BAB II

TENSOR-TENSOR CARTESIAN

II.1. Tensor Cartesian Order Dua

Pada bagian terdahulu telah dijelaskan, tensor Cartesian order-n, dalam ruang Euclid dimensi-3, didefinisikan sebagai himpunan atau kumpulan yang terdiri atas 3^n komponen, dimana komponennya memenuhi persamaan tensor umum, akan tetapi transformasinya hanya atas transformasi koordinat orthogonal. Jadi tensor Cartesian order dua ini akan mempunyai $3^2 = 9$ komponen.

Di bawah ini akan diperlihatkan bagaimana fungsi vektor linier mendefinisikan tensor Cartesian order dua ini.

II.1.1. Fungsi Vektor Linier.

Dalam bab III akan diperlihatkan bahwa momentum anguler (momentum sudut) H, dari suatu benda kaku yang berputar dengan kecepatan sudut ω, dapat dituliskan sebagai fungsi vektor $I.\omega$ dari vektor ω, yang memenuhi hubungan :

$$I.(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 I \omega_1 + \lambda_2 I \omega_2 \qquad (2.1)$$

untuk setiap pasangan bilangan λ_1, λ_2.

Fungsi demikian disebut sebagai fungsi vektor linier dari vektor. Dengan setiap vektor ω menentukan vektor $I.\omega$.

Contoh 2.1.

(1) Diberikan $F(v) = v$, dengan v suatu vektor mendefinisikan fungsi vektor linier F, karena v adalah vektor linier dalam v.

(2) $F(v) = a.v$, dengan a, v merupakan vektor tidak mendefinisikan fungsi vektor linier karena $a.v$ bukan vektor.

(3) $F(v) = a + v$, dengan a suatu konstanta, tidak mendefinisikan fungsi vektor linier, karena $a + v$ tidak linier pada v, menurut definisi :

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)$$

II.1.2. Dyad : Bentuk Dasar Tensor Order Dua

Misalkan a, b, c adalah vektor–vektor dengan a, b tetap dan c dimisalkan berubah- ubah. Pandang vektor T.c yang didefinisikan dengan :

$$T.c = a(b.c) \tag{2.2}$$

Sesuai dengan persamaan (2.1), maka T.c linier pada c karena dipenuhi :

$$a\,[b.(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)] = \lambda_1 a(b.c_1) + \lambda_2 a(b.c_2) \tag{2.3}$$

Sehingga T.c merupakan fungsi linier dari vektor c. Dan besaran T didefinisikan sebagai tensor order dua.

Didefinisikan simbol baru $\otimes$, dan untuk setiap vektor a, b, c dituliskan :

$$(a \otimes b).c = a(b.c) \tag{2.4}$$

Karena ruas kanan persamaan (2.4) merupakan vektor, maka ruas kiri juga merupakan vektor. Sehingga besaran $(a \otimes b).c$ merupakan fungsi vektor linier dari vektor c. Jadi $a \otimes b$ merupakan tensor. Dan tensor $a \otimes b$ ini disebut dyad atau produk tensor dari dua vektor.

Dari definisi dyad dalam persamaan (2.4), jumlahan dari dua dyad dan produk dyad dengan skalar diberikan dengan :

$$(\lambda_1 a_1 \otimes b_1 + \lambda_2 a_2 \otimes b_2).c = \lambda_1 a_1 (b_1 . c) + \lambda_2 a_2 (b_2 . c) \qquad (2.5)$$

Produk tensor yang dilambangkan dengan $\otimes$ ini, memenuhi sifat komutatif dan distributif.

II.1.3. Komponen-komponen Tensor Order Dua

Diberikan vektor v, maka sesuai definisi dalam bagian II.1.2, T.v merupakan vektor. Khususnya untuk vektor satuan e_1, maka $T.e_1$ juga merupakan vektor, sehingga dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis e_1, e_2 dan e_3. Maka untuk semua bilangan α, β, γ berlaku :

$$T.e_1 = \alpha\, e_1 + \beta\, e_2 + \gamma\, e_3 \qquad (2.6)$$

atau, dengan mengganti bilangan-bilangan α, β, γ

$$T.e_1 = T_{11} e_1 + T_{21} e_2 + T_{31} e_3$$

yaitu $T.e_i = T_{ki}\, e_k$ (2.7)

Akan diperlihatkan tensor order dua T dapat dinyatakan sebagai jumlahan 9 buah dyad :

$$T = T_{ki} e_k \otimes e_i \qquad (2.8)$$

maka $T.e_m = T_{ki} (e_k \otimes e_i).e_m$

$= T_{ki} e_k (e_i . e_m)$

$= T_{km}\, e_k$

Sehingga $T.e_i = T_{ki}\, e_k$

Dari persamaan (2.7)

$$T_{ki}\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m \cdot (T \cdot \mathbf{e}_i)$$

yaitu $T_{mi} = \mathbf{e}_m \cdot (T \cdot \mathbf{e}_i)$ (2.9)

Bilangan-bilangan T_{mi} disebut komponen-komponen dari tensor T dalam basis $\mathbf{e}_i$. Dituliskan dalam bentuk matriks :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Dimana T_{mi} adalah elemen dalam baris ke-m dan kolom ke-i. Dalam R^3 skalar mempunyai satu ($=3^0$) komponen, vektor mempunyai tiga ($=3^1$) komponen dan tensor order dua mempunyai $9(=3^2)$ komponen. Jadi untuk tensor order-n akan mempunyai 3^n komponen.

II.1.4. Komponen-komponen Dyad

Dalam bagian (II.1.3) telah diperlihatkan komponen-komponen tensor order dua. Sesuai dengan pengertian ini akan diperlihatkan komponen- komponen dyad **a ⊗ b**. Dari persamaan (2.9) didapat:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ik} &= \mathbf{e}_i\ [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k] \\ &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} b_k) \\ &= a_i b_k \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dalam bentuk matriks menjadi :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

II.1.5. Komponen-komponen dari Perkalian Titik antara Tensor dan Vektor.

Pada bagian terdahulu telah dijelaskan bahwa T.v, yaitu perkalian titik antara tensor T dan vektor v merupakan vektor. Sekarang akan diperlihatkan komponen-komponen dari vektor T.v ini.

Dari persamaan (2.7) :

$$\begin{aligned} T.v &= T_{ki}\ (e_k \otimes e_i).v \\ &= T_{ki}\ e_k\ v_i \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$(T.v)_k = T_{ki}\ v_i \tag{2.13}$$

Dituliskan dalam bentuk matriks menjadi :

$$T.v = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3 \\ T_{21}v_1 + T_{22}v_2 + T_{23}v_3 \\ T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + T_{33}v_3 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Perkalian titik (Dot Product) dari tensor dan vektor memenuhi sifat komutatif, distributif dan assosiatif.

II.1.6. Sifat-sifat Tensor Order Dua

Dua buah tensor dikatakan sama jika perkalian-perkalian titik dari kedua tensor tersebut dengan vektor-vektor yang mungkin adalah sama, yaitu :

$$S = T \text{ jika dan hanya jika } S.a = T.a,\ \forall a \tag{2.15}$$

Jumlahan dari dua tensor S dan T dituliskan S + T, dimana berlaku :

$$(S + T).a = S.a + T.a, \forall a \tag{2.16}$$

Tensor nol dituliskan dengan S, dimana :

$$S.a = 0, \forall a \tag{2.17}$$

Tensor satuan dituliskan dengan 1, dimana :

$$1.a = a, \forall a \tag{2.18}$$

Contoh 2.2.

(1) Dalam notasi matriks :

$$e_1 \otimes e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Diberikan :

$a = (1,3,4)$, $b = (2,-1,-2)$, $c = (2,1,0)$

maka

$$a \otimes b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & -6 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

dan $(a \otimes b).c = (3,19,12) = a(b.c)$

(3) Tidak setiap tensor dapat dinyatakan sebagai dyad tunggal. Untuk memperlihatkan hal ini cukup diselidiki dengan counter-example (contoh dengan penyangkalan). Pandang tensor satuan :

$$1 = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$$

Andaikan 1 dapat dinyatakan sebagai dyad tunggal $a \otimes b$. Maka :

$$1.e_1 = a(b.e_1) = ab_1 = e_1$$

$$1.e_2 = a(b.e_2) = ab_2 = e_2$$

Kontradiksi, sebab a tidak mungkin sejajar dengan e_1

dan e_2 sekaligus.

II.1.7. Perkalian Muka dan Perkalian Belakang dari Tensor dan Vektor.

Pada bagian II.1.5. telah didefinisikan perkalian titik (dot product) dari tensor dan vektor, dengan komponen-komponennya diberikan oleh persamaan (2.13). Produk dimana vektor muncul (dihasilkan) dari perkalian titik antara tensor dan vektor dinamakan perkalian belakang.

Definisi 2.1.

Diberikan tensor order dua T dan suatu vektor a, dibentuk produk baru dengan hubungan :

$$(a.T).c = a.(T.c) \quad , \quad \forall c \qquad (2.19)$$

Produk demikian disebut perkalian muka.

a.T adalah vektor yang komponen- komponennya dapat ditentukan dengan memisalkan $c = e_i$. Sehingga,

$$(a.T)_i = a.(T_{ki} \cdot e_k)$$
$$= a_k \; T_{ki}$$

Ditulis dalam bentuk matriks :

$$a.T = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$= (a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31} , \; a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32} ,$$
$$a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33})$$

II.1.8. Tensor Transpose.

Misalkan tensor T dinyatakan dengan jumlahan dari dyad-dyad :

$$T = a \otimes b + c \otimes d + \ldots. \qquad (2.21)$$

Tensor T', yang dinyatakan dengan jumlahan dyad-dyad :

$$T' = b \otimes a + d \otimes c + \ldots. \qquad (2.22)$$

disebut "Transpose dari tensor T".

Untuk memperlihatkan bahwa definisi ini bebas terhadap jumlahan dari dyad-dyad yang dipilih untuk menyatakan T, pilih suatu vektor v dan dibentuk perkalian titik (dot product) :

$$\begin{aligned} T'.v &= (b \otimes a + d \otimes c + \ldots.).v \\ &= b(a.v) + d(c.v) + \ldots. \\ &= b(v.a) + d(v.c) + \ldots. \\ &= (v.a)b + (v.c)d + \ldots. \\ &= v . (a \otimes b + c \otimes d + \ldots.) \end{aligned}$$

Sehingga $T'.v = v.T$ (2.23)

dan berlaku untuk semua v.

Komponen-komponen Cartesian dari T' dapat ditentukan dengan menuliskan $a = a_i e_i$ dan seterusnya. Sehingga :

$$T' = (b_i a_k + d_i c_k + \ldots.)\, e_i \otimes e_k \qquad (2.24)$$

Oleh karena itu :

$$T'_{ik} = b_i a_k + d_i c_k + \ldots.$$

$$= a_k b_i + c_k d_i + \ldots.$$

$$= T_{ki} \qquad (2.25)$$

Jadi komponen-komponen dari T′ dalam setiap basisnya ditentukan oleh komponen-komponen dari **T**.

Contoh 2.3.

(1) Diberikan suatu tensor T dalam bentuk matrik :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Maka tensor transpose dari adalah :

$$T' = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

(2) Transpose dari transpose suatu tensor adalah tensor itu sendiri, yaitu :

$$(T')' = T.$$

II.1.9. Tensor Simetri dan Antisimetri.

Definisi 2.2.

Suatu tensor yang sama dengan transposenya disebut tensor simetri, yaitu $T = T'$.

Karena $T = T'$, maka dari persamaan (2.25), didapatkan :

$$T_{ki} = T_{ik} \qquad (2.26)$$

Sehingga ditulis dalam bentuk matriks :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Jadi tensor simetri hanya mempunyai enam buah komponen bebas.

Contoh-contoh tensor simetri, tensor tegangan (strain tensor), tensor regangan (stress tensor), tensor inersia, dan sebagainya..

Definisi 2.3.

Suatu tensor yang mempunyai harga yang sama dengan negatif dari transposenya dikatakan antisimetri atau skew-simetri.

Sesuai definisi di atas maka untuk suatu tensor anti simetri T berlaku :

$$T = - T' \tag{2.28}$$

$$T_{ki} = - T_{ki} \tag{2.29}$$

Dalam bentuk matriks menjadi :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

untuk setiap tensor antisimetri T.

Dicatat bahwa elemen-elemen tensor antisimetri pada diagonal utamanya sama dengan nol dan tensor antisimetri hanya memiliki 3 buah komponen bebas.

Teorema 2.1.

Setiap tensor order dua dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari tensor simetri dan tensor antisimetri.

Bukti :

Misalkan kita dapat mengerjakan hal di atas maka untuk setiap tensor order dua T dapat dituliskan :

$$T = S + A \tag{2.31}$$

dimana : S = tensor simetri dan A = tensor antisimetri dengan sifat-sifat $S = S'$ dan $A = -A'$. Dengan mengambil transpose dari (2.31), didapat :

$$T' = S - A \tag{2.32}$$

Dari persamaan (2.31) dan persamaan (2.32) didapat :

$$S = 1/2\ (T + T')$$

$$A = 1/2\ (T - T')$$

Sehingga $T = 1/2\ (T + T') + 1/2(T - T')$ (2.33)

Teorema tebukti.

Contoh 2.4.

(1) Tensor-tensor 1, $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$, $a \otimes b + b \otimes a$ adalah tensor-tensor simetri, sedangkan tensor-tensor $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$, $a \otimes b - b \otimes a$, adalah anti simetri.

(2) Pada umumnya tensor $a \otimes b$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan tensor simetri dan tensor antisimetri. Bagian simetrinya adalah $1/2\ (a \otimes b + b \otimes a)$, dan bagian antisimetrinya $1/2\ (a \otimes b - b \otimes a)$.

II.1.10 Invariant-invariant Skalar dari Tensor Order Dua.

Diberikan tensor order dua T, misalkan T dapat dituliskan sebagai $T = S - \lambda \mathbf{1}$, dimana S adalah tensor order dua, $\mathbf{1}$ tensor satuan dan λ suatu bilangan. Determinan dari T dituliskan :

$$\det T = \begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

Sehingga jika diuraikan dinyatakan dalam pangkat λ diperoleh :

$$\det T = -\lambda^3 + \lambda^2 \, (S_{11} + S_{12} + S_{13})$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} S_{33} & S_{31} \\ S_{13} & S_{11} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{33} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \tag{2.35}$$

Definisi 2.4.

Invariant pertama I_1 didefinisikan sebagai koefisien dari λ^2. Dituliskan :

$$I_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33}$$

$$\text{atau} \quad I_1 = S_{ii} \tag{2.36}$$

dimana S_{ii} disebut trace dari tensor S, dan dituliskan dengan Tr(S).

Definisi 2.5.

Invariant kedua, I_2 didefinisikan sebagai negatif dari pada koefisien λ, yaitu :

$$I_2 = S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32} + S_{33}S_{11} - S_{13}S_{31} + S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \qquad (2.37)$$

Definisi 2.6.

Invariant ketiga, I_3, didefinisikan sebagai determinan S, ditulis :

$$I_3 = \det S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.38)$$

Atau dengan menjabarkan persamaan (2.38) diperoleh :

$$I_3 = S_{11}(S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32}) + S_{12}(S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33}) + S_{13}(S_{21}S_{32} - S_{22}S_{31})$$

$$I_3 = S_{11}S_{22}S_{33} + S_{12}S_{23}S_{31} + S_{13}S_{21}S_{32} - S_{11}S_{23}S_{32} - S_{22}S_{13}S_{31} - S_{33}S_{12}S_{21}.$$

II.1.11. Inner Product (Perkalian Dalam) dari Dua Tensor - Kontraksi

Pandang perkalian titik (dot product) antara dua vektor a dan b, dengan konvensi jumlah seperti telah dijelaskan pada BAB I, produk ini dituliskan :

$$a.b = a_i b_i \qquad (2.39)$$

Dalam bagian II.1.5. juga telah diperlihatkan dot product antara tensor dan vektor, yang dituliskan :

$$(T.v)_k = T_{ki} \; v_i \tag{2.40}$$

Pada setiap kejadian, suffix berulangnya adalah adjacent (berdekatan). Suffix-suffix berdekatan sedemikian disebut suffix dalam dan perkalian titiknya disebut perkalian dalam (inner product). Simbol dot (titik) ini, selanjutnya akan digunakan untuk menyatakan inner product dari dua tensor.

Definisi 2.7.

Misalkan S dan T adalah dua buah tensor dan v suatu vektor, maka perkalian dalam (inner product) dari S dan T dituliskan dengan :

$$(S.T).v = S.(T.v) \;, \forall \; v \tag{2.41}$$

Ruas kanan persamaan (2.41) adalah vektor linier dalam v oleh karena itu ruas kirinya juga merupakan vektor linier dalam v. Sehingga inner product S.T merupakan tensor order dua. Komponen-komponen dari S.T dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
(S.T)_{ik} &= e_i \; (S.T).e_k \\
&= e_i \,.\, [\; S.(T.e_k) \;] \\
&= e_i \,.\, [\; S.T_{mk} \; e_m \;] \\
&= e_i \,.\, (\; S_{pm} \; e_p \; T_{mk} \;) \\
&= S_{im} \; T_{mk}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Tampak bahwa suffix dalamnya yang diulang.

Ketiga inner product yang telah dinyatakan oleh persamaan-persamaan (2.39), (2.40) dan (2.42), semuanya menyatakan kejadian-kejadian utama dari suatu proses yang dikenal sebagai *"Kontraksi"*. Yaitu proses dimana dua index dari tensor-tensor yang ada diambil yang sama dan dijumlahkan. Oleh karena itu jumlahan dari suffix-suffix bebasnya dikurangi dengan dua, yang sesuai dengan pengurangan pada jumlahan order-order. Order-order tensor pada ruas kanan persamaan-persamaan (2.39), (2.40) dan (2.42) masing-masing diberikan dengan :

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 1 - 2 = 0 \\ 2 + 1 - 2 = 1 \\ 2 + 2 - 2 = 2 \end{array}\right\} \qquad (2.43)$$

Produk dalam (Inner Product) dari tensor berlaku sifat komutatif dan assosiatif.

Definisi 2.8.

Inner Product Ganda (Double Inner Product) dari dua tensor S dan T dituliskan dengan :

$$S : T = Tr\ (S.T) \qquad (2.44)$$

Sehingga $S : T = S_{im}\ T_{mi}$ (2.45)

Pada bagian II.1.10 telah diperlihatkan bahwa trace suatu tensor merupakan invariant skalar. Oleh karena itu, titik dua menyatakan suatu kontraksi ganda dimana jumlahan order-ordernya dikurangi dengan empat.

II.1.12. Nilai Karakteristik.

Permasalahan nilai karakteristik adalah suatu permasalahan menetukan nilai skalar λ dimana persamaan linier :

$$T \cdot v = \lambda\, v \qquad (2.46)$$

mempunyai solusi non trivial untuk suatu vektor v. Nilai λ dimana solusi persamaan (2.46) ada, disebut nilai karakteristik dari tensor T. Vektor v yang merupakan solusi persamaan (2.46) disebut vektor karakteristik. Dan sesuai definisi vektor karakteristiknya tidak nol.

Dalam bentuk komponen persamaan (2.46) dapat dituliskan :

$$T_{ik} v_k = \lambda\, v_i = \lambda\, \delta_{ik} v_k$$

$$(T_{ik} - \lambda\, \delta_{ik})\, v_k = 0 \qquad (2.47)$$

Dimana persamaan (2.47) ini menyatakan tiga buah persamaan homogen :

$$\left.\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) v_1 + T_{12} v_2 + T_{13} v_3 &= 0 \\ T_{21} v_1 + (T_{22} - \lambda) v_2 + T_{23} v_3 &= 0 \\ T_{31} v_1 + T_{32} v_2 + (T_{33} - \lambda) v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.48)$$

dalam v_1, v_2, v_3 yang tak diketahui.

Ditulis dalam bentuk matriks persamaan (2.48) menjadi :

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.49)$$

Dari teori persamaan linier homogen solusi non trivial dari persamaan (2.48) ada, jika dan hanya jika

$$\Delta = \det\, (T_{ik} - \lambda\, \delta_{ik}) = 0 \qquad (2.50)$$

yaitu :

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.51)$$

atau $| T - \lambda 1 | = 0$ (2.52)

yang disebut dengan persamaan karakteristik.

II.1.13. Pendiagonalan Tensor Simetri.

Pandang suatu tensor simetri dengan basisnya yang terdiri atas tiga vektor karakteristiknya. Misalkan vektor-vektor karakteristiknya adalah e_1, e_2 dan e_3, maka persamaan vaktor karakteristiknya (2.46), manjadi :

$$\left.\begin{aligned} T\,e_1 &= T_{i1} e_i = \alpha\, e_1 \\ T\,e_2 &= T_{i2} e_i = \beta\, e_2 \\ T\,e_3 &= T_{i3} e_i = \gamma\, e_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.53)$$

Solusi dari ketiga persamaan vektor (2.53) di atas :

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad (2.54)$$

Tensor T pada (2.54), dimana semua elemen tak nolnya berada pada diagonal utama, disebut tensor diagonal. Proses yang berhubungan dengan tensor simetri dengan basis yang terdiri atas vektor-vektor karakteristiknya dikenal sebagai pendiagonalan tensor.

Contoh 2.5.

Tentukan semua nilai karakteristik dan vektor karakteristik dari tensor simetris real

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan tuliskan tensor dengan basis yang terdiri atas vektor-vektor karakteristiknya (tensor diagonal).

Penyelesaian :

Persamaan karakteristiknya :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda) - (3-\lambda) + 4\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) - 3 + 5\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - \lambda(\lambda^2 - 3\lambda) - 3 + 5\lambda = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3 = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \text{atau}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 3) = 0$$

Sehingga didapat nilai-nilai karakteristiknya :

$\lambda_1 = -1$ dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.3}}{2 \,.\, 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\lambda_2 = 1/2\ (5 + \sqrt{13}) \quad , \quad \lambda_3 = 1/2\ (5 - \sqrt{13})$$

Vektor-vektor karakteristiknya,

Untuk $\lambda_1 = -1$, maka :

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 2 & 1 \\ 2 & 3-(-1) & 0 \\ 1 & 0 & -(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga didapat :

$$\begin{aligned} 2u_1 + 2u_2 + u_3 &= 0 \\ 2u_1 + 4u_2 \quad &= 0 \\ u_1 \quad + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{13}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Jadi $R(A) = 2$

Cukup diselesaikan persamaan yang diambil dari (*) :

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 \quad &= 0 \\ u_1 \quad + u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dapat dipilih $n - r = 3 - 2 = 1$ parameter, misal $u_1 = \alpha$

maka, $2u_2 = -\alpha \longrightarrow u_2 = -1/2\,\alpha$

$u_3 = -\alpha$

Sehingga $u = (u_1, u_2, u_3) = (\alpha, -1/2\,\alpha, -\alpha)$

$= \alpha\,(1, -1/2, -1)$

$= \beta\,(2, -1, -2)$

Dengan cara sama, untuk $\lambda = 1/2\,(5 \pm \sqrt{13})$ didapat :

$v = \gamma\,(5+\sqrt{13}, 6+2\sqrt{13}, 2)$

$w = \mu\,(5-\sqrt{13}, 6-2\sqrt{13}, 2)$

Sehingga vektor-vektor karakteristiknya dapat diambil

$u = (2, -1, -2)$

$v = (5+\sqrt{13}, 6+2\sqrt{13}, 2)$

$w = (5-\sqrt{13}, 6-2\sqrt{13}, 2)$

Tampak bahwa :

$u \cdot v = v \cdot w = w \cdot u = 0$

Tensor diagonalnya :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2(5+\sqrt{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(5-\sqrt{13}) \end{bmatrix}$$

II.2. Tensor Cartesian Order Tiga.

Pada bagian terdahulu telah diperlihatkan bahwa tensor order dua didefinisikan dengan menuliskannya dalam tiga buah vektor yang bebas linier. Metode pendefinisian ini akan diperluas untuk mendefinisikan tensor-tensor order lebih tinggi ; tensor-tensor order n digunakan untuk mendefinisikan tensor-tensor order (n + 1).

Definisi 2.9.

Misal v_1, v_2, v_3 vektor-vektor yang bebas linier dan T_1, T_2, T_3 tensor-tensor order dua. Suatu tensor **B**, yang memenuhi hubungan :

$$B \cdot v_i = T_i \quad , \quad i = 1,2,3 \tag{2.55}$$

adalah tensor order tiga, apabila dot product $B \cdot v_i$ didefinisikan dengan menuliskannya dalam :

$$(a \otimes b \otimes c) \cdot v = (a \otimes b)(c.v) \quad , \forall\ v \tag{2.56}$$

Persamaan (2.56) selain mendefinisikan dot product di ruas kiri juga mendefinisikan produk tensor dari tiga vektor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$. Dimana produk tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ merupakan tensor order tiga.

II.2.1. Komponen-komponen Tensor Order Tiga.

Akan diperlihatkan setiap tensor order tiga dapat dituliskan sebagai jumlahan dari 27 produk tensor dari tiga vektor. Dari persamaan (2.55), jika B tensor order tiga, maka $B.\mathbf{e}_m$ adalah tensor order dua,

yaitu $\quad B.\mathbf{e}_m = B_{ikm}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ (2.57)

dimana $\quad B_{ikm} = \mathbf{e}_i \cdot (B.\mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_k$ (2.58)

Persamaan (2.57) dan (2.58) dipenuhi jika :

$$B = B_{ikm}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \qquad (2.59)$$

Sehingga B dapat dituliskan sebagai jumlahan dari produk-produk tensor dari 3 vektor. ke-27 bilangan B_{ikm} adalah komponen-komponen tensor order tiga B, yang dituliskan secara eksplisit dengan persamaan (2.58).

II.2.2. Produk-produk Tensor Order Tiga.

Komponen-komponen perkalian belakang inner product dari tensor order tiga dengan suatu vektor dapat dinyatakan dari persamaan (2.57), sehingga :

$$B \cdot v = B \cdot (v_m\, \mathbf{e}_m) \qquad (2.60)$$
$$= B_{km}\, v_m\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

Oleh karena itu

$$(B \cdot v)_{ik} = B_{ikm}\, v_m \qquad (2.61)$$

Komponen-komponen perkalian muka dari tensor order tiga dengan suatu vektor didefinisikan :

$$(v \,.\, B)_{ik} = v_m \,.\, B_{ikm} \tag{2.62}$$

Double inner product dari suatu tensor order tiga B dan suatu tensor order dua T adalah tensor dengan order 3 + 2 − 2 − 2 = 1, yaitu suatu vektor. Komponen-komponen dari vektor ini didefinisikan dengan :

$$(B : T)_i = B_{ikm}\, T_{mk} \tag{2.63}$$

atau $$(T : B)_i = T_{km}\, B_{ikm} \tag{2.64}$$

Treble inner product dari dua buah tensor order tiga merupakan suatu skalar, yang didefinisikan dengan :

$$B \,\vdots\, C = B_{ikm}\, C_{mki} \tag{2.65}$$

Contoh 2.6.

Diberikan vektor-vektor **a**,**b**,**c**, masing-masing didefinisikan dengan :

a = (1,0,0), **b** = (1,1,0), **c** = (1,1,1).

Tuliskan komponen-komponen dari :

(i) (a ⊗ b ⊗ c) . c (iii) (a ⊗ b ⊗ c) : (a ⊗ b)

(ii) a . (a ⊗ b ⊗ c) (iv) (a ⊗ b) : (a ⊗ b ⊗ c)

(v) Berikan komponen-komponen tak-nol dari A = a ⊗ b ⊗ c.

Penyelesaian :

(i) $(a \otimes b \otimes c) \,.\, c = (a \otimes b)(c \,.\, c)$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = 2\,\mathbf{a}$

$= (2,0,0)$

(iv) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2\, \mathbf{c} = \mathbf{c} = (1,1,1)$

(v) Keenam komponen tak nol dari $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ adalah

$A_{111} = A_{122} = A_{112} = A_{122} = A_{113} = A_{123} = 1$

II.2.3. Tensor Berayun (Alternate Tensor).

Definisi 2.10.

Misalkan $\mathbf{E}$ suatu tensor order tiga dengan komponen-komponennya ϵ_{ikm}, didefinisikan :

$$\mathbf{E} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{2.66}$$

Untuk setiap vektor $\mathbf{a},\mathbf{b}$.

Tensor $\mathbf{E}$ sedemikian disebut tensor berayun atau tensor order tiga anti-simetri lengkap (Totally antisymmetric third-order tensor).

Dari persamaan (2.66), dapat dituliskan :

$\epsilon_{ikm}\, a_m\, b_k = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i$

dimana komponen-komponen dari ϵ_{ikm} ditentukan dengan memisalkan $\mathbf{a} = \mathbf{e}_p$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_q$, sedemikian hingga :

$a_m = \delta_{mp}$ dan $b_k = \delta_{kq}$

Sehingga $\epsilon_{iqp} = (\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q)_i$

Jadi didapatkan :

$$\epsilon_{ikm} = [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m] \tag{2.67}$$

Dari persamaan (2.67) tampak komponen-komponen dari E memenuhi sifat berikut :

$$\epsilon_{ikm} = \begin{cases} +1, \text{ jika } i,k,m \text{ adalah permutasi genap dari } 1,2,3 \\ -1, \text{ jika } i,k,m \text{ adalah permutasi ganjil dari } 1,2,3 \\ 0, \text{ jika dua dari } i,k,m \text{ adalah sama} \end{cases} \tag{2.68}$$

II.2.4. Aplikasi Tensor Berayun.

Diatas telah diperlihatkan bahwa perkalian vektor antara dua vektor dapat dituliskan dalam tensor berayun. Sehingga dari persamaan (2.66) didapat :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{E} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \tag{2.69}$$

$$= \epsilon_{ikm}\, a_k\, b_m\, \mathbf{e}_i \tag{2.70}$$

Triple skalar produk $\mathbf{a} \times \mathbf{b}.\mathbf{c}$, dituliskan dengan :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c} = \epsilon_{ikm}\, a_k\, b_m\, c_i$$

$$= \epsilon_{ikm}\, a_i\, b_k\, c_m \tag{2.71}$$

Contoh 2.7.

(1) Harga-harga dari ϵ_{ikm} adalah :

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1,\ \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = -1$

Sedang ke-21 komponen lainnya dari E adalah 0.

(2) Invariant skalar ketiga dari tensor order dua T adalah I_3 = det T. Perlihatkan :

$I_3 = \epsilon_{jln}\, T_{ij}\, T_{2l}\, T_{3n}$

Penyelesaian :

I_3 = det T

$= T_{11}(T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}) + T_{12}(T_{23}T_{31} - T_{21}T_{33})$

$$+ T_{13}(T_{21}T_{32} - T_{22}T_{31})$$

$$= T_{1j}(\epsilon_{jln}\, T_{2l}T_{3n})$$

Sehingga $I_3 = \epsilon_{jln}\, T_{1j}\, T_{2l}\, T_{3n}$

(3) Diberikan vektor-vektor a, b yang didefinisikan :

$$a = e_1 \text{ dan } b = e_1 + e_2$$

Tuliskan komponen-komponen dari :

(i) $E.a \otimes b$ (ii) $E : a \otimes b$

Penyelesaian :

(i) Misalkan $A = E.a \otimes b$, maka

$A_{jln} = \epsilon_{jlp}\, a_p\, b_n = \epsilon_{jl1}\, b_n$, didapat :

$A_{jl1} = A_{jl2} = \epsilon_{jl1}$

yaitu $A_{321} = A_{322} = -1$

dan $A_{231} = A_{232} = +1$

Dan semua komponen lainnya dari A adalah nol.

(ii) Misalkan $d = E : a \otimes b$

Maka $d_i = \epsilon_{ipq}\, a_q\, b_p = \epsilon_{ip1}\, b_p = \epsilon_{i21}$

Sehingga $d = (0,0,-1)$

(4) Untuk setiap i,k,m, ϵ_{ikm} didefinisikan :

$$\epsilon_{ikm} = \epsilon_{kmi} = \epsilon_{mik} = -\epsilon_{mki} = -\epsilon_{kim} = -\epsilon_{imk}$$

(5) Dari definisi (2.67) perlihatkan bahwa :

$$\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{iln} = \delta_{kl}\delta_{mn} - \delta_{kn}\,\delta_{ml}$$

Penyelesaian :

$$\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{iln} = (e_i . e_k \times e_m)(e_i . e_l \times e_n)$$

$$= (e_k \times e_m).(e_l \times e_n)$$

$$= (e_k \times e_m) \times e_l . e_n$$

$$= [e_m(e_k . e_l) - e_k(e_m . e_l)].e_n$$

$$\epsilon_{ikm}\,\epsilon_{iln} = \delta_{kl}\,\delta_{mn} - \delta_{kn}\,\delta_{ml}$$

(6) Perlihatkan bahwa (T.E).c = T.(E.c) dan juga

c.(E.T) = (c.E).T

Penyelesaian :

$$[(T.E).c]_{ik} = (T.E)_{ikp}\ c_p$$

$$= T_{iq}\ \epsilon_{qkp}\ c_p$$

Juga $[T.(E.c]_{ik} = T_{iq}\ (E.c)_{qk}$

$$= T_{iq}\ \epsilon_{qkp}\ c_p$$

Sehingga (T.E).c = T.(E.c)

Selanjutnya untuk soal keduanya :

$$[c.(E.T)]_{ik} = c_p\,(E.T)_{pik}$$

$$= c_p\ \epsilon_{piq}\ T_{qk}$$

Juga $[(c.E).T]_{ik} = (c.E)_{iq}\ T_{qk}$

$$= c_p\ \epsilon_{piq}\ T_{qk}$$

Sehingga c.(E.T) = (c.E).T

Dicatat bahwa masing-masing dapat dituliskan :

(T.E).c = T.(E.c) = T.E.c dan

c.(E.T) = (c.E).T = c.E.T

II.2.5. Cross Product dari Tensor dan Vektor

Pada bagian II.1.2 didefinisikan arti dari pernyataan ($a \otimes b$). c, yang merupakan perkalian titik (dot product) dari tensor dan vektor. Sekarang akan diperlihatkan arti pernyataan ($a \otimes b$) x c dan T x c, dimana T tensor order dua. Didefinisikan :

$$(a \otimes b) \times c = a \otimes (b \times c) \tag{2.72}$$

Maka $(a \otimes b) \times c$ merupakan tensor, dengan komponen-komponennya dituliskan :

$$\begin{aligned}[(a \otimes b) \times c]_{ik} &= a_i (b \times c)_k \\ &= a_i \, \epsilon_{kpq} \, b_p \, c_q \\ &= a_i \, b_p \, c_q \, \epsilon_{kpq} \qquad (2.73)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sehingga } (T \times c)_{ik} &= T_{ip} \, c_q \, \epsilon_{kpq} \\ &= - T_{ip} \, \epsilon_{pkq} \, c_q \qquad (2.74)\end{aligned}$$

$$T \times c = - T.E.c \tag{2.75}$$

Persamaan (2.74) dan (2.75) mendefinisikan cross product dari tensor order dua T dan vektor c, dimana T merupakan pengali muka. Definisi produk $c \times T$, dengan T sebagai pengali belakang dapat ditentukan dengan cara yang sama sehingga :

$$c \times (a \otimes b) = (c \times a) \otimes b$$

maka $[c \times (a \otimes b)]_{ik} = \epsilon_{ipq} \, c_p \, a_q \, b_k$, (2.78)

dan $(c \times T)_{ik} = \epsilon_{ipq} \, c_p \, T_{qk}$ (2.77)

sehingga $c \times T = -c.E.T$ (2.78)

Seperti halnya cross product antara dua vektor, cross product antara tensor dan vektor ini tidak berlaku sifat komutatif.

Contoh 2.8.

Perlihatkan bahwa untuk setiap vektor c dan tensor simetri T berlaku :

$$(c \times T)' = -T \times c$$

Penyelesaian :

$(c \times T)'_{ik} = \epsilon_{ipq}\ c_p\ T_{qk}$

Oleh karena itu :

$$(c \times T)'_{ik} = (c \times T)_{ki}$$
$$= \epsilon_{kpq}\ c_p\ T_{qi}$$
$$= T_{iq}\ \epsilon_{qkp}\ c_p$$

Sehingga diperoleh :

$$(c \times T)'_{ik} = -\ (T \times c)_{ki}$$

atau $\quad (c \times T)' = -\ T \times c.$

II.3. Tensor Cartesian Order Empat.

Tensor Catesian order tertinggi yang dibahas di sini hanya dibatasi pada tensor order empat. Sesuai pada bagian II.2.1 dituliskan :

$$C\ .\ v_i = B_i \qquad ,\ i = 1,2,3 \tag{2.79}$$

dimana v_1, v_2, v_3 adalah vektor-vektor yang bebas linier dan B_1, B_2, B_3 menyatakan tensor-tensor order tiga.

Persamaan (2.79), mendefiniskan tensor order empat C apabila dot product $C.v_i$ telah didefiniskan, yaitu dengan menuliskan dot product tersebut dalam :

$$(a \otimes b \otimes c \otimes d)\ .\ v = (a \otimes b \otimes c)(d.v),\ \forall v \tag{2.80}$$

dengan a, b, c, d dan v adalah vektor-vektor.

Dimana $a \otimes b \otimes c \otimes d$ adalah produk tensor dari empat vektor, yang merupakan tensor order empat.

Sifat-sifat tensor order empat ini hampir sama dengan sifat-sifat tensor order dua maupun order tiga. Sebagai contoh, setiap tensor order empat ini dapat dituliskan sebagai jumlahan dari 81 produk tensor dari empat vektor

II.4. Kecepatan Perubahan Vektor dalam Kerangka Acuan Berputar.

Diberikan vektor v dan dimisalkan v adalah fungsi dari waktu t, kecepatan perubahan terhadap t didefinisikan dengan :

$$\frac{dv}{dt} = \underset{\delta t \longrightarrow 0}{\text{limit}} \frac{v(t + \delta t) - v(t)}{\delta t} \qquad (2.81)$$

Aturan-aturan umum derivative produk-produk vektor dipenuhi, yaitu :

$$\frac{d}{dt} = (u.v) = u.\dot{v} + \dot{u}.v \qquad (2.82)$$

dimana $\dot{v}$ menyatakan dv/dt.

demikian pula

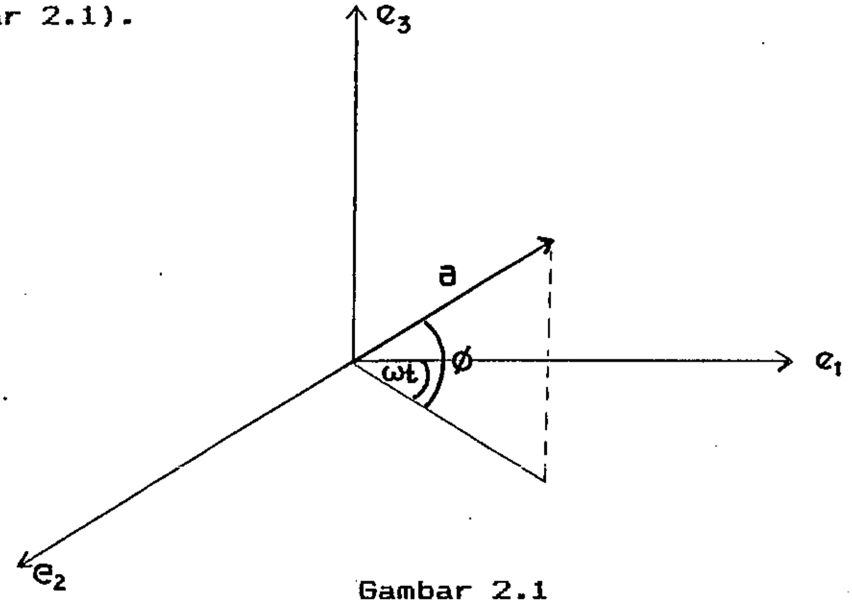
$$\frac{d}{dt}(u \times v) = u \times \dot{v} + \dot{u} \times v \qquad (2.83)$$

Suatu kejadian khusus yang cukup penting adalah jika v suatu vektor dengan besar (panjang) konstan atau harga v^2 konstan, maka dari persamaan (2.82) dengan mengambil u = v, diperoleh :

$$v.\dot{v} = 0 \qquad (2.84)$$

yaitu untuk setiap vektor v dengan besar konstan, dv/dt tegak lurus dengan v.

Pandang suatu vektor a, dengan panjang tetap a, yang berputar dengan kelajuan sudut ω terhadap sumbu x_3 (lihat gambar 2.1).



Gambar 2.1

Pada suatu saat t vektor a ini dapat dituliskan :

$a = a\{\cos(\omega t)\, e_1 + \sin(\omega t)\, e_2\} \cos \phi + \sin \phi\, e_3$ sehingga

$da/dt = a\omega \cos \phi \{-\sin(\omega t) e_1 + \cos(\omega t)\, e_2\}$.

yaitu $da/dt = \omega \times a$ (2.85)

dimana ω adalah vektor ωe_3 dan disebut dengan vektor kecepatan sudut. Persamaan (2.85) ini pada umumnya benar untuk vektor a yang mempunyai besar (panjang) tetap, yang berputar dengan kecepatan sudut ω.

Sekarang misalkan $a = a_i \; e_i^*$ dirumuskan terhadap kerangka acuan F^* yang berputar dengan kecepatan sudut ω terhadap kerangka tetap F. Misalkan $\delta a/\delta t$ adalah kecepatan perubahan vektor a terhadap kerangkan rotasi F^*, yaitu :

$$\frac{\delta a}{\delta t} = \frac{da_i}{dt}\, e_i^* \qquad (2.86)$$

Misalkan pula da/dt adalah kecepatan perubahan dari a terhadap kerangka F, maka :

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}\,(a_i\, e_i^{*})$$

$$= \frac{de_i}{dt}\, e_i^{*} + a_i\,\frac{de_i^{*}}{dt}$$

$$= \frac{\delta a}{\delta t} + a_i\ \omega \times e_i^{*}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\delta a}{\delta t} + \omega \times a \qquad (2.87)$$

Dengan menggunakan rumus :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} + \omega\ \times$$

untuk vektor da/dt dapat dituliskan derivative keduanya

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \left[\frac{\delta}{\delta t} + \omega\ \times\right]\left[\frac{\delta a}{\delta t} + \omega \times a\right]$$

$$= \frac{\delta^2 a}{\delta t^2} + \frac{\delta\omega}{\delta t} \times a + 2\,\omega \times \frac{\delta a}{\delta t} + \omega \times (\omega \times a) \qquad (2.88)$$

Dengan mengambil $a = \omega$ dalam (2.87) tampak tidak terdapat perbedaan antara $d\omega/dt$ dan $\delta\omega/\delta t$.

Sehingga dapat dituliskan :

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{\delta^2 a}{\delta t^2} + \dot{\omega} \times a + 2\,\omega \times \frac{\delta a}{\delta t} + \omega \times (\omega \times a) \qquad (2.89)$$

Pada kejadian khusus dimana ω konstan, diperoleh

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{\delta^2 a}{\delta t^2} + 2\omega \times \frac{\delta a}{\delta t} + \omega \times (\omega \times a) \qquad (2.90)$$

Dan pada kondisi $|\omega|$ cukup kecil,

$$\frac{d^2 a}{dt^2} \approx \frac{\delta^2 a}{\delta t^2} + 2\omega \times \frac{\delta a}{\delta t} \tag{2.91}$$

II.5. Kecepatan Perubahan Tensor dalam Kerangka Acuan Berputar.

Pada suatu tensor T dan misalkan T merupakan fungsi dari waktu t, kecepatan perubahan tensor T terhadap waktu t diberikan dengan :

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{T(t + \delta t) - T(t)}{\delta t} \tag{2.92}$$

Diberikan suatu vektor v, derivative produk-produk antara tensor T dan v ini, masing-masing diberikan dengan

$$\frac{d}{dt}(T.v) = \frac{dT}{dt} . v + T.\frac{dv}{dt} \tag{2.93}$$

dan
$$\frac{d}{dt}(T \times v) = \frac{dT}{dt} \times v + T \times \frac{dv}{dt} \tag{2.94}$$

Sekarang misalkan $T = T_{ij}\, e_i^* \otimes e_j^*$, dirumuskan atas kerangka acuan F^* yang berputar dengan kecepatan sudut ω terhadap kerangka acuan tetap F. Misalkan $\delta T/\delta t$ adalah kecepatan perubahan dari T terhadap kerangka putar F^*, yaitu :

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{dT_{ij}}{dt}\, e_i^* \otimes e_j^* \tag{2.95}$$

Misalkan dT/dt adalah kecepatan perubahan dari T terhadap kerangka tetap F. Maka,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(T_{ij}\, e_i^* \otimes e_j^*)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT_{ij}}{dt} e_i^* \otimes e_j^* + T_{ij} \frac{d}{dt} (e_i^* \otimes e_j^*)$$

$$= \frac{\delta T}{\delta t} + T_{ij}\{(\omega \times e_i^*) \otimes e_j^* + e_i^* \otimes (\omega \times e_j^*)\}$$

Sehingga :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta T}{\delta t} + \omega \times T - T \times \omega \qquad (2.96)$$

Jika T adalahtensor simetri, maka persamaan (2.96) diatas menjadi :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\delta T}{\delta t} + \omega \times T + (\omega \times T)' \qquad (2.97)$$