjadi :

$$H(O) = \int_V \rho(\mathbf{r})\, \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dV \qquad (3.2)$$

Dengan menjabarkan perkalian vektor triple (triple vektor product) dalam persamaan (3.2) diperoleh :

$$H(O) = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left[\omega\, \mathbf{r}^2 - \mathbf{r}(\omega \cdot \mathbf{r})\right] dV \qquad (3.3)$$

Didefinisikan suatu tensor :

$$I(O) = \int_V \rho(\mathbf{r})\, (\mathbf{r}^2 1 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\, dV \qquad (3.4)$$

Sehingga rumus momentum sudut diatas dapat ditulis sebagai :

$$H(O) = I(O) \cdot \omega \qquad (3.5)$$

maka bentuk tensor I(O) disebut "tensor inersia".

Dari definisi (3.4), tampak bahwa tensor inersia merupakan sifat dari bendanya dan bukan dari geraknya. Dengan ditentukannya tensor inersia ini, maka momentum sudut, energi kinetik dan momen inersia terhadap suatu sumbu yang diberikan dapat ditentukan dengan mudah.

Dari definisi di atas tampak pula bahwa tensor inersia adalah simetri. Sehingga dapat didiagonalkan sesuai metode yang telah diberikan dalam bab sebelumnya dan nilai-nilai karakteristik serta vektor-vektor karakteristiknya dapat ditentukan. Vektor-vektor karakteristiknya disebut sumbu-sumbu inersia utama dan nilai-nilai karakteristiknya yang merupakan momen-momen inersia terhadap sumbu-sumbu utama, disebut momen-momen inersia utama.

Pandang kembali metode pendiagonalan, yang menetukan harga-harga λ dan ω yang memenuhi persamaan :

$$I(O) \cdot \omega = \lambda\, \omega$$

tampak bahwa jika suatu benda berputar tehadap sumbu utama, maka vektor kecepatan sudut dan vektor momentum sudutnya adalah sejajar.

III.1.2. Penggunaan Tensor inersia dalam Energi Kinetik.

Dalam persamaan (3.5) di atas, telah diperlihatkan bahwa rumus momentum sudut melibatkan tensor inersia. Sekarang pandang rumus energi kinetik dari suatu benda tegar yang bergerak berputar dengan kecepatan sudut ω terhadap suatu titik tetap O. Energi kinetik dari benda didefinisikan dengan :

$$T = \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\ v^2\ dV \tag{3.6}$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\ (\omega \times \mathbf{r})^2\ dV \tag{3.7}$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\ (\omega \times \mathbf{r})\ (\omega \times \mathbf{r})\ dV \tag{3.8}$$

dengan mengingat identitas vektor $(\mathbf{x} \times \mathbf{y})(\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})-(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})$,

persamaan (3.8) menjadi :

$$T = \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\ \{\omega^2 r^2-(\omega\ \mathbf{r})^2\}\ dV \tag{3.9}$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\ (r^2\, 1 - \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}) : \dot{\omega} \otimes \omega\ dV \tag{3.10}$$

Sehingga dengan mengingat kembali definisi tensor inersia persamaan di atas dapat dituliskan :

$$T = \frac{1}{2}\, I(O) : \omega \otimes \omega \tag{3.11}$$

$$= \frac{1}{2}\, \omega \cdot I(O) \cdot \omega \tag{3.12}$$

Jika dinyatakan kedalam momentum sudut H(O),

$$T = \frac{1}{2}\, H(O) \cdot \omega \tag{3.13}$$

Sekarang dimisalkan titik O tidak selamanya diam (tetap), tetapi bergerak dengan kecepatan V. Maka kecepatan dari suatu titik yang mempunyai vektor posisi **r** terhadap O diberikan dengan :

$$v = V + \omega \times \mathbf{r} \tag{3.14}$$

Sehingga energi kinetik dari bendanya :

$$T = \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\, v^2 \, dV$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\, (V + \omega \times \mathbf{r})^2 \, dV \tag{5.15}$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\{V^2 + 2V\cdot(\omega \times \mathbf{r}) + (\omega \times \mathbf{r})^2\}\, dV$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\, V^2 \, dV + \int_V \frac{1}{2}\rho(\mathbf{r})\, (\omega \times \mathbf{r})^2 \, dV$$

$$+ \int_V \rho(\mathbf{r})\, V \cdot (\omega \times \mathbf{r})\, dV \tag{3.16}$$

Karena V tunggal untuk bendanya, maka dapat dikeluarkan dari tanda integrasi, sehingga didapat :

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2}\, I(O) : \omega \otimes \omega + V \times \omega \cdot \int_V \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}\, dV \tag{3.17}$$

dimana :

$$M = \int_V \rho(\mathbf{r})\, dV$$

adalah massa dari benda :

Persamaan (3.17) menyatakan energi kinetik pada kejadian umum dari suatu benda dengan titik O yang bergerak dengan kecepatan V. Akan tetapi rumus ini terlalu umum dalam beberapa penggunaan praktis. Sehingga perlu dibuat perumusan yang lebih sederhana, dengan mengasumsikan titik O berhimpit dengan titik berat G dari benda. Dimana vektor posisi dari titik berat G diberikan dengan rumus integral :

$$\bar{r} = \frac{\int_V \rho(r)\, r\, dv}{\int_V \rho(r)\, dv} \qquad (3.18)$$

Sehingga, jika titik O berhimpit dengan G maka :

$$\int_V \rho(r)\, r\, dv = 0$$

dan persamaan energi kinetik (3.17) menjadi :

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2}\, I(G) : \omega \otimes \omega \qquad (3.19)$$

dimana V sekarang merupakan kecepatan dari titik beratnya dan I(G) adalah tensor inersia yang dihitung pada titik berat tersebut.

Persamaan (3.19) memperlihatkan bahwa energi kinetik dari suatu benda tegar dalam gerak umu disusun dua hal :

(1) Energi kinetik dari suatu partikel tunggal bermassa yang sama dengan energi kinetik dari bendanya, pada kedudukan di titik berat dan bergerak dengan kecepatan dari titik beratnya, dan

(2) Energi kinetik yang dihasilkan karena perputaran bendanya terhadap titik berat.

III.1.3. Komponen-komponen Tensor Inersia

Pandang kembali persamaan (3.4) yang telah didefinisikan tensor inersia,

$$I(O) = \int_V \rho(r)\ (r^2 1 - r \otimes r)\ dV$$

dimana : r menyatakan vektor posisi dari benda terhadap titik O dan 1 adalah tensor satuan. Misalkan vektor posisi r tersebut dinyatakan dengan (x_1, x_2, x_3) maka :

$$r^2 1 - r \otimes r$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_3^2 + x_1^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

Sehingga jika tensor inersia I(O) tersebut dinyatakan dalam komponen-komponennya menjadi :

$$I(O) = \int_V \rho(r) \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_3^2 + x_1^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} dV \qquad (3.20)$$

III.1.4. Momen Inersia (Momen Kelembaman)

Sekarang misalkan n adalah vektor sepanjang sumbu rotasi, maka vektor kecepatan sudutnya dapat dituliskan $\omega = \omega$ n dan persamaan (3.11) dan (3.12) memberikan :

$$T = 1/2\ \mu\ \omega^2 \qquad (3.21)$$

dimana : $\mu = I(O) : n \otimes n \qquad (3.22)$

$$= n\ .\ I(O)\ .\ n \qquad (3.23)$$

Disini ω adalah kelajuan sudut (skalar kecepatan sudut) terhadap sumbu rotasi dan μ adalah momen inersia terhadap sumbu yang sama. Rumus integral untuk μ diberikan oleh (3.7) :

$$\mu = \int_V \rho(r)\ (n \times r)^2\ dV$$

$$= \int_V \rho(r)\ d^2\ dV \qquad (3.24)$$

dimana titik r = 0 berarti terletak pada sumbu rotasi dan d adalah jarak dari suatu titik tertentu ke sumbu rotasi tersebut, yaitu $d = |n \times r|$

Sekarang misalkan bendanya diputar terhadap suatu sumbu utama. Maka vektor n sekarang merupakan vektor karakteristik satuan dan $I(O).n = \lambda n$, dimana λ adalah nilai karakteristik yang bersesuaian. Sehingga dari persamaan (3.23) momen inersianya dapat ditulis dengan :

$$\mu = n.(\lambda\ n) = \lambda$$

Jadi seperti yang telah diberikan pada bagian akhir dari III.1.1., bahwa nilai-nilai karakteristik merupakan momen-momen inersia terhadap sumbu-sumbu utama yang bersesuaian.

Momen inersia terhadap sumbu e_1, dituliskan dengan $e_1 . I(O) . e_1$. Dari persamaan (3.20), momen inersia ini dapat ditulis :

$$e_1 . I(O) . e_1 = \int_V \rho(r)\ (x_2^2 + x_3^2)\ dV = I_{11} \qquad (3.25)$$

Dengan cara yang sama momen-momen inersia terhadap sumbu-sumbu e_2 dan e_3 dapat dituliskan :

$$I_{22} = e_2 . I(O) . e_2 = \int_V \rho(r)\ (x_3^2 + x_1^2)\ dV \qquad (3.26)$$

dan

$$I_{33} = e_3 . I(O) . e_3 = \int_V \rho(r)\ (x_1^2 + x_2^2)\ dV \qquad (3.26)$$

Tampak bahwa momen-momen inersia I_{11}, I_{22} dan I_{33} adalah harga-harga pada diagonal utama dari persamaan (2.20). Untuk momen-momen inersia yang lain dituliskan :

$$I_{ij} = -\int_V \rho(r)\ x_i\ x_j\ dV, \quad i \neq j \qquad (3.28)$$

yang disebut dengan "produk inersia". Bentuk ini akan lenyap jika tensor inersia dihubungkan dengan sumbu-sumbu utama.

III.1.5. Jari-jari Girasi

Istilah lain yang kadang-kadang dijumpai dalam membicarakan tensor inersia adalah jari-jari girasi (radius girasi). Dan istilah ini akan dijelaskan lewat contoh .

Pada bab selanjutnya akan diperlihatkan bahwa momen inersia dari sebuah bola pejal seragam bermassa M dan berjari-jari a, terhadap garis tengahnya, adalah 2/5 Ma^2. Jarak dari sumbu ke suatu partikel tunggal bermassa M yang mempunyai harga momen inersia yang sama terhadap sumbu yang diberikan, merupakan definisi jari-jari girasi k. Sehingga pada contoh ini :

$$\mu = M\,k^2 = 2/5\;M\,a^2$$

$$k = a\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Secara umum jari-jari girasi atau radius girasi ini dituliskan dengan :

$$k = \sqrt{\frac{\mu}{M}}$$

dimana : μ adalah momen inersia dan M menyatakan massa benda.

III.1.6. Ellipsoid Momental

Definisi 3.1.

Untuk suatu benda dengan tensor inersia I(O), hubungan yang dinyatakan dengan :

$$I(O) : r \otimes r = 1$$

Mendefinisikan suatu ellipsoid yang disebut ellipsoid momental.

Karena sumbu-sumbu utama dari ellipsoid berhimpit dengan sumbu-sumbu bendanya, sehingga sehubungan dengan sumbu-sumbu utama ini, persamaan diatas menjadi :

$$I_{11}\;x_2^{\;2} + I_{22}\;x_2^{\;2} + I_{33}\;x_3^{\;2} = 1$$

Contoh 3.1.

(1) Tensor inersia dari suatu benda tegar dengan asal O terhadap sumbu-sumbu yang diberikan, adalah :

$$I(O) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Benda diputar terhadap garis $2x_1 = x_2 = 3x_3$ dengan kelajuan sudut 7. Hitung momen inersia terhadap garis ini, tentukan pula momentum sudut dan energi kinetiknya. Kemudian tuliskan persamaan Cartesian dari semua garis sedemikian hingga jika bendanya diputar terhadap salah satu dari garis-garis tersebut, vektor kecepatan sudut dan vektor momentum sudutnya sejajar. Momen-momen inersia mana sajakah terhadap garis-garis tersebut ?

Penyelesaian :

Diberikan persamaan garis $2x_1 = x_2 = 3x_3$, persamaan ini dapat ditulis :

$$\frac{x_1}{1/2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1/3}$$

Vektor arah dari garis ini (1/2 , 1 , 1/3), sehingga vektor satuan sepanjang garis yang diberikan adalah :

$$n = \frac{(1/2,1,1/3)}{\sqrt{1/2 + 1 + 1/9}} = \frac{1}{7}\ (3,6,2)$$

Sehingga $I(O) \cdot n = 1/7\ (-8,18,9)$

Momen inersia terhadap garis yang diberikan adalah :

$$\mu = n \cdot I(0) \cdot n = \frac{1}{49}(-24 + 108 + 18)$$

$$\mu = \frac{102}{49}$$

Kecepatan sudutnya diberikan dengan :

$$\omega = 7\ n = (3,6,2)$$

Sehingga momentum sudutnya :

$$H(0) = I(0) \cdot \omega = (-8,18,9)$$

dan energi kinetiknya diberikan oleh :

$$T = 1/2\ H(0) \cdot \omega = 51$$

bagian kedua dari soal diatas, dapat diartikan sebagai pendiagonalan matriks tensor inersianya dan menentukan sumbu-sumbu utama dan momen-momen inersianya.

Agar vektor kecepatan sudut dan vektor momentum sudutnya sejajar, harus dipenuhi :

$$I(0) \cdot \omega = \lambda\ \omega$$

atau $[I(0) - \lambda\ 1] \cdot \omega = 0$

Nilai-nilai λ yang memberikan solusi untuk ω, ditentukan dari persamaan karakteristik :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) + 0 + 0 - (4-\lambda) - 0 - 4(6-\lambda) = 0$$

$$(8-6\lambda+\lambda^2)(6-\lambda) - 4 + \lambda - 24 + 4\lambda = 0$$

$$6(\lambda^2-6\lambda+8) - \lambda(\lambda^2-6\lambda+8) + 5\lambda - 28 = 0$$

$$6\lambda^2 - 36\lambda + 48 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda + 5\lambda - 28 = 0$$

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 20 = 0 \quad \text{atau}$$

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 20 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda^2 - 7\lambda + 4) = 0$$

Sehingga didapatkan :

$\lambda = 5$ atau $\lambda = 1/2\ (7 \pm \sqrt{33})$

Ketiga nilai karakteristik λ ini merupakan momen-momen inersia utama, yaitu momen-momen inersia terhadao ketiga sumbu utama.

Untuk $\lambda = 5$, maka :

$$\begin{bmatrix} 2-5 & -2 & -1 \\ -2 & 4-5 & 0 \\ -1 & 0 & 6-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} -3\,\omega_1 - 2\,\omega_2 - \omega_3 &= 0 \\ -2\,\omega_1 - \omega_2 &= 0 \\ -\omega_1 + \omega_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{B_{23}(-2)}{\overset{B_{13}(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{12}(-2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Jadi R(A) = 2

cukup diselesaikan persamaan yang diambil dari (*) :

$$-\omega_2 - 2\omega_3 = 0$$

$$-\omega_1 + \omega_3 = 0$$

Dapat dipilih $n - r = 3 - 2 = 1$ parameter,

misal $\omega_3 = \beta$

maka $\omega_2 = -2\omega_3 = -2\beta$

$\omega_1 = \omega_3 = \beta$

Sehingga $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\beta, -2\beta, \beta)$

$= \beta(1,-2,1)$

Sebagai basis dapat diambil $\omega = (1,-2,1)$

Dengan cara sama untuk $\lambda = 1/2\ (7 \pm \sqrt{33})$ didapat :

$\omega = (-8, 1 \pm \sqrt{33}, 10 \pm \sqrt{33})$. Ketiga vektor ω ini sejajar dengan sumbu-sumbu inersia utama. karena itu persamaan Cartesian dari garis yang melalui asal dan sejajar dengan $H(O)$ dan ω adalah :

$$2x_1 = -x_2 = 2x_3$$

dan $$\frac{-x_1}{8} = \frac{x_2}{1 \pm \sqrt{33}} = \frac{x_3}{10 \pm 2\sqrt{33}}$$

(2) Tensor inersia dari sekeping bidang dengan luas permukaan A dan rapat permukaan σ, diberikan dengan

$$I(O) = \int_A \sigma\ (r)(r^2 1 - r \times r\ )\ dA$$

III.1.7 Persamaan Gerak Euler.

Sekarang akan ditentukan persamaan gerak dari benda tegar terhadap pusat massanya, akibat pengaruh kopel. Pada bagian II.4.2, untuk suatu tensor T, pada kerangka acuan yang berputar dengan kecepatan sudut ω, berlaku :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta T}{\delta t} + \omega \times T - T \times \omega$$

Dimana $\delta T/\delta t$ adalah kecepatan perubahan tensor T dalam kerangka berputar dan cross produk antara vektor dan tensorseperti telah didefinisikan pada bagian II.2.5.

Persamaan gerak dari suatu benda yang berputar terhadap titik beratnya (sentroid) G diberikan dengan

$$\frac{dH(G)}{dt} = \Gamma(G) \tag{3.29}$$

dimana $\Gamma(G)$ momen gaya terhadap G.

Karena $H(G) = I(G).\omega$, maka

$$\Gamma(G) = \frac{d}{dt}\left[I(G).\omega \right] \tag{3.30}$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (2.87) dan mengingat bahwa sumbu putar tetap terhadap bendanya sedemikian hingga $\delta I(G)/\delta t = 0$,

$$\Gamma(G) = I(G).\frac{d\omega}{dt} + \omega \times \left[I(G).\omega \right] \tag{3.31}$$

Misalkan momen inersia dihubungkan dengan sumbu utama, maka persamaan (3.31) mengarah ke tiga buah persamaan skalar :

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_1(G) &= I_{11}\frac{d\omega_1}{dt} + (I_{33} - I_{22})\,\omega_2\,\omega_3 \\
\Gamma_2(G) &= I_{22}\frac{d\omega_2}{dt} + (I_{11} - I_{33})\,\omega_3\,\omega_1 \\
\Gamma_3(G) &= I_{33}\frac{d\omega_3}{dt} + (I_{22} - I_{11})\,\omega_1\,\omega_2
\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Persamaan (3.32) disebut "Persamaan Gerak Euler" dan memberikan komponen-komponen kopel yang berguna untuk mempertahankan kecepatan sudut ω terhadap titik berat. Rumus ini juga berlaku untuk gerak terhadap suatu titik tetap yang tidak berhimpit dengan titik berat.

Kejadian khusus kopel eksternal nol $[\Gamma(G) = 0]$

cukup penting, sebab persamaan gerak dapat ditentukan. Dari persamaan (3.30) :

$$\frac{d}{dt}\left\{ I\ (G)\ .\ \omega \right\} = 0$$

$$\text{yaitu} \quad \frac{d\ H\ (G)}{dt} = 0 \qquad (3.33)$$

Sehingga momentum sudut H(G) adalah konstan. Integral keduanya dapat ditentukan dengan mengambil Γ (G) = 0 pada persamaan (3.31) dan menerapkan perkalian skalar dengan ω. sehingga

$$\omega . I . \frac{d\omega}{dt} + \omega\ [\omega \times I\ (G) . \omega\ ] = 0$$

$$\text{yaitu}\ \omega\ .\ I(G)\ .\ \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\text{atau} \quad \omega\ .\ I(G)\ .\ \omega = \text{konstan} \qquad (3.34)$$

Konstanta pada persamaan (3.34) adalah sama dengan dua kali energi kinetik, yang selanjutnya harganya diawetkan pada kejadian kopel eksternal nol.

Kejadian khusus selanjutnya yang penting adalah bahwa benda mempunyai sumbu simetri. Sehingga bendanya mempunyai dua buah momen inersia utama yang sama terhadap sumbu-sumbu yang tegak lurus dengan sumbu simetri. Oleh karena itu tensor inersianya dapat dituliskan dalam bentuk :

$$I(G) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

dimana sumbu simetrinya adalah sumbu x_3.

Momentum sudutnya diberikan dengan :

$$H(G) = I(G)\ .\ \omega = (A\omega_1 , A\omega_2 , C\omega_3) \qquad (3.36)$$

Sekarang untuk setiap vektor ω :

$$\omega = (\omega \cdot e_3)e_3 - (\omega \times e_3) \times e_3$$

Komponen dari ω sepanjang sumbu simetri disebut spin, yang umumnya dinotasikan dengan n.

Sehingga $\omega = n\, e_3 - (\omega \times e_3) \times e_3$

Dari persamaan (3.36) :

$$H(G) = Cne_3 + Ae_3 \times (\omega \times e_3)$$

Sekarang e_3 adalah sumbu tetap pada bendanya.

Sehingga $\omega \times e_3 = de_3/dt$, maka

$$H(G) = Cne_3 + Ae_3 \times \frac{de_3}{dt} \qquad (3.37)$$

Akhirnya dengan mendefferensialkan persamaan (3.37) diperoleh :

$$\Gamma(G) = C\frac{dn}{dt}e_3 + Cn\frac{de_3}{dt} + A\,e_3 \times \frac{d^2e_3}{dt^2} \qquad (3.38)$$

Contoh 3.2.

Suatu benda diputar dengan kecepatan sudut tetap ω terhadap suatu sumbu sembarang yang melalui titik beratnya. Tentukan kopel yang diperlukan untuk mengawetkan/mempertahankan gerak ini !

Penyelesaian :

Persamaan gerak Euler dengan ω = konstan adalah

$$\Gamma(G) = \omega \times [\, I(G).\omega \,]$$

atau

$$\Gamma_1 = (I_{33} - I_{22})\,\omega_2\,\omega_3$$

$$\Gamma_2 = (I_{11} - I_{33})\,\omega_3\,\omega_1$$

$$\Gamma_3 = (I_{22} - I_{11})\,\omega_1\,\omega_2$$

Persamaan ini memberikan komponen-komponen kopel yang mempertahankan gerak, terhadap sumbu utama dari bendanya.

III.2. Teorema Dasar Penghitungan Tensor Inersia

Sebelum membahas penghitungan tensor inersia dari benda-benda atau bangun-bangun geometri standar, terlebih dahulu dibahas teorema-teorema yang merupakan dasar penghitungan tensor inersia.

Dengan teorema-teorema ini , dapat dituliskannya tensor inersia dari suatu benda pada suatu titik O yang dinyatakan kedalam tensor inersia pada titik berat G dari bendanya.

III.2.1. Teorema Sumbu Sejajar.

Inti daripada teorema Sumbu Sejajar ini adalah dapat dituliskannya momen inersia terhadap suatu sumbu yang melalui suatu titik tertentu O yang dinyatakan kedalam tensor inersia terhadap sumbu sejajar yang melalui titik berat G dari benda.

Teorema 3.1.

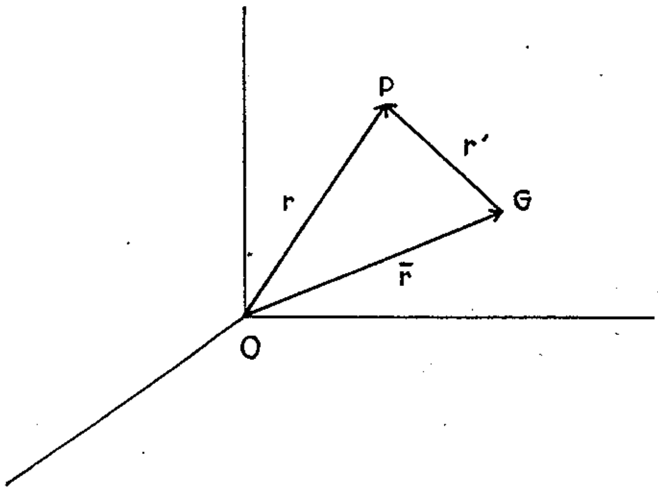
Diberikan suatu benda tegar dengan massa M dan titik berat (sentroid)-nya G, tensor inersia pada titik O dituliskan dengan :

$$I(O) = I(G) + M\,(\bar{r}^{\,2}\, I - \bar{r} \otimes \bar{r}\,) \tag{3.39}$$

dimana $\bar{r}$ adalah vektor posisi dari G terhadap O.

Bukti :

Pandang gambar dibawah ini.



Gambar 3.1

Misalkan P adalah titik dengan vektor posisi **r** terhadap titik O (gambar 3.1) dan misalkan **r**'= GP. Maka dipenuhi

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$$

atau $\quad \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + r'$

Sehingga tensor inersia dari suatu benda pada titik O dapat dituliskan dengan :

$$I(O) = \int_V \rho(r)\ (r^2\ 1 - r \otimes r\ )\ dV$$

$$= \int_V \rho(r) \left\{ (\bar{r} + r')^2\ 1 - (\bar{r} + r') \otimes (\bar{r} + r') \right\} dV$$

$$= \int_V \rho(r) \left\{ (\bar{r}^{\,2} + 2\,\bar{r}.r' + r'^2)1 - (\bar{r}\otimes\bar{r} + \bar{r} \otimes r' + r'\otimes\bar{r} + r'\otimes r') \right\} dV$$

$$= \int_V \rho(r) \left\{ (\bar{r}^{\,2} + 2\,\bar{r}.r')1 - (\bar{r} \otimes \bar{r} + \bar{r} \otimes r' + r'\otimes \bar{r}) \right\} dV$$

$$+ \int_V \rho(r)\ (r'^2\ 1 - r' \otimes r')\ dV$$

$$= I(G) + \int_V \rho(r)\left\{(\bar{r}^2 + 2\bar{r}.r')1 - (\bar{r} \otimes \bar{r} + \bar{r} \otimes r' + r' \otimes \bar{r})\right\} dV$$

$$= I(G) + \int_V \rho(r)(\bar{r}^2 1 - \bar{r} \otimes \bar{r})\, dV + \int_V \rho(r)(2\bar{r}.r' - \bar{r} \otimes r' - r' \otimes \bar{r}) dV$$

$$\mathbf{I}(O) = I(G) + M\,(\bar{r}^2 1 - \bar{r} \otimes \bar{r}) + \int_V \rho(r)(2\bar{r}.r' - \bar{r} \otimes r' - r' \otimes \bar{r})\, dV$$

Bentuk integral diruas kanan akan lenyap, karena seperti dalam bagian III.1.2, integral :

$$\int_V \rho\,(r) r'\, dV = 0$$

yaitu merupakan faktor bersama dari O dan G (diasumsikan O berhimpit dengan G). Sehingga didapatkan :

$$I(O) = I(G) + M\,(\bar{r}^2\, 1 - \bar{r} \otimes \bar{r})$$

Teorema terbukti.

Persamaan (3.39) diatas memberikan rumus yang sederhana untuk menentukan tensor inersia pada titik O yang dinyatakan ke dalam tensor inersia pada titik berat G dari benda.

Dari bentuk persamaan (3.39) untuk suatu vektor satuan **n**, maka :

$$I(O).n = I(G).n + M\,(\bar{r}^2\, 1 - \bar{r} \otimes \bar{r})\, .\, n$$
$$= I(G).n + M\,[\bar{r}^2\, n - \bar{r}\,(\bar{r}\, .\, n)]$$

Sehingga $n.I(O).n = n.I(G).n + M\,[\bar{r}^2 - (\bar{r}\, .\, n)^2]$

Misalkan $\mu\,(O)$ = **n.I(O).n**, yaitu momen inersia terhadap suatu sumbu yang melalui titik O dan sejajar dengan vektor satuan **n**. Dan misalkan pula $\mu(G)$ = **n.I(G).n**, momen inersia terhadap sumbu sejajar yang melalui G.

Maka persamaan diatas menjadi :

$$\mu(O) = \mu(G) + M\,[\bar{r}^{\,2} - (\bar{r} \cdot n)^2]$$
$$= \mu(G) + M\,(n \times \bar{r})^2 \qquad (3.40)$$

Kita tahu bahwa $|n \times \bar{r}|$ adalah jarak tegak lurus antara dua buah sumbu sejajar. Jika jarak ini dimisalkan d maka persamaan (3.40) menjadi :

$$\mu(O) = \mu(G) + M\,d^2 \qquad (3.41)$$

Dimana kedua pernyataan pada persamaan (3.40) atau (3.41), menyatakan momen inersia dari suatu partikel tunggal bermassa M, pada kedudukan di G, terhadap suatu sumbu yang melalui titik O yang sejajar dengan vektor satuan n.

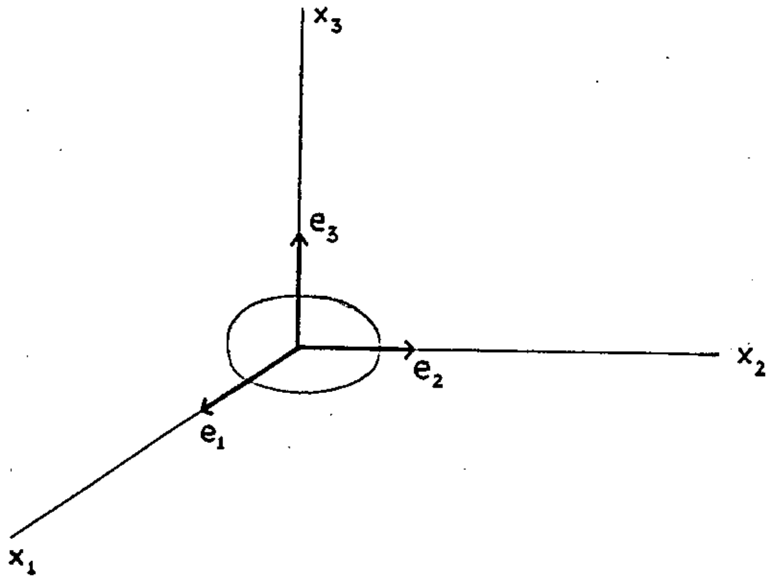
III.2.2. Teorema Sumbu Tegak Lurus untuk Keping

Teorema sumbu tegak lurus ini hampir sama dengan teorema sumbu sejajar yang telah diberikan dimuka. Hanya saja penerapannya lebih terbatas daripada teorema pertama. Yaitu hanya pada keping (=pelat tipis), lagi pula teorema ini lebih menekankan pada momen inersia daripada tensor inersianya.

Teorema 3.2.

Momen inersia dari suatu keping seragam, terhadap suatu sumbu yang tegak lurus dengan bidangnya, adalah sama dengan jumlahan momen-momen inersia terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus di dalam bidang.

Bukti :



Gambar 3.2.

Misalkan sumbu x_1, sumbu x_2 dilukiskan pada bidang dan sumbu x_3 dilukiskan tegak lurus dengan bidang (Gambar 3.2). Dari persamaan (3.20) dan mengingat bahwa $x_3 = 0$ pada keping, maka :

$$I(O) = \int_A \sigma \begin{bmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 & 0 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} dA \qquad (3.42)$$

dimana : A adalah luas lamina dan σ adalah rapat permukaan, dan dianggap konstan.

Dari persamaan (3.42) tampak bahwa :

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \quad . \qquad (3.43)$$

Teorema terbukti.

Contoh 3.2.

(1) Diberikan suatu benda dengan massa M dan titik beratnya G. Tensor inersia **I**(G) diberikan dengan :

$$I(G) = M \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

dan G adalah titik (1,0,0).

Hitunglah tensor inersia pada titik asal.

Penyelesaian :

Dari teorema sumbu sejajar, didapat :

$$I(O) = I(G) + M(\bar{r}^2 1 - \bar{r} \otimes \bar{r})$$

dimana :

$$\bar{r} = (1,0,0) - (0,0,0)$$

$$= (1,0,0) = e_1$$

Maka :

$$\bar{r}^2 1 - \bar{r} \otimes \bar{r} = 1 - e_1 \otimes e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat :

$$I(O) = M \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Momen inersia dari lingkaran cakram seragam bermassa M dan jari-jari a, terhadap sumbunya adalah : 1/2 Ma^2. Tentukan momen inersia terhadap garis tengahnya.

Penyelesaian :

Karena sifat simetris dari cakram maka momen inersianya sama terhadap semua garis tengahnya. Pada khususnya momen inersia ini sama terhadap dua garis tengah yang saling tegak lurus.

Sehingga dari teorema Sumbu Tegak Lurus, momen inersia terhadap garis tengah ini adalah 1/4 Ma^2.