BAB II

TEORI PERMAINAN

2.1. Permainan

2.1.1 Pengertian Permainan

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai kegiatan yang bersifat kompetitif yang diwarnai dengan suatu keadaan persaingan (konflik). Persaingan atau konflik ini dapat terjadi diantara dua orang (atau dua pihak) atau sejumlah orang (grup). Beberapa contoh kegiatan itu antara lain :

* Dalam bidang perdagangan

  Para pengambil keputusan bersaing untuk merebut pasar.

* Dalam peperangan

  Pihak-pihak yang berperang menggunakan sekumpulan pilihan langkah (strategi) untuk dapat memenangkan peperangan.

* Dalam bidang politik

  Persaingan antara dua partai politik agar dapat merebut suara terbanyak.

Namun tidak setiap keadaan persaingan dapat disebut sebagai permainan (game). Hanya persaingan yang memenuhi kriteria atau ciri-ciri tertentu saja yang dapat disebut sebagai permainan.

Kriteria tersebut adalah :

a. Terdapat persaingan kepentingan diantara pemain (pelaku).
b. Setiap pemain mempunyai sejumlah pilihan, yang disebut strategi.

c. Aturan permainan untuk mengatur pilihan-pilihan itu disebutkan satu persatu dan diketahui semua pemain.

d. Hasil permainan dipengaruhi oleh pilihan-pilihan yang dibuat oleh semua pemain.

Jadi permainan adalah suatu bentuk persaingan antara dua orang atau antara dua kelompok yang saling berhadapan dan menggunakan aturan-aturan yang diketahui oleh kedua pihak.

Aturan-aturan itu meliputi :

a. Langkah atau strategi yang dapat dipilih oleh tiap pemain Setiap pemain mempunyai sejumlah pilihan yang disebut strategi. Serangkaian langkah yang dikerjakan oleh seorang pemain dalam suatu permainan dari awal sampai akhir disebut strategi total permainan. Tujuan pokok teori permainan ialah memilih strategi. Diasumsikan bahwa kedua pihak yang bersaing mempunyai kepandaian yang sama dan berusaha untuk memenangkan permainan. Ini berarti mereka berusaha untuk mendapat jumlah pembayaran yang terbesar.

b. Informasi yang digunakan oleh setiap pemain yang memilih strategi.

c. Pembayaran yang harus dipenuhi oleh setiap pemain setelah permainan selesai.

Pembayaran dapat berupa bilangan positif, negatif atau nol. Pembayaran yang berupa bilangan positif berarti kemenangan bagi pihak pertama. Pihak kedua harus membayar kepada pihak pertama sebesar bilangan itu. Sebaliknya,

pembayaran berupa bilangan negatif berarti kemenangan ada pada pihak kedua. Pembayaran yang berupa bilangan nol berarti kedua pihak tidak ada yang memenangkan permainan atau seri.

2.1.2 Klasifikasi Permainan

Berdasarkan jumlah pembayaran permainan diklasifikasikan menjadi dua, yaitu :

1. Permainan berjumlah nol (*Zero Sum Game*) adalah suatu permainan dengan jumlah kemenangan kedua pihak sama dengan nol. Jumlah pembayaran yang diterima pemain yang menang sama dengan jumlah pembayaran yang dibayarkan oleh pemain yang kalah. Kemenangan pihak yang satu merupakan kekalahan pihak yang lainnya.

   Bila permainan diikuti oleh dua orang maka disebut permainan berjumlah nol dari dua orang (*Two Person Zero Sum Game*).

2. Permainan berjumlah tidak nol (*Non Zero Sum Game*) adalah permainan dengan total pembayaran masing-masing pemain tidak sama dengan nol.

2.1.3 Matriks Pembayaran

Matriks Pembayaran (*Pay off matrix*) adalah suatu tabel berbentuk segi empat dengan elemen-elemennya yang merupakan besarnya nilai pembayaran yang bersesuaian dengan strategi yang digunakan oleh kedua pihak.

Bentuk matriks pembayaran $E = (e_{ij})$, dengan $i=1,2,...,n$ adalah banyaknya strategi yang dipunyai pemain pertama (I) dan $j=1,2,...,m$ adalah banyaknya strategi yang dimiliki oleh pemain kedua (II), menunjukkan pembayaran kepada pemain pertama.

Pemain pertama merupakan pemain yang berusaha memaksimumkan perolehan (pembayaran atau keuntungan), sedangkan pemain kedua merupakan pemain yang berusaha meminimumkan pembayaran (kerugian).

2.1.4 Nilai Permainan

Dari matriks pembayaran dapat dilihat bahwa kedua pihak (pemain) dapat menentukan strategi optimum dan nilai permainannya.

Strategi optimum adalah strategi yang menjadikan seorang pemain berada dalam posisi pilihan terbaik, tanpa memperhatikan langkah-langkah pemain pesaingnya. Pengertian posisi pilihan terbaik ialah bahwa setiap penyimpangan dari strategi ini akan mengakibatkan turunnya pembayaran (*pay off*).

Nilai permainan (*value of the game*) adalah rata-rata pembayaran per permainan jika kedua pemain menggunakan strategi optimumnya. Yang dimaksud dengan nilai disini adalah nilai yang diperoleh pemain pertama pada akhir suatu permainan.

2.2 Permainan Berjumlah nol Dua Orang

Inti dari teori permainan adalah menentukan solusi optimum bagi kedua pihak yang saling bersaing yang bersesuaian dengan strategi optimumnya.

Ada dua macam strategi optimum yaitu :

a. Strategi Murni (*Pure Strategy*)

b. Strategi Campuran (*Mixed Strategy*)

2.2.1 Permainan dengan strategi murni

Permainan dengan strategi murni adalah suatu permainan dengan posisi pilihan terbaiknya bagi setiap pemain dicapai dengan memilih satu strategi tunggal. Jadi strategi murni adalah strategi dimana setiap pemainnya hanya mempunyai tepat satu langkah yang terbaik. Dalam permainan dengan strategi murni, pemain pertama ialah pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangan yang minimum sehingga kriteria strategi optimumnya adalah kriteria maximin.

Sedangkan pemain kedua ialah pemain yang berusaha meminimumkan kekalahan yang maksimum sehingga kriteria strategi optimumnya adalah kriteria minimax.

Apabila nilai maximin sama dengan nilai minimax maka permainan dapat diselesaikan dengan strategi murni dan titik keseimbangan (*equilibrium point*) telah dicapai. Titik keseimbangan ini dikenal sebagai titik pelana (*sadle point*) Berdasarkan kriteria maximin dan kriteria minimax maka penentuan titik pelana dapat dijelaskan sebagai berikut

* Untuk pemain pertama (I)

Apabila I memilih strategi i maka I yakin akan memenangkan $\min_j (e_{ij})$ apapun strategi yang dipilih oleh pemain kedua.

Karena pemain pertama merupakan pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangan yang minimum maka I akan memilih strategi yang akan memberikan nilai maksimum dari nilai minimum itu, yaitu $\max_i \min_j (e_{ij})$

* Untuk pemain kedua (II)

Pemain kedua akan berusaha menekan kemenangan bagi pemain pertama sampai sekecil mungkin sehingga jika pemain kedua memilih strategi j maka II yakin bahwa kemenangan yang diperoleh pemain pertama tidak lebih dari $\max_i a_{ij}$ apapun strategi yang digunakan pemain pertama. Karena pemain kedua merupakan pemain yang berusaha meminimumkan kekalahan yang maksimum maka II akan memilih strategi yang memberikan nilai minimum dari nilai yang maksimum itu, yaitu $\min_j \max_i (e_{ij})$

Jika dalam suatu matriks pembayaran (e_{ij}) berlaku :

$$\max_i \min_j (e_{ij}) = \min_j \max_i (e_{ij}) = e_{rs}$$

maka matriks pembayaran tersebut disebut mempunyai titik

pelana pada (r,s) dan elemen e_{rs} merupakan nilai permainan yang bersesuaian dengan strategi optimum bagi pemain pertama, yaitu i=r dan strategi optimum bagi pemain kedua, yaitu j=s.

Untuk mempermudah penentuan suatu permainan mempunyai titik pelana atau tidak, digunakan langkah-langkah :

1. Pada setiap baris matriks pembayaran, tentukan nilai yang terkecil.
2. Dari nilai-nilai terkecil dari setiap baris tersebut dipilih nilai yang terbesar.
3. Pada setiap kolomnya, tentukan nilai yang terbesar.
4. Dari nilai-nilai terbesar dari setiap kolom tersebut, pilih nilai terkecil.
5. Diperiksa apakah nilai terbesar yang terpilih sama dengan nilai terkecil yang terpilih.
   - Apabila sama maka permainan dengan matriks pembayaran tersebut mempunyai titik pelana dan nilai titik pelana tersebut merupakan nilai permainannya.

     Strategi masing-masing pemain dapat dilihat dari letak nilai permainan. Dengan demikian permainan ini dapat diselesaikan dengan strategi murni.
   - Apabila tidak sama maka permainan dengan matriks pembayaran tersebut tidak mempunyai titik pelana dan harus diselesaikan dengan strategi campuran (*Mixed Strategy*).

Contoh 1 :

Diberikan matriks pembayaran dibawah ini :

		II				
	i \ j	1	2	3	4	minimum tiap baris
	1	7	2	9	4	2
I	2	6	5	7	8	$\boxed{5}$ → maksimum dari yang minimum
	3	8	3	-2	6	-2
		8	$\boxed{5}$	9	8	maksimum tiap kolom

minimum dari yang maximum

Terlihat bahwa nilai maksimum dari yang minimum sama dengan nilai minimum dari yang maksimum yaitu 5. Atau

$$\max_i \min_j (e_{ij}) = \min_j \max_i (e_{ij}) = 5$$

Jadi permainan ini dapat diselesaikan dengan strategi murni, yaitu :

strategi optimum bagi I adalah $i=2$ dan

strategi optimum bagi II adalah $j=2$ dengan

nilai permainan sebesar 5.

Contoh 2 :

Diberikan matriks pembayaran dibawah ini :

	i \ j	II: 1	2	3	4	minimum tiap baris
	1	4	3	5	-1	-1
I	2	1	6	4	7	$\boxed{1}$ → maksimum dari yang minimum
	3	2	-3	8	9	-3
		$\boxed{4}$	6	8	9	maksimum tiap kolom

minimum dari yang maximum

Terlihat bahwa :

Nilai maximin = 1

Nilai minimax = 4

Nilai maximin tidak sama dengan nilai minimax. Karena nilai maximin tidak sama dengan nilai minimax maka permainan diatas tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni, melainkan dengan strategi campuran.

2.2.2 Permainan dengan Strategi Campuran

Didalam permainan yang tidak mempunyai titik pelana maka para pemain akan menggunakan strategi campuran. Hal ini berarti pemain pertama akan memainkan setiap strategi baris dengan proporsi waktu (probabilitas) tertentu. Demikian juga untuk pemain kedua, akan memainkan setiap strategi kolom dengan proporsi waktu tertentu. Oleh karena itu dalam suatu permainan yang diselesaikan dengan strategi campuran, strategi dari setiap pemain akan mempunyai probabilitas yang menunjukkan proporsi waktu

atau banyaknya bagian yang dipergunakan untuk melakukan strategi tersebut. Tugas setiap pemain adalah menentukan proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya.

* Bagi Pemain Pertama.

Misalnya x, dengan $0 \leq x \leq 1$ adalah proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris pertama, maka proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris kedua adalah $1-x$. Sehingga jumlah semua proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya adalah $x+1-x = 1$.

* Bagi Pemain Kedua

Misalnya y, dengan $0 \leq y \leq 1$ adalah proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strategi pada kolom pertama, maka proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strategi pada kolom kedua adalah $1-y$. Sehingga jumlah semua proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya adalah $y+1-y = 1$.

Perhatikan matriks pembayaran ini :

II

			y	$1-y$
		i \ j	1	2
	x	1	-3	7
I	$1-x$	2	6	1

Masing-masing pemain akan menentukan besarnya pecahan yang tidak diketahui x dan y. Pemain pertama akan mencari strategi yang akan memaksimumkan kemenangannya (atau meminimumkan kekalahannya) tanpa memperhatikan langkah yang dilakukan oleh pihak lawan, yaitu pemain kedua.

Secara logika, pemain pertama ingin membagi permainannya diantara baris-barisnya sedemikian rupa sehingga kemenangan atau kekalahan harapannya (*expected*) di saat pemain kedua memainkan kolom pertama akan sama dengan kemenangan atau kekalahan harapannya di saat pemain kedua pemain memainkan kolom kedua. Pemain kedua akan mengikuti logika yang serupa didalam perhitungan proporsi waktu yang diperlukan untuk setiap kolomnya seperti yang dilakukan oleh pemain pertama. Pemain kedua akan membagi waktu bermainnya diantara kolom-kolomnya sedemikian rupa sehingga kemenangan atau kekalahan harapannya di saat pemain pertama memainkan baris ke satu sama dengan kemenangan atau kekalahan harapannya disaat pemain pertama memainkan baris kedua. Jadi strategi campuran adalah strategi dengan setiap pemain menggunakan distribusi probabilitas dalam memilih strateginya.

Untuk menyelesaikan suatu permainan berjumlah nol dari dua orang dengan strategi campuran ini ada beberapa metode yang dapat digunakan. Namun sebelumnya akan diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan strategi campuran.

Diberikan suatu matriks pembayaran berukuran nxm dengan

pemain pertama (I) mempunyai n strategi i ; $i=1,2,\ldots,n$ dan pemain kedua mempunyai m strategi j ; $j=1,2,\ldots,m$.

Misalnya :

x_i= probabilitas I memilih strategi ke i.

y_j= probabilitas II memilih strategi ke j.

e_{ij}= nilai pembayaran dalam matriks pembayaran (e_{ij}) yang bersesuaian dengan strategi ke i untuk I dan strategi ke j untuk II.

Matriks pembayaran disajikan sebagai berikut :

			II				
			y_1	y_2	y_3	...	y_m
		$i \backslash j$	1	2	3	...	m
I	x_1	1	e_{11}	e_{12}	e_{13}	...	e_{1m}
	x_2	2	e_{21}	e_{22}	e_{23}	...	e_{2m}
	x_3	3	e_{31}	e_{32}	e_{33}	...	e_{3m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
	x_n	n	e_{n1}	e_{n2}	e_{n3}	...	e_{nm}

Definisi 1 :

Vektor $x = (x_i)$; $i=1,2,\ldots,n$ dari bilangan tak negatif x_i dan $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ adalah strategi campuran bagi pemain pertama.

Vektor $y = (y_j)$; $j=1,2,\ldots,m$ dari bilangan tak negatif y_j dan $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$ adalah strategi campuran bagi pemain kedua.

Berdasarkan definisi tersebut, maka probabilitas x_i , $i=1,2,\ldots,n$ menyusun strategi optimum bagi pemain pertama dan probabilitas y_j ; $j=1,2,\ldots,m$ menyusun strategi optimum

bagi bagi pemain kedua.

Kejadian khusus :

Bila (n-1) komponen dari x = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ berharga nol yang berarti hanya ada satu komponen yang berharga satu maka dinamakan strategi murni bagi pemain pertama.

Misalnya x = (0,0,1,0,0,0). Begitu pula bila (m-1) komponen dari y = $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ berharga nol yang berarti hanya ada satu komponen yang berharga satu maka dinamakan strategi murni bagi pemain kedua, misalnya :
y = (0,1,0,0,0).

Definisi 2 :

Fungsi pembayaran e(x,y) bagi pemain pertama dengan matriks pembayaran E = (e_{ij}) ialah $e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i e_{ij} y_j = xEy$
x = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = vektor baris yang merupakan strategi campuran bagi pemain pertama dan y = $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ = vektor kolom yang merupakan strategi campuran bagi pemain kedua.

Pemain pertama seharusnya memilih x sehingga dapat memaksimalkan nilai harapannya yang terkecil dan pemain kedua seharusnya memilih y sehingga dapat meminimumkan nilai harapannya yang terbesar. Dengan demikian I menuju $\max_x \min_y e(x,y)$ dan II menuju pada $\min_y \max_x e(x,y)$.

Contoh 3:

Diberikan matriks pembayaran

		II	
	i \ j	1	2
I	1	-3	7
	2	6	1

Misalnya I memilih strategi campuran $x = (x_1, x_2)$ dan II memilih strategi campuran $y = (y_1, y_2)$. Fungsi pembayaran untuk I adalah :

$$e(x,y) = xEy$$

$$= [x_1, x_2]\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= (-3x_1 + 6x_2 \qquad 7x_1 + x_2)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= y_1(-3x_1 + 6x_2) + y_2(7x_1 + x_2)$$

Misalkan $x = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dan $y = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, maka :

$$e(x,y) = \frac{2}{5}(-3.\frac{1}{3} + 6.\frac{2}{3}) + \frac{3}{5}(7.\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{9}{5}$$

$$= 3$$

Fungsi pembayaran bagi I sebesar 3, yang berarti bahwa secara rata - rata per permainan I akan memperoleh kemenangan sebesar 3.

Definisi 3 :

Jika $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ merupakan strategi campuran

optimum bagi I dan $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ merupakan strategi campuran optimum bagi II maka nilai permainan harapannya adalah :

$$v^* = e(x^*, y^*)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^* e_{ij} y_j^*$$
$$= x^* E y^*$$

dengan $x^* = (x_i^*)$; $i = 1,2,3,\ldots,n$ merupakan vektor baris.

$y^* = (y_j^*)$; $j = 1,2,3,\ldots,m$ merupakan vektor kolom.

2.2.3 Aturan Dominansi

Sebelum menyelesaikan suatu permainan, perlu dipertimbangkan apakah ada baris atau kolom dalam matriks pembayarannya yang tidak efektif pengaruhnya di dalam penentuan strategi optimum dan nilai permainan. Bila ada maka baris atau kolom tersebut bisa dihilangkan atau tidak dipakai. Hal itu berarti bahwa probabilitas untuk memilih strategi sesuai baris atau kolom tersebut sama dengan nol.

Dengan demikian ukuran matriks pembayaran yang tersisa akan lebih kecil.Keadaan ini akan mempermudah menyelesaikan permainan. Aturan demikian ini dinamakan aturan dominansi.

a. Aturan dominansi bagi pemain pertama

Karena pemain pertama merupakan pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangannya maka aturan dominansinya ialah bila terdapat suatu baris dengan semua elemen dari baris tersebut sama atau lebih kecil dari baris yang lain maka baris tersebut dikatakan didominansi dan baris

tersebut dihilangkan.

b. Aturan dominansi bagi pemain kedua

Karena pemain kedua merupakan pemain yang berusaha meminimumkan kekalahannya maka aturan dominansinya ialah bila terdapat suatu kolom dengan semua elemen dari kolom tersebut sama atau lebih besar dari kolom yang lain maka kolom tersebut dikatakan didominansi dan kolom tersebut dihilangkan.

Contoh 4:

Diberikan matriks pembayaran dibawah ini :

II

	i \ j	1	2	3	4	5
I	1	4	5	6	4	7
	2	4	2	3	4	4
	3	2	4	5	5	5

Bagi pemain pertama (I)

Untuk setiap j; j = 1,2,3,4,5 berlaku $e_{2j} \leq e_{1j}$. Dengan demikian I tidak akan memilih strategi kedua. Dari sini baris kedua dapat dihapus dan matriks pembayaran berubah menjadi :

II

	i \ j	1	2	3	4	5
I	1	4	5	6	4	7
	3	2	4	5	5	5

Bagi pemain kedua (II)

Untuk setiap i; i = 1,3 berlaku $e_{i5} \geq e_{i3} \geq e_{i4} \geq e_{i1}$. Dengan demikian II tidak akan memilih strategi kelima, ketiga, keempat. Maka kolom kelima, kolom ketiga, kolom keempat dihapus. Matriks pembayaran menjadi :

II

I	i \ j	1	2
	1	4	5
	3	2	4

Untuk setiap i , i=1,3 berlaku $e_{i2} > e_{i1}$. Maka kolom kedua dihapus. Matriks pembayaran menjadi :

II

I	i \ j	1
	1	4
	3	2

Terlihat bahwa baris ketiga didominansi dan baris ketiga dihapus . Matriks pembayarannya menjadi :

II

I	i \ j	1
	1	4

Ternyata dapat ditemukan titik pelana pada baris ke 1 dan kolom ke 1. Dengan demikian strategi optimum bagi I adalah x^* = (1,0,0) dan bagi II adalah y^* = (1,0,0,0,0) dengan nilai permainan v^* = 4.

2.2.4 Metode Penyelesaian

Yang dimaksud dengan menyelesaikan permainan adalah usaha mencari strategi optimum dan nilai permainan yang secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ dan } y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

yang mengoptimumkan nilai harapan matematis.

$$e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i e_{ij} y_j \text{ dengan syarat :}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \quad x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0$$

untuk semua i dan j.

x adalah strategi untuk I dan y adalah strategi untuk II.

Terdapat beberapa metode penyelesaian permainan berjumlah nol dari dua orang dengan strategi campuran antara lain metode aljabar, metode grafik, metode program linier, metode aljabar matriks.

Dalam tugas akhir ini yang dibahas hanya metode aljabar.

* Metode Aljabar.

Suatu permainan berjumlah nol dari dua orang dengan masing-masing pemain mempunyai dua pilihan strategi dapat diselesaikan dengan metode aljabar. Perhatikan matriks pembayaran dari permainan jumlah nol dari dua orang yang berukuran 2x2 berikut ini :

		II	
	i \ j	1	2
I	1	e_{11}	e_{12}
	2	e_{21}	e_{22}

dengan $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ bertanda positif.

Prinsip menggunakan metode aljabar adalah bahwa kedua pemain I dan II membagi waktu (sesuai proporsinya) yang diperlukan untuk memilih suatu strategi.

Misalkan :

x = proporsi waktu yang digunakan oleh I untuk memainkan strategi pertama.

$1-x$ = proporsi waktu yang digunakan oleh I untuk memainkan strategi ke dua.

Misalkan :

y = proporsi waktu yang digunakan oleh II untuk memainkan strategi pertama.

$1-y$ = proporsi waktu yang digunakan oleh II untuk memainkan strategi kedua.

Matriks pembayarannya menjadi :

			II	
			y	$1-y$
			1	2
I	x	1	e_{11}	e_{12}
	$1-x$	2	e_{21}	e_{22}

* Bagi I

Karena I berusaha memaksimalkan kemenangannya maka I merancang suatu strategi yang dapat memaksimalkan kemenangan tanpa memperhatikan strategi lawan (II). Secara logika, I ingin membagi permainannya di antara baris-barisnya sedemikian sehingga kemenangan harapan (*Expected Winning*) dari memainkan strategi pertama akan sama dengan kemenangan harapan dari memainkan strategi kedua tanpa memperhatikan strategi lawan. Kemenangan harapan bagi I dapat disajikan sebagai berikut :

	Ketika II memainkan strategi ke 1	Ketika II memainkan strategi ke 2
I memainkan strategi ke 1 x kali	I memenangkan e_{11} unit, x kali +	I memenangkan e_{12} unit, x kali +
I memainkan strategi ke 2 $1-x$ kali	I memenangkan e_{21} unit, $1-x$ kali	I memenangkan e_{22} unit, $1-x$ kali
Total kemenangan harapan bagi I	$xe_{11}+e_{21}(1-x)$	$xe_{12}+e_{22}(1-x)$

Besarnya nilai x ditentukan dengan prinsip pemikiran I, yaitu bahwa total kemenangan harapan I ketika II memainkan strategi ke 1 sama dengan total kemenangan harapan I ketika II memainkan strategi ke 2.

$$xe_{11}+(1-x)e_{21} = xe_{12}+(1-x)e_{22}$$

$$x(e_{11}-e_{21}-e_{12}+e_{22}) = e_{22}-e_{21}$$

$$x = \frac{e_{22}-e_{21}}{e_{11}+e_{22}-e_{21}-e_{12}} = x_1^*$$

$$1-x = 1 - \frac{e_{22}-e_{21}}{e_{11}+e_{22}-e_{21}-e_{12}} = \frac{e_{11}-e_{12}}{e_{11}+e_{22}-e_{21}-e_{12}}$$

$$= x_2^*$$

Jadi strategi optimum I adalah $x^* = (x_1^*, x_2^*)$

* Bagi II

II ingin membagi waktunya antara kolom-kolomnya sehingga kemenangan harapan atau kekalahannya ketika I memainkan strategi ke 1 akan sama dengan kemenangan harapan atau kekalahannya ketika I memainkan strategi ke 2. II berusaha meminimumkan kekalahannya tanpa memperhatikan strategi lawan. Kekalahan harapan II disajikan sebagai berikut :

	Ketika I memainkan strategi ke 1	Ketika I memainkan strategi ke 2
II memainkan strategi ke 1 y kali	II kalah e_{11} unit y kali +	II kalah e_{21} unit y kali +
II memainkan strategi ke 2 $1-y$ kali	II kalah e_{12} unit $1-y$ kali	II kalah e_{22} unit $1-y$ kali
Total kekalahan harapan (rata-rata)	$ye_{11}+e_{12}(1-y)$	$ye_{21}+e_{22}(1-y)$

Untuk mencari harga y digunakan prinsip yang sama dengan I yaitu dengan menyamakan kekalahan harapan (rata-rata kekalahan) II ketika I memainkan strategi ke 1 dengan kekalahan harapan II ketika I memainkan strategi ke 2.

Maka :

$$ye_{11}+(1-y)e_{12}= ye_{21}+(1-y)e_{22}$$

$$y(e_{11}-e_{21}-e_{12}+e_{22})= e_{22}-e_{12}$$

$$y = \frac{e_{22}-e_{12}}{e_{11}+e_{22}-e_{21}-e_{12}} = y_1^*$$

$$1-y = 1 - \frac{e_{22}-e_{12}}{e_{11}+e_{22}-e_{21}-e_{12}} = \frac{e_{11}-e_{21}}{e_{11}+e_{22}-e_{21}-e_{12}}$$

$$= y_2^*$$

Jadi strategi optimum I adalah $y^* = (y_1^*, y_2^*)$

Dengan demikian strategi optimum bagi masing-masing pemain adalah $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ dan $y^* = (y_1^*, y_2^*)$. Sekarang akan dihitung nilai permainan yang bersesuaian dengan strategi optimum. Perhitungan nilai permainan dipandang dari I maupun II.

a. Menurut pandangan I

(1) Selama II menggunakan y_1^* waktunya untuk memainkan strategi kesatu, I menang e_{11} unit sebanyak x_1^* kali (ketika I memainkan strategi kesatu) dan I menang e_{21} unit sebanyak x_2^* kali (ketika I memainkan strategi kedua).

(2) Selama II menggunakan y_2^* waktunya untuk memainkan strategi kedua, I menang e_{12} unit sebanyak x_1^* kali (ketika I memainkan strategi kesatu) dan I menang e_{22} unit sebanyak x_2^* kali (ketika I memainkan strategi kedua).

Nilai permainannya sama dengan total harapan kemenangan (rata-rata kemenangan) bagi I yaitu :

$$v^* = y_1^* \ (x_1^* e_{11} + x_2^* e_{21}) + y_2^* \ (x_1^* e_{12} + x_2^* e_{22})$$

Ini berarti jika I memainkan strategi itu, I dapat mengharapkan rata-rata kemenangan sebesar v^* unit per permainan.

b. Menurut pandangan II

(1) Selama I menggunakan x_1^* waktunya untuk memainkan strategi kesatu, II kalah e_{11} unit sebanyak y_1^* kali (ketika II memainkan strategi kesatu) dan II kalah e_{12} unit sebanyak y_2^* kali (ketika II memainkan strategi kedua).

(2) Selama I menggunakan x_2^* waktunya untuk memainkan strategi kedua, II kalah e_{21} unit sebanyak y_1^* kali (ketika II memainkan strategi kesatu) dan II kalah e_{22} unit sebanyak y_2^* kali (ketika II memainkan strategi kedua).

Nilai permainannya sama dengan total kekalahan harapan bagi II, yaitu :

$$v^* = x_1^* \ (y_1^* e_{11} + y_2^* e_{12}) \ + \ x_2^* \ (y_1^* e_{21} + y_2^* e_{22})$$

Contoh 5 :

Diberikan matriks pembayaran seperti dibawah ini :

			II	
			y	$1-y$
			1	2
I	x	1	4	0
	$1-x$	2	2	6

Permainan ini akan diselesaikan dengan metode aljabar :

$$4x + 2(1-x) = 0x + 6(1-x)$$

$$x(4-2+6+0) = 6-2$$

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = x_1^*$$

$$1-x = \frac{1}{2} = x_2^*$$

$$x^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$4y + 0(1-y) = 2y + 6(1-y)$$

$$y(4-0-2+6) = 6$$

$$y = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = y_1^*$$

$$1-y = \frac{1}{4} = y_2^*$$

$$y^* = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4})$$

matriks pembayaran menjadi :

			II	
			$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
			1	2
I	$\frac{1}{2}$	1	4	0
	$\frac{1}{2}$	2	2	6

Kemenangan harapan I adalah :

$$v^* = \frac{3}{4}\ (4.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{4}\ (0.\tfrac{1}{2} + 6.\tfrac{1}{2})$$

$$v^* = \frac{3}{4}\ .3 + \frac{1}{4}\ .3$$

$$= 3 = \text{nilai permainan.}$$

Kekalahan harapan II adalah :

$v^* = \frac{1}{2} \quad (4.\ \frac{3}{4} + 0.\ \frac{1}{4}\ ) + \frac{1}{2} \quad (2.\ \frac{3}{4} + 6.\ \frac{1}{4}\ )$

$v^* = \frac{1}{2} \quad .3 + \frac{1}{2} \quad .3$

$= 3$ = nilai permainan.

Jadi nilai permainan yang dihitung berdasarkan pandangan I akan sama dengan bila dihitung berdasar pandangan II.

2.3 Permainan Berjumlah tidak nol dari dua orang

Pada permainan ini jumlah pembayaran yang diterima pemain yang menang belum tentu sama dengan jumlah pembayaran yang dibayarkan oleh pemain yang kalah. Atau tidaklah selalu dipenuhi :

pembayaran untuk I = - pembayaran untuk II.

Pembayaran disajikan sebagai pasangan, misalnya (3,4), dengan bagian pertama yaitu 3 adalah pembayaran yang diterima I dan bagian kedua, yaitu 4 adalah pembayaran yang diterima II.

II lebih tertarik untuk memperbesar pembayaran yang diterimanya daripada meminimalkan pembayaran yang diterima I. Sehingga pasangan strategi maximin-minimax untuk setiap pemain adalah bila I menggunakan strategi maximinnya dengan memperhatikan pembayarannya dan II juga menggunakan strategi maximinnya dengan memperhatikan pembayarannya.

Contoh 6 :

Diberikan matriks pembayaran :

		II	
		1	2
I	1	(2,2)	(3,3)
	2	(1,1)	(4,4)

Untuk I matriks pembayarannya menjadi :

		II	
		1	2
I	1	2	3
	2	1	4

Karena II_1 mendominasi II_2, maka I akan memilih strategi I_1 I_1 adalah strategi maximin dan 2 adalah nilai maximin.

Untuk II matriks pembayarannya adalah :

		I	
		1	2
II	1	2	1
	2	3	4

Karena II_2 mendominasi II_1, maka II akan memilih strategi II_2. II_2 adalah strategi maximin dan 4 adalah nilai maximin. Tetapi bila I dan II menggunakan strategi maximinnya

masing-masing, yaitu I_1 dan II_2 akan didapat pembayaran (3,3). Hasil ini berbeda dengan nilai maximin, yaitu (2,4).

Pasangan Keseimbangan

Definisi 4 :

Pasangan strategi $x^* \in X$, $y^* \in Y$ adalah pasangan keseimbangan untuk permainan berjumlah tidak nol jika untuk setiap $x \in X$, $y \in Y$ berlaku :

$e_1(x,y^*) \leq e_1(x^*,y^*)$; $e_2(x^*,y) \leq e_2(x^*,y^*)$

dengan e_1 (,) adalah pembayaran yang diterima I dan e_2 (,) adalah pembayaran yang diterima II.

Pada contoh pasangan keseimbangannya adalah (I_2, II_2) dengan pembayaran (4,4). Jadi pasangan keseimbangan berbeda dengan pasangan maximin.

Mencari pasangan Keseimbangan (Metode Swastika)

Contoh 7 :

Diberikan matriks pembayaran :

	II_1	II_2
I_1	(3,2)	(2,1)
I_2	(0,3)	(4,4)

Misalnya I memilih strategi x^* dan II memilih strategi y^*, maka dalam suatu keseimbangan didapat $e_1(x^*,y^*) \geq e_1(x,y^*)$.

Jadi untuk suatu y ditemukan x yang memperbesar $e_1(x,y)$ dan jika y bagian dari pasangan keseimbangan, harus ditemukan x yang merupakan pasangannya.

Jika $x = (\varkappa, 1-y)$ dan $y = (y, 1-y)$ maka :

$$e_1(x,y) = 3\varkappa y + 2\varkappa(1-y) + 0(1-\varkappa)y + 4(1-\varkappa)(1-y)$$

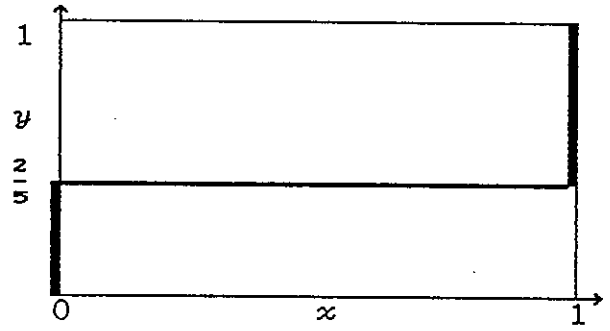
$$= \varkappa(5y-2) + 4 - 4y.$$

Jika $y < \frac{2}{5}$, maka $e_1(x,y)$ dimaksimumkan dengan $\varkappa = 0$

Jika $y = \frac{2}{5}$, maka $e_1(x,y)$ dimaksimumkan dengan $0 \le \varkappa \le 1$

Jika $y > \frac{2}{5}$, maka $e_1(x,y)$ dimaksimumkan dengan $\varkappa = 1$

Hasil ini digambarkan dengan :



Pada suatu pasangan keseimbangan $e_2(x^*,y^*) \ge e_2(x^*,y)$. Jadi untuk semua x dapat ditemukan y yang memperbesar $e_2(x,y)$. Jika x bagian dari suatu pasangan keseimbangan, maka harus ditemukan y yang menjadi pasangannya.

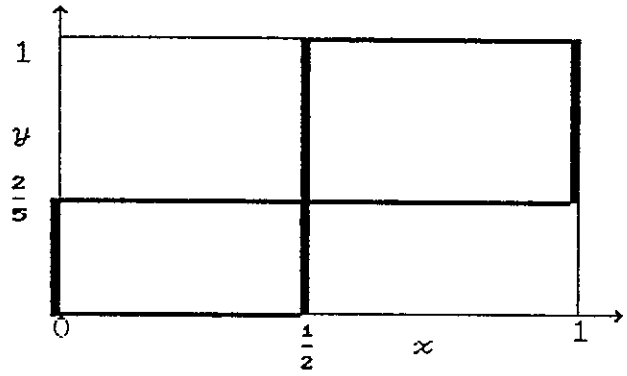
$$e_2(x,y) = 2xy + 1x(1-y) + 3(1-x)y + 4(1-x)(1-y)$$
$$= y\ (2x-1) + (4-3x).$$

Jika $x < \frac{1}{2}$, maka $e_2(x,y)$ dimaksimumkan dengan $y = 0$

Jika $x = \frac{1}{2}$, maka $e_2(x,y)$ dimaksimumkan dengan $0 \le y \le 1$

Jika $x > \frac{1}{2}$, maka $e_2(x,y)$ dimaksimumkan dengan $y = 1$

Jika hasil ini digabung dengan hasil sebelumnya didapat :



Pasangan $(x^*=(x^*,1-x^*),y^*=(y^*,1-y^*))$ adalah pasangan keseimbangan karena memenuhi $e_1(x^*,y^*) \ge e_1(x,y^*)$ dan juga memenuhi $e_2(x^*,y^*) \ge e_2(x^*,y)$. Pasangan keseimbangan itu ialah :

(a) $x=0$, $y=0$ bersesuaian dengan (I_2,II_2) dengan pembayaran (4,4).

(b) $x=\frac{1}{2}$,$y=\frac{2}{5}$ bersesuaian dengan $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{2}{5},\frac{3}{5}))$ dengan pembayaran (2,4;2,5)

(c) $x=1$, $y=1$ bersesuaian dengan (I_1,II_1) dengan pembayaran (3,2).