BAB I

PENDAHULUAN

Aljabar Tensor adalah suatu disiplin ilmu matematik yang sangat penting peranannya dalam ilmu-ilmu yang lain terutama dalam bidang Fisika, karena hukum fisis tidak akan bergantung pada sistem koordinat yang dipakai untuk memberikan tafsiran yang tepat pada hukum tersebut. Jika di dalam suatu sistem koordinat terdapat persamaan tensor, maka persamaan tersebut akan tetap sama di dalam semua sistem koordinat yang lain. Sifat inilah yang menyebabkan tensor banyak sekali digunakan di dalam Fisika. Diantaranya dalam teori Relativitas Umum, teori Elastisitas, Aerodinamika, Mekanika Fluida, dan sebagainya.

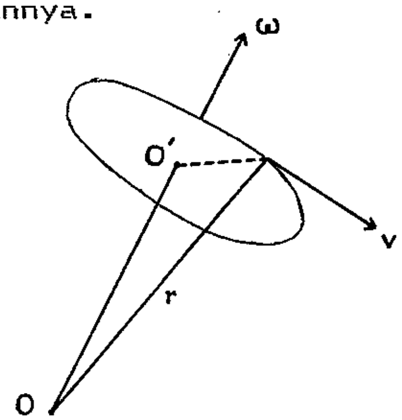
Dalam mempelajari tensor, pengetahuan dasar yang banyak digunakan adalah tentang matriks dan determinan. Dimana kedua hal tersebut tentunya sudah banyak dikenal pembaca sekalian. Tensor yang paling sederhana adalah skalar dan vektor. Skalar adalah tensor yang mempunyai order nol, sedangkan vektor adalah tensor yang mempunyai order satu. Tensor-tensor order lebih tinggi merupakan generalisasi daripada skalar dan vektor ini. Tensor yang sudah kita kenal adalah tensor yang umum. Pada pembahasan ini, akan disinggung sedikit tentang kelas khusus dari tensor umum ini yang dikenal dengan Tensor Cartesian.

Tensor Cartesian order-n dalam ruang Euclidean dimensi tiga didefinisikan sebagai himpunan atau kumpulan yang terdiri atas 3^n komponen, dimana komponennya memenuhi persamaan tensor umum akan tetapi transformasinya hanya atas transformasi koordinat orthogonal (koordinat Cartesian) bukan atas transformasi koordinat umum seperti dalam tensor umum. Sehingga perlu dicatat bahwa tensor umum sudah pasti merupakan tensor Cartesian, tetapi sebaliknya tidak berlaku.

Salah satu bentuk tensor Cartesian yang cukup penting, yang dapat ditemukan dalam Mekanika adalah apa yang disebut dengan tensor inersia. Karena tensor ini merupakan dasar daripada perumusan benda-benda tegar yang banyak terdapat dalam Mekanika. Dimana tensor inersia tersebut muncul atau didefinisikan dari rumus momentum anguler (momentum sudut) dari suatu benda yang berputar.

Dalam Fisika, yang dimaksud dengan benda mampat (benda tegar, rigid body) adalah himpunan atau sistem titik-titik materi yang memenuhi seluruh volume benda secara kontinyu dengan jarak antara bagian-bagian satu sama lain selalu tetap. Jadi dalam hal ini, gerakan bendanya disamping gerak translasi mungkin juga gerak rotasi (berputar) sekeliling suatu sumbu.

Pandang sebuah benda (partikel) yang berputar, bendanya disamping mempunyai kecepatan linier, yang arahnya selalu menyinggung lintasannya dan tegak lurus dengan vektor posisi dari bendanya, juga mempunyai kecepatan sudut, yaitu kecepatan yang berhimpit dengan lintasannya dan bergantung pada vektor posisi dari bendanya serta mempunyai harga yang sama untuk setiap titik pada lintasannya.



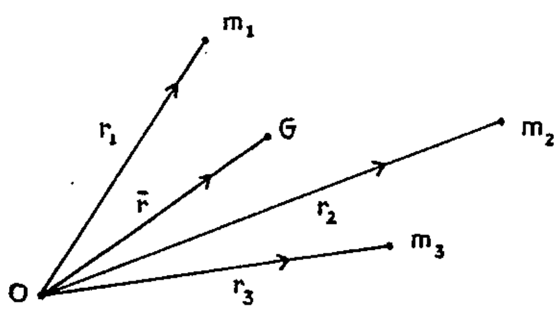
Gambar 1.1.

Misalkan ω adalah kecepatan sudut dan v menyatakan kecepatan linier dari bendanya, hubungan antara kecepatan sudut dan kecepatan linier diberikan dengan :

$$v = \omega \times r$$

dimana r adalah vektor posisi dari benda.

Pandang titik-titik materi yang masing-masing massanya adalah m_1, m_2, m_3 dan seterusnya, sedangkan vektor-vektor posisinya masing-masing r_1, r_2, r_3 dan seterusnya (pandang gambar 1.2 dibawah ini).



Gambar 1.2.

Rata-rata vektor posisi dari titik-titik materi diatas adalah :

$$\bar{r} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 \ldots\ldots\ldots}{m_1 + m_2 + m_3 \ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\Sigma\, m_i r_i}{\Sigma\, m_i}$$

$$= \frac{\Sigma\, m_i r_i}{M}$$

Sehingga untuk distribusi yang kontinu sebagaimana terdapat dalam benda padat dipenuhi :

$$\bar{r} = \frac{\int r\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int r\, dm$$

Atau jika kerapatan bendanya diketahui, misalkan ρ, maka bentuk diatas dapat dituliskan :

$$\bar{r} = \frac{\int_V \rho\,(r)\; r\; dV}{\int_V \rho\,(r)\; dV}$$

Dengan V = volume benda, dan $M = \int \rho(r)\, dV$ adalah massa sistim, yaitu jumlah massa titik-titik materi. Sedangkan $\bar{r}$ menyatakan vektor posisi dari apa yang disebut titik berat benda.

Jika momentum linier dari benda adalah $P = \int_V \rho(r) v\, dV$ maka momentum sudutnya (H) diberikan dengan $H = r \times P$, atau

$$H = \int_V \rho\,(r)\; r \times v\; dV$$

Dari rumus ini akan didefinisikan suatu bentuk tensor yang disebut dengan tensor inersia. Yang merupakan dasar perumusan dari benda-benda tegar.

Pembahasan akan dimulai dengan tensor-tensor

Cartesian order dua. Diperlihatkan bagaimana fungsi vektor linier dari vektor mendefinisikan tensor order dua. Diperkenalkan pula dyad, suatu bentuk dasar tensor order dua. Akan diperlihatkan setiap tensor order dua dapat dituliskan sebagai jumlahan 9 buah dyad. Dibahas pula operator-operator perkalian diantara tensor-tensor, yang tak lain merupakan bentuk yang lebih umum daripada perkalian skalar dan perkalian vektor diantara vektor-vektor. Dibahas sekilas tensor Cartesian order tiga dan order empat sebagai pelengkap. Dimana kesemuanya tercakup dalam BAB II dan sebagai materi penunjang pada inti permasalahan.

Dalam BAB III, diperlihatkan bagaimana tensor inersia muncul (didefinisikan) dalam rumus momentum sudut dan juga energi kinetik dari benda yang berputar. Diberikan pula teorema-teorema yang merupakan dasar perhitungan tensor inersia. Pertama, Teorema Sumbu Sejajar, yang intinya dapat dituliskannya tensor inersia terhadap suatu sumbu yang melalui titik tertentu O dan dinyatakan ke dalam tensor inersia terhadap suatu sumbu sejajar yang melalui titik berat G dari benda. Kedua, Teorema Sumbu Tegak-lurus, dimana aplikasinya lebih terbatas daripada teorema pertama yaitu hanya pada lamina (keping) dan lebih ditekankan pada momen inersianya daripada tensor inersianya.

BAB IV, berisi penghitungan-penghitungan tensor inersia untuk berbagai benda atau bangun geometri standar.

Dimana penghitungannya selalu berpegang pada teorema-teorema yang telah dijabarkan pada bab sebelumnya. Pembahasan dibatasi pada benda-benda yang berbentuk empat persegi panjang, benda-benda yang bukan empat persegi panjang (seperti : keping atau lamina jajaran genjang, parallelepiped, lamina segitiga, tetrahedron) dan benda-benda dengan batas kurva (seperti : lingkaran, ellips, bola dan sebagainya).

Benda-benda yang akan dibahas sampai pada group-group atau keluarga-keluarganya. Sebagai contoh lamina (keping) empat persegi panjang dapat dipandang sebagai kejadian khusus dari sebuah balok, dan batang lurus selanjutnya dapat dipandang sebagai kejadian khusus dari lamina empat persegi panjang. Dalam pengertian ini balok, lamina empat persegi panjang dan bentuk batang adalah satu keluarga. Sehingga sejalan dengan ini beberapa benda bisa termasuk dalam lebih dari satu keluarga. Bola pejal (padat), cakram (lamina lingkaran), batang lurus adalah sekeluarga. Silinder, cakram dan bentuk batang pada keluarga yang lain.

Terdapat dua metode dalam penghitungan tensor inersia dari benda-benda diatas. Pertama, untuk menghitung tensor inersianya secara langsung dari rumus tensor inersia dengan integral rangkap tiga. Tensor-tensor inersia dari benda-benda dimensi satu dan dimensi dua pada keluarga yang sama dapat ditentukan sebagai kejadian khusus dengan memisalkan parameter-parameternya sama dengan nol. Berpangkal dari metode ini pengintegralannya dilaksanakan sekali. Metode ini dikenal sebagai metode analitis.

Metode yang lain adalah metode sintetis. Dengan langkah-langkahnya, pertama menghitung tensor inersia dari benda-benda dimensi satu (bentuk batang) dan dari sini tersusun benda-benda dimensi duanya (lamina empat persegi panjang, lamina segitiga, cakram, dsb) dengan integrasi selanjutnya. Akhirnya dengan integrasi ketiga diperoleh tensor inersia dari benda dimensi tiganya. Pada pembahasan ini digunakan metode keduanya, yaitu metode sintetis, karena integrasinya kesemuanya tunggal. Balok akan dihitung dengan kedua metode, dengan maksud sebagai perbandingan.

Terakhir, BAB V, berisi tentang kesimpulan dari bab-bab yang dibahas sebelumnya.

Tetapi sebelum melangkah pada pokok permasalahan akan diperkenalkan terlebih dahulu Konvensi Jumlah dan Kronecker Delta, yang akan banyak membantu dalam penyederhanaan penulisan notasi. Mengingat dalam pembahasan ini banyak digunakan besar-besaran dengan subscript (index) berlipat dan banyaknya pernyataan jumlahan yang cukup panjang, walaupun telah digunakan notasi Σ (sigma) untuk penyederhanaan jumlahan.

Perlu dicatat, dalam pembahasan ini digunakan notasi x_1, x_2, x_3 untuk menyatakan sumbu-sumbu koordinat Cartesian daripada menggunakan notasi x, y, z. Juga untuk vektor-vektor satuan sepanjang sumbu-sumbu koordinat dinotasikan dengan e_1, e_2, e_3 daripada menggunakan notasi, i, j, k.

Konvensi Jumlah

Pandang suatu vektor x dengan komponen - komponennya : (x_1, x_2, x_3). Dengan diperkenalkannya vektor-vektor satuan e_1, e_2, e_3, maka vektor x dapat ditulis :

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \end{aligned}$$

$$\text{atau } x = \sum_{i=1}^{3} x_i \; e_i$$

Sekarang disepakati untuk menghilangkan tanda jumlahan Σ dan bentuk diatas cukup ditulis dengan : $x = x_i e_i$.

Tampak bahwa suffix yang muncul dua kali menyatakan suatu jumlahan. Sehingga konvensi jumlah secara garis besarnya dapat dituliskan sebagai berikut :

(1) Suffix yang hanya muncul sekali dalam suatu produk (perkalian) disebut "suffix bebas", dan tidak menyatakan suatu jumlahan.

(2) Suffix yang muncul dua kali dalam suatu produk disebut "suffix berulang", dan menyatakan jumlahan atas harga 1, 2, 3.

(3) Suffix tidak boleh muncul lebih dari dua kali dalam suatu produk.

Kronecker Delta

Kronecker delta didefinisikan sebagai :

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Sehingga $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$, $\delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{12} = 0$

Pandang suatu bentuk yang didefinisikan sebagai berikut :

$\delta_{ik}\ a_k = \delta_{i2}\ a_1 + \delta_{i2}\ a_2 + \delta_{i3}\ a_3$, $i = 1, 2, 3$

Maka jika $i = 1$, $\delta_{i2} = 1$ dan $\delta_{i2} = \delta_{i2} = 0$, sehingga $\delta_{ik} a_k = a_1$. Secara sama jika $i = 2$, maka $\delta_{2k}\ a_k = a_2$.

Secara umum dapat ditulis :

$$\delta_{ik}\ a_k = a_i$$

Jadi δ_{ik} dioperasikan pada a_k, berarti digantikannya (subtitusi) index k dengan index i. Sehingga simbol kronecker delta ini dikenal pula sebagai operator subtitusi.

Contoh 1.1.

(1) Istilah lain dari suffix berulang adalah dummy suffix, karena dapat digantikannya index yang telah digunakan dengan index lain. Misal

$$a_i b_i = a_k b_k = a_m b_m = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(2) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

(3) $e_i \cdot e_k = \delta_{ik}$