BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Matriks.

Definisi (1):

Matriks adalah himpunan skalar bilangan riel/kompleks yang disusun secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom. Skalar-skalar tersebut disebut elemen-elemen matriks. Untuk batasnya diberikan :

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

2.1.1. Notasi Matriks.

Definisi (2) :

Matriks diberi nama dengan huruf besar, misalnya : A, B, P, Q dan sebagainya. Dan secara lengkap ditulis : $A = (a_{ij})$, artinya matriks A dengan elemen-elemen a_{ij} ; dengan i = baris ke-i dan

j = kolom ke-j.

Diberikan matriks $A = (a_{ij})$; $i = 1,2 ,\ldots, m$ dan

$j = 1,2 ,\ldots, n$ jadi banyaknya baris m

dan banyaknya kolom n.

Atau dapat dituliskan :

$$\begin{array}{cc} A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{baris } 2 \\ \\ \\ \longrightarrow \text{baris } m \end{array} \\ \text{kolom} & \begin{array}{ccc} \quad 1 & \quad 2 & \qquad n \end{array} \end{array}$$

Atau dapat dituliskan matriks $A_{(m \times n)} = (a_{ij})$;$(m \times n)$ disebut ukuran matriks.

2.1.2. Kesamaan Matriks.

Definisi (3):

Matriks A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) dikatakan sama yaitu A=B bila ukurannyasama; misalnya (mxn) dan berlaku $(a_{ij})=(b_{ij})$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

2.1.3. Operasi pada Matriks.

Definisi (4) :

a. **Penjumlahan Matriks.**

Jika A = (a_{ij}) dan B = (b_{ij}) berukuran sama, maka : (A+B) = C = (c_{ij}); dengan $c_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j. Atau $A + B = (a_{ij}+b_{ij})$.

b. **Perkalian Skalar terhadap Matriks.**

Jika λ = suatu bilangan (skalar) dan A = (a_{ij}), maka matriks $A\lambda = (\lambda a_{ij})$ atau λA, diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan λ.

c. **Perkalian Matriks.**

Jika matriks A = (a_{ij}) berukuran (p×q) dan B = (b_{ij}) berukuran (q×r). Maka perkalian matriks A dan B adalah suatu matriks C = (c_{ij}) yang berukuran (p×r), dimana ;

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2ji} + \ldots + \quad + a_{iq}b_{qj}$$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, p$ dan $j = 1, 2, \ldots, r$. Syarat Perkalian matriks adalah jumlah kolom matriks pertama = jumlah baris matriks kedua.

2.1.4. Transpose Suatu Matriks.

Definisi (5) :

Diberikan matriks $A_{(m \times n)} = (a_{ij})$. Matriks A' disebut tranpose matriks A jika $A' = (a_{ji})$ berukuran $(n \times m)$, yaitu matriks yang dibentuk dari elemen-elemen baris ke-i dari matriks A sebagai kolom ke-i matriks A' dan kolom ke-j matriks A sebagai baris ke-j matriks A'; dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Contoh (1) :

Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, maka transpose matriks A adalah A', yaitu : $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2.1.5. Beberapa Matriks Khusus.

Definisi (6) :

a. Matriks Bujur Sangkar.

Suatu matriks yang banyaknya baris = banyaknya kolom = n disebut matriks bujur sangkar berukuran n. Elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut elemen diagonal utama dari matriks A.

b. Matriks Nol.

Matriks yang semua elemennya 0 disebut matriks Nol atau matriks 0

c. Matriks Diagonal.

Matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol. Dengan kata lain $A = (a_{ij})$ adalah matriks diagonal bila $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

d. Matriks Satuan/Identitas.

Adalah matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya = 1.

Jadi $U = (u_{ij})$ adalah matriks satuan bila ; $u_{ij} = 1, \forall i = j$ dan

$u_{ij} = 0$, $\forall\ i \neq j$. Matriks Satuan ditulis sebagai I_n, dengan n = ukuran dari matriks tersebut. Sifat matriks Satuan pada perkalian matriks seperti bilangan 1 pada operasi perkalian biasa, yaitu : $A\ I = I\ A = A$, dengan syarat operasi perkalian matriks dipenuhi.

e. **Matriks > 0.**

Matriks $A = (a_{ij}) > 0$ jika semua elemen $a_{ij} \geq 0$, tetapi tidak semua $a_{ij} = 0$

Contoh (2) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ; matriks } A > 0$$

f. **Basis Matriks.**

Jika diberikan matriks A berukuran $(m \times n)$ dan $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ adalah orde k-tupel, dengan

$j_i \in N$, untuk $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Maka matriks A_J adalah sub-matriks dari A yang berukuran $(m \times k)$ yang dibentuk oleh kolom-kolom

$J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ matriks A. Dan A_J merupakan basis matriks A pada kolom-kolom J.

Contoh (3) :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; jika $J = (1,4)$ maka basis matriks A pada kolom J adalah : $A_J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

2.1.6. Ruang Baris dan Ruang Kolom.

Diberikan matriks $A_{(m \times n)}$ yang elemen-elemennya bilangan riel :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tiap baris dari A dapat dipandang sebagai sebuah vektor $B_1 = [a_{11}, a_{11}, \ldots, a_{1n}]$, $B_2 = [a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}]$, ..., $B_m = [a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}]$ dan disebut vektor-vektor baris dari matriks A. Tiap kolom dari A dapat dipandang sebagai sebuah vektor $C_1 = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}]$, $C_2 = [a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}]$, ..., $C_n = [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}]$ dan disebut vektor-vektor kolom dari matriks A.

Definisi (7) :

a. Ruang baris dari matriks A adalah suatu ruang vektor bagian dari R^n yang dibentuk oleh vektor-vektor baris matriks A; dengan kata lain, ruang baris dari matriks A adalah $L\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.

b. Ruang kolom dari matriks A adalah suatu ruang vektor bagian dari R^m yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari matriks A; dengan kata lain, ruang kolom matriks A adalah $L\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

Definisi (8) :

Vektor $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \geq 0$ jika komponen-komponen $x_i \geq 0$. Jika $\forall\, x_i = 0$, maka X disebut vektor 0.

Contoh (4) :

$X = [1, 0, 3, 2]$ adalah vektor ≥ 0 di R^4.

$X = [0, 0, 0,]$ adalah vektor 0 di R^3

$X = [1, 2, 3, 4]$ adalah vektor > 0 di R^4.

Definisi (9) :

Vektor satuan e adalah vektor yang semua komponen pembentuknya adalah angka 1.

Contoh (5) :

e = [1, 1, 1, 1] adalah vektor satuan di R^4.

Definisi (10) :

Vektor e_i adalah vektor satuan dengan harga satuan pada komponen ke-i.

Contoh (6) :

e_3 = [0, 0, 1, 0, 0] adalah vektor satuan dengan harga satuan pada komponen ke-3.

Definisi (11) :

Jika e_i adalah vektor kolom dengan harga satuan pada kolom ke i, maka e_i' adalah vektor baris dengan harga satuan pada baris ke-i. Atau e_i' merupakan transpose dari e_i.

Contoh (7) :

Jika e_2 vektor kolom pada R^3, yaitu $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

maka $e_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Definisi (12) :

Jika matriks A berukuran (m×n) dan X vektor kolom berukuran n, maka A X > 0 jika :

$$A\,X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$A\,X > 0$, jika $a_{ij}\ x_j \geq 0$ dan $\sum_{j=1}^{n} ax > 0$,

untuk $i = 1, 2, \ldots, m$

2.1.7. Partisi Matriks.

Definisi (13) :

Partisi matriks adalah matriks yang dibagi-bagi menjadi matriks-matriks yang lebih kecil.

Contoh (8) :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Dengan partisi matriks, diperoleh sub matriks-sub matriks A yaitu :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian matriks A dapat ditulis :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

(i). Penjumlahan Partisi Matriks.

Bila matriks A dan B berukuran sama, maka A dan B dapat dipartisi ke dalam sub matriks-sub matriks A_{ij} dan B_{ij}, untuk i = 1, 2, ... , r dan j = 1, 2, ... , s. Sehingga : $\left[A + B\right] = \left[A_{ij} + B_{ij}\right]$

(ii). Perkalian Partisi Matriks.

Jika A dan B adalah matriks yang ukurannya memenuhi syarat perkalian matriks, maka A dan B dapat di partisi kedalam sub matriks-sub matriks A_{ij} untuk i = 1, 2, ...,r dan j = 1, 2, ... , s.

Contoh (9) :

Diberikan matriks A dan B yang dapat dipartisi sebagai berikut :

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$,maka perkalian A dan B secara partisi adalah :

$$A\,B = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

2.2.Determinan.

2.2.1.Menentukan Determinan dengan Minor dan Kofaktor.

Diberikan Matriks $A_{(n\times n)}=(a_{ij})$ dan M_{ij}suatu sub matriks dari A yang berukuran $\{(n-1)\times(n-1)\}$, dengan baris ke-i dan kolom ke-j dari A dihilangkan.

<u>Definisi</u> (14) :

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks $A = (a_{ij})$ adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari a_{ij} adalah $A_{ij} = (-1)^{i+j}\ |M_{ij}|$ yaitu suatu skalar.

Contoh (10) :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Minor elemen-elemen matriks A adalah :

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$ $\quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10$

$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$ $\quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$

$|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4$ $\quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3$

$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$ $\quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

Kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen A adalah

$(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \; |M_{ij}|$

$A_{11} = 1$ $\quad A_{21} = 1$ $\quad A_{31} = -1$

$A_{12} = -10$ $\quad A_{22} = 4$ $\quad A_{32} = 2$

$A_{13} = 7$ $\quad A_{23} = -3$ $\quad A_{33} = -1$

Definisi (15):

Determinan dari matriks A adalah perkalian elemen-elemen sembarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Dan diberi tanda det (A) atau |A|, yaitu :

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ dengan i sembarang, disebut uraian menurut baris ke-i.

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ dengan j sembarang, disebut uraian menurut kolom ke-j.

Contoh (11) :

Dari matriks pada contoh (10) akan dicari det (A). Akan dihitung berdasarkan uraian kolom ke-1; yaitu :

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

dengan : $a_{11} = 1$ $\quad a_{21} = 2$ $\quad a_{31} = 1$

$A_{11} = 1$ $\quad A_{21} = 1$ $\quad A_{31} = -1$

Jadi det (A) = $|A| = 1.1 + 2.1 + 1.(-1) = 2$

2.2.2. Matriks Singular dan Non Singular.

Definisi (16) :

Matriks bujur sangkar A disebut matriks Singular bila det(A) = 0. Jika det(A) $\neq$ 0, maka disebut matriks Non Singular.

2.2.3. Matriks Adjoin dan Invers.

Definisi (17) :

Jika diberikan matriks bujur sangkar A = a_{ij} dan A_{ij} adalah matriks kofaktor dari elemen-elemen A. Maka Matriks Adjoint A adalah trnspose dari matriks A_{ij} .

Contoh (12) :

Dari matriks pada contoh (10) akan ditentukan matriks Adjoint A. Dari contoh diatas telah dihitung kofaktor-kofaktor dari elemen-elemennya, jadi diperoleh matriks A_{ij} - nya yaitu :

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$, menurut definisi (17)

transpose $A_{ij} = A_{ij}'$ adalah matriks Adjoint A, yaitu :

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Definisi (18) :

Jika diberikan matriks bujur sangkar A , dengan det(A) $\neq$ 0 maka matriks A^{-1} adalah invers matriks A jika: $A^{-1} = \dfrac{\text{Adjoint A}}{\det(A)}$

Contoh (13) :

Dari matriks yang diberikan pada contoh (10) akan ditentukan invers matriks A.

Menurut contoh (11) det (A) = 2, dan menurut contoh (12) Adjoint A =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Jadi menurut definisi (18) invers matriks A adalah :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Dari definisi (16) dan definisi (18) nampak bahwa matriks singular tidak mempunyai invers, sedangkan matriks non singular mempunyai invers. Dalam matriks invers berlaku, jika A dan B masing-masing matriks bujur sangkar berukuran n dan dipenuhi A.B = B. A = I maka B merupakan invers A dan ditulis B = A^{-1}. Sebaliknya A invers B dan ditulis A = B^{-1}. Sehingga diperoleh :

$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$ atau $B\,B^{-1} = B^{-1}\,B$

dengan I = matriks Identitas/satuan.

2.3. Himpunan.

Definisi (19) :

Jika a didalam/anggota suatu himpunan A maka hal ini disajikan dengan : $a \in A$. Sedangkan ingkarannya yaitu a bukan anggota A disajikan dengan : $a \notin A$.

Definisi (20) :

Himpunan A merupakan himpunan bagian/subset dari himpunan B jika dan hanya jikasetiap anggota A menjadi anggota B. Dalam notasi himpunan disajikan sebagai berikut: $A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A$ maka $a \in B$

Definisi (21) :

Himpunan A dan B dikatakan sama jika dan hanya jika A merupakan himpunan bagian B dan B merupakan himpunan bagian A. Atau : $A = B \Leftrightarrow$ $A \subset B$ & $B \subset A$

Contoh (14) :

Jika diberikan dua buah himpunan $A = \{1, 2, 5\}$ dan $B = \{2\}$, maka menurut definisi (19) dan (20) nampak bahwa : 1, 2, 5 merupakan anggota himpunan A atau $1, 2, 5 \in A$

2 merupakan anggota himpunan B atau $2 \in B$.

B merupakan himpunan bagian A atau $B \subset A$.

Definisi (22) :

Diberikan dua buah himpunan A dan B. Hasil ganda himpunan A dan B yaitu $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan berurutan (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ atau :

$(a,b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in$ & $b \in B$

Contoh (15) :

Jika diberikanhimpunan-himpunan : $A = \{a,b, c\}$

$B = \{d, e\}$ dan $C = \{f\}$ maka :

$A \times B = \{(a,d), (a,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e)\}$

$A \times B \times C = \{(a,d,f), (a,e,f), (b,d,f), (b,e,f), (c,d,f), (c,e,f)\}$

2.4. Eigenvalue dan Eigenvektor.

Definisi (23) :

Apabila A suatu matriks bujur sangkar dan λ = skalar yang memenuhi persamaan $A\ x = \lambda\ x$, untuk suatu vektor $x \neq 0$ maka dikatakan λ = eigenvalue (akar karakteristik) dari A dan x yang memenuhi persamaan diatas disebut eigenvektor (vektor karakteristik) yang berhubungan dengan λ.

Cara menentukan eigenvalue :

Diberikan persamaan : $A\ x = \lambda\ x$

$$A\ x - \lambda\ x = 0$$

atau $A\ x - \lambda I\ x = 0$

$$(A - \lambda I)\ x = 0$$

Untuk mendapatkan penyelesaian dari sistim persamaan diatas, maka matriks $(A - \lambda I)$ harus singular, jadi :

$|A - \lambda I| = 0$ sehingga untuk setiap harga λ yang diperoleh merupakan eigenvalue dari matriks A.

2.3.1. Diagonalisasi Matriks.

Definisi (24) :

Suatu matriks bujur sangkar $A_{(n \times n)}$ dapat dibawa kebentuk diagonal bila terdapat matriks non singular P sehingga dipenuhi : $P\ A\ P^{-1} = D$ dengan D = matriks diagonal.

Teorema 1 :

Apabila $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\}$ adalah suatu eigenvektor dari $A_{(n\times n)}$, dengan harga karakteristiknya λ_i untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Maka terdapat matriks $P = (x_{ij})$ sedemikian hingga :

$$P\,A\,P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

dengan D = matrks diagonal.

Bukti :

Diketahui bahwa vektor-vektor baris dari P adalah eigenvektor x_i. Karena x_i eigenvektor-eigenvektor untuk eigenvalue λ_i ; maka : $x_i\,A = \lambda_i\,x_i$

Sehingga $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\,a_{kj} = \lambda_i\,x_{ij}$,untuk $j = 1,2,\ldots,n$

Selanjutnya : $P\,A = (c_{ij})$, dengan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\,a_{kj}$

$= \lambda_i\,x_{ij}$

dan $D\,P = (b_{ij})$, dengan $b_{ij} = \lambda_i\,x_{ij}$

Sehingga : $P\,A = D\,P$ atau $P\,A\,P^{-1} = D\,P\,P^{-1}$

$P\,A\,P^{-1} = D$ ....**Terbukti.**

<u>Definisi</u> (25) :

Spektrum matriks A dinyatakan dengan $\sigma(A)$ yaitu himpunan semua eigenvalue A. Jadi $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, dengan λ_i,untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$ atau eigenvalue dari A.

Definisi 26) :

Radius spektral dari matriks $A_{(n\times n)}$ yaitu $\rho(A)$ adalah modulus terbesar dari eigenvalue-eigenvaluenya.

Atau : $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i| \quad ;\lambda_i \in \sigma(A)$

Definisi (27) :

Matriks $A_{(n\times n)}$ mempunyai prinsip diagonal dominan jika : $|a_{ii}| > \sum\limits_{k\ne i} |a_{ik}| \quad$;untuk $i = 1, 2, \ldots, m$

Teorema (2) :

Jika $A_{(n\times n)}$ matriks dengan prinsip diagonal dominan maka radius spektral dari matriks $(I - D^{-1}A) < 1$ atau $\rho(I-D^{-1}) < 1$;dengan D = matriks diagonal dari A.

Bukti :

Dimisalkan $\lambda \in \sigma(I - D^{-1})$ dan $x \ne 0$ adalah eigenvektor-eigenvektornya, maka :

$x\,(I - D^{-1}A) = \lambda\, x$

$x - D^{-1} A\, x = \lambda\, x$

Jika diambil suatu i sedemikian hingga : $|x_i| \ge |x_j|$; untuk $j = 1, 2, \ldots, n$; maka $|x_i| > 0$ dan

$$\lambda\, x_i = x_i - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$$

Sehingga diperoleh : $|\lambda|\ |x_i| = \lambda\ |x_i| = \left| \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}\, x_j \right|$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |x_j|$$

$$< |x_i|$$

Atau $\qquad |\lambda|\ |x_i| < |x_i|$

Jadi $\qquad |\lambda| < |x_i|$

Karena λ sembarang eigenvalue dari $(I - D^{-1}A)$ maka :

$\rho(I - D^{-1}A) < 1$

2.5. Deret tak berhingga.

Definisi (28) :

Jika $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan dan

$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ maka $\{S_n\}$ disebut deret tak berhingga. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ disebut suku-suku dari deret tak berhingga. Secara umum deret tak berhingga ditulis : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Pandang deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$ atau secara umum $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

Karena $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dan $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}$

maka diperoleh rumus : $S_{n+1} = S_n + a_n$

atau $a_n = S_{n+1} - S_n$

Definisi (29) :

Pandang deret tak berhingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\{S_n\}$ adalah jumlah parsial dari deret tak berhingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, maka jika

$\lim_{n \to \infty} S_n = S$ deret dikatakan konvergen ke S.

Definisi (30) :

Jika $\{S\}$ adalah deret tak berhingga sedemikian hingga

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ maka deret disebut deret geometrik.

Teorema (3) :

Deret geometrik $\{S_n\}$ dengan

$S_n = a + ar^1 + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ adalah konvergen ke- $\frac{a}{1-r}$,jika $|r| < 1$

Bukti :

Menurut definisi (30) deret geometri :

$$S_n = a + ar^1 + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$\underline{r\,S_n = ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n} \; -$$

$$S_n - r\,S_n = a - a\,r^n$$

$$S_n\,(1-r) = a\,(1-r^n)$$

Jadi $\quad S_n = \frac{a(1-ar^n)}{1-r}$

Menurut definisi (29) S_n konvergen ke-S jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Terbukti deret geometri $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$

2.6. Analisa Iterasi matriks.

Diberikan persamaan sistim linier dengan bentuk :

$A\,x = b$ ....(3)

dengan A = matriks non singular berukuran $(n \times n)$

x,b = vektor kolom dimensi n

Dalam metode iterasi matriks, pertama-tama matriks A akan dipecah menjadi dua buah matriks yang berlainan dan ukurannya memenuhi syarat pengurangan matriks. Diambil matriks-matriks tersebut adalah R dan S sedemikian hingga $A = R - S$ ....(4)

dengan R =matriks non singular; S = matriks sembarang yang memenuhi

Dengan persamaan (4) maka persamaan (3) dapat ditulis sebagai :

$A\ x = (R-S)\ x = b$

$R\ x = S\ x + b$;dengan mengalikan masing-masing ruas dengan R^{-1},

maka $R^{-1}\ R\ x = R^{-1}\ S\ x + R^{-1}.b$ atau

$$x = R^{-1}S\ x + R^{-1}\ b$$

Dengan menggunakan penulisan indeks diatas untuk menunjukkan penghitungan iterasi, suatu pendekatan harga-harga x dalam metode itersi dihasilkan oleh hubungan recursive sebagai berikut :

dengan : $x^{(m+1)}$ = harga x pada iterasi ke-(m+1)

$x^{(m)}$ = harga x pada iterasi ke-(m)

$R^{-1}S$ = matriks iterasi

Persamaan (5) menggambarkan suatu bentuk pendekatan harga x pada iterasi ke-(m+1). Suatu vektor $x^{(0)}$ dipakai sebagai harga pendekatan awal.

Kesalahan pada iterasi ke-0 didefinisikan sebagai :

$\varepsilon^{(0)} = x^{(0)} - x$

Kesalahan pada iterasi ke-1 didefinisikan sebagai :

$\varepsilon^{(1)} = x^{(1)} - x$

Sehingga kesalahan pada iterasi ke-m didefinisikan sebagai :

$$\varepsilon^{(m)} = x^{(m)} - x \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (6) didapatkan :

$\varepsilon^{(m)} = x^{(m)} - R^{-1}S\ x - R^{-1}\ b$

Dari persamaan (5) dan (6) kesalahan ke-m yaitu $\varepsilon^{(m)}$ dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(m)} &= x^{(m)} - x \\ &= x^{(m)} - R^{-1}S\ x - R^{-1}\ b \\ &= R^{-1}S\ x + R^{-1}\ b - R^{-1}S\ x - R^{-1}\ b \\ &= R^{-1}S\ \{x^{(m-1)} - x\} \\ &= R^{-1}S\ \varepsilon^{(m-1)} \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga : } \quad \varepsilon^{(m)} = R^{-1}S \quad R^{-1}S \quad \varepsilon^{(m-2)}$$

$$= (R^{-1}S)^2 \quad \varepsilon^{(m-2)}$$

$$= (R^{-1}S)^2 \quad R^{-1}S \quad \varepsilon^{(m-3)}$$

$$\vdots$$

$$= (R^{-1}S)^m \quad \varepsilon^{(m-m)}$$

Jadi $\varepsilon^{(m)} = (R^{-1}S)^m \quad \varepsilon^{(0}$ .... (7)

Dalam masalah diatas barisan $\{\varepsilon^i\}_i^\infty$ adalah konvergen ke suatu vektor nol,pada i mendekati tak terhingga. Sehingga menurut definisi (29)

$\lim_{m\to\infty} \varepsilon^{(m)} \to 0$ bila $\lim_{m\to\infty} (R^{-1}S)^m \to 0$ ....(8)

<u>Definisi</u> (31) :

Apabila A matriks berukuran (n×n) ;maka A konvergen apabila barisan matriks-matriks A, A^2, A^3,... juga konvergen.

Teorema (4) :

Pangkat tak berhingga dari suatu matriks A yang berukuran n×n adalah nol jika dan hanya jika radius spektralnya lebih kecil dari 1 yaitu A konvergen jika dan hanya jika $\rho(A) < 1$

Bukti :

($\Rightarrow$) Menurut teorema (1) untuk suatu matriks A berukuran (n × n) maka terdapat suatu matriks non singular P se-demikian hingga $P A P^{-1} = \tilde{A}$;dengan $\tilde{A}$ matriks diagonal

Dengan demikian maka $(P A P^{-1})^m = (\tilde{A})^m$

$$(\tilde{A})^m = \begin{bmatrix} L_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_{k_2}^{m+1}(\lambda_i) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{k_r}^{r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk komponen ke-i dan j dari $L_{K_1}^{m}(\lambda_1)$ ditulis $d_{ij}^{m}(1)$

yaitu :

$$\overset{m}{d_{i,j}}(1) = \begin{cases} 0 & ; \text{ untuk } j < 1 \\ 0 & ; \text{ untuk } m + i < j \le k_1 \\ \begin{bmatrix} m \\ j-i \end{bmatrix} l_1^{m-j+1} & ; \text{ untuk } i \le j \le \text{Min } (k_1, m+i) \end{cases}$$

dengan : $\begin{bmatrix} m \\ j-i \end{bmatrix} = \dfrac{m!}{(j-i)!(m-j+i)!}$

Jika A konvergen maka $\tilde{A}$ konvergen. Menurut definisi (31) $\tilde{A}^m$ juga konvergen karena $\tilde{A}^m = (P\ A\ P^{-1})^m = P\ A^m\ P^{-1}$,maka Tiap-tiap $L_{k_i}(\lambda_i)$ harus konvergen, sehingga pada tiap-tiap baris diagonal $L_{k_i}(\lambda_i)$ harus dipenuhi $|\lambda_i| < 1$.

Jadi jika $|\lambda_i| < 1$ untuk i = 1, 2, ...,n; maka :$\rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i| < 1$

($\Leftarrow$) Jika $\rho(A) < 1$; maka elemen-elemen diagonal dari tiap-tiap $L_{k_i}(\lambda_i)$ memenuhi : $|\lambda_i| < 1$ berarti $\lim\limits_{m \to \infty} \overset{m}{d_{i,j}}(1) = 0$

$$i,j = 1, 2, \ldots, k_1$$
$$1 = 1, 2, \ldots, r$$

Karena $\tilde{A}^m$ konvergen, sedangkan

$$\tilde{A}^m = P\ A^m\ P^{-1}$$
$$P^{-1}\ \tilde{A}^m\ P = P\ P^{-1} A^m P^{-1}\ P$$
$$P^{-1}\ \tilde{A}^m\ P = A^m$$

Jadi A^m konvergen dan A juga konvergen

Dengan menggunakan teorema (4) pada persamaan (8) nampak bahwa untuk sembarang ε yang tidak nol, barisan vektor-vektor $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ konvergen ke vektor x jika $\rho(R^{-1}S) < 1$

Sekarang akan dipandang persamaan (5) yaitu:

$$x^{(m+1)} = R^{-1}S\ x^{(m)} + R^{-1}\ b$$
$$x^{(m)} = R^{-1}S\ x + R^{-1}\ b$$

$$x^{(m+1)} = R^{-1}S\ (R^{-1}S\ x^{(m-1)} + R^{-1}\ b) + R^{-1}\ b$$

$$= (R^{-1}S)^2\ x^{(m+1)} + R^{-1}\ b\ (R^{-1}\ S + 1)$$

Sehingga karena $x^{(m-1)} = R^{-1}S\ x^{(m-2)} + R^{-1}\ b$;maka

$$x^{(m+1)} = (R^{-1}S)^3\ x^{(m-2)} + R^{-1}\ b\{(R^{-1}S) + R^{-1}S + 1\}$$

$$\vdots$$

$$= (R^{-1}S)^{m+1}\ x^0 + R^{-1}\ b\ \{(R^{-1}S)^m + (R^{-1}S)^{m-1} + \ldots + R^{-1}S + 1\}$$

$$x^{(m+1)} = (R^{-1}S)\ x + \sum_{1=0}^{m} (R^{-1}S)\ R^{-1}\ b$$

Jika $\rho(R^{-1}S) < 1$;maka :

$$x = \lim_{1=0} x^m = (R^{-1}S)^{\infty}\ x + \sum_{1=0}^{\infty} (R^{-1}S)\ R^{-1}\ b$$

menurut teorema (4) $(R^{-1}S)^{\infty} = \lim_{m=\infty} (R^{-1}S) = 0$;

sehingga : $x = \sum_{1=0}^{\infty} (R^{-1}S)^1\ R^{-1}\ b$

Teorema (5) :

Jika $A^1 \to 0$ untuk m mendekati tak terhingga, maka I-A mempunyai invers dan dipenuhi $(I - A)^{-1} = \sum_{1=0}^{\infty} A^{\ell}$; dengan I = matriks Identitas.

Bukti :

Dipandang $(I-A) \sum_{1=0}^{k} A^{\ell} = I - A^{k+1}$;k = 1, 2,... maka $(I-A) \sum_{1=0}^{k} A^{\ell} = I - A^{\infty} = I$;menurut teorema (4) $A^{\infty} = 0$. Sehingga $(I-A) \sum_{\ell=0}^{\infty} A^{\ell} = I$. Atau :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A^{\ell} = (I-A)^{-1}$$ ....Terbukti.

2.7. Matriks Klass Z dan Matriks Klass K.

Definisi (32) :

Matriks klass Z adalah himpunan semua matriks riel yang berbentuk bujur sangkar dan elemen-elemen yang bukan diagonal utama non positif.

Contoh (16) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks dalam klass Z sebab semua elemen selain diagonal utama non positif.

Definisi (33) :

Matriks bujur sangkar A adalah matriks dalam klass K jika $A \in Z$ dan $A^{-1} \geq 0$;dengan Z = matriks klass z.

Contoh (17) :

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Adalah matriks dalam klass K, sebab elemen-elemen selain diagonal utama non positif, jadi $A \in Z$ dan

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq$. Jadi definisi matriks dalam klass K dipenuhi yaitu $A \in Z$ dan $A^{-1} \geq 0$.

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$B \in Z$ dipenuhi sebab semua elemen selain diagonal utama non positif. $B^{-1} = \dfrac{\text{Adjoin B}}{\det(B)}$;karena $B^{-1} < 0$ maka syarat matriks dalam klass K tidak dipenuhi. Jadi B bukan matriks dalam klass K.

Teorema (6)

Untuk A matriks dalam klass Z, maka sifat-sifat berikut dipenuhi :

1. Terdapat vektor $x \geq 0$, sedemikian hingga $Ax > 0$
2. Terdapat vektor $x > 0$, sedemikian hingga $Ax > 0$.
3. Terdapat matriks diagonal D dengan elemen-elemen diagonal positif sehingga $A\,D\,e > 0$, untuk e = vektor satuan.
4. Terdapat matriks diagonal D dengan elemen-elemen positif sedemikian hingga A.D adalah matriks dengan prinsip diagonal dominan positif.
5. Untuk setiap matriks diagonal R dengan $R \geq A$, maka R adalah non singular dan $\rho(R^{-1}(P-A)) < 1$, dengan P = diagonal dari A.
6. Jika $B \in Z$ dan $B \geq A$, maka B non singular.
7. Tiap riil $\lambda \in \sigma(A)$ adalah positif dan terdapat paling sedikit 1 riil $\lambda \in \sigma(A)$.

Bukti :

($1 \Rightarrow 2$) Untuk $x \geq 0$, dengan $Ax > 0$, pilih $\delta >$ cukup kecil sehingga $A(x + \delta e) > 0$ dan e = vektor satua, maka $x + \delta e > 0$.

($2 \Rightarrow 3$) Ambil $x > 0$, dengan $Ax > 0$.

Jika $d_{ii} = x_i$, untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,n$ dan $d_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, dengan $i \,;\, j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$.

Maka D memenuhi $A\,x = A\,D\,e > 0$.

($3 \Rightarrow 4$) Ambil $W = A\,D$. Karena $W\,e = A\,D\,e > 0$;maka

$$|W_{ii}| \geq W_{ii} > -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} W_{ij} \quad ; \text{ untuk } i = 1,2,\ldots, n$$

Karena $A \in Z$, $-w_{ij} = |w_{ij}|$ sehingga menurut definisi (27), w mempunyai prinsip diagonal dominan. Tetapi $-w_{ij} \geq 0$ sehingga $w_{ii} > 0$. Terbukti A D matriks dengan diagonal dominan positif.

(4 ⇒ 5) Untuk $A D = w_{ij}$, maka menurut (4) diperoleh

$w_{ii} > 0$ dan $a_{ii} > 0$. Menurut teorema (2); $\rho(I-H^{-1}AD) < 1$ dengan : H = matriks diagonal dari A D. Ambil P matriks diagonal dari A, maka H = P D sehingga :

$$1 > \rho(I-H^{-1}AD) = \rho(I-D^{-1}P^{-1}AD) = \rho(D^{-1}(D-P^{-1}AD))$$

$$= \rho(D^{-1}(I-P^{-1}A)D)$$

$$= \rho(I-P^{-1}A)$$

Sekarang ambil R matriks diagonal sedemikian hingga $R \geq A$, sehingga $r_{ii} \geq a_{ii} > 0$. Karena $\det(R) > 0$ dan R non singular juga $P^{-1} \geq R^{-1}$ dan $P - A \geq 0$ maka :

$$\rho(R^{-1}(P-A)) \leq \rho(P^{-1}(P-A))$$

Tetapi $1 > \rho(I-P^{-1}A) = \rho(P^{-1}(P-A))$

Sehingga $1 > \rho(R^{-1}(P-A)$

(5 ⇒ 6) Jika R diagonal dari $B \in Z$ dan P diagonal dari $A \in Z$.

Ambil $B \geq A$, maka $R \geq P$ dan R^{-1} ada dan mempunyai elemen-elemen diagonal positif.

Menurut (5) $\rho\ (R^{-1}\ (P-A)) < 0$; karena $(P-A) \geq (R-B) \geq 0$ dan $R^{-1}\ (P-A) \geq R^{-1}\ (R-B) \geq 0$.

Sehingga menurut (5) diperoleh

$$1 > \rho\ (R^{-1}\ (P-A)) \geq \rho(R^{-1}(R-B)) = \rho\ (I-R^{-1}B).$$

Menurut theorema (4) dan (5) maka $(I-I+R^{-1}B)^{-1}$ ada. Jadi $(R^{-1}B)^{-1}$ ada, berarti B^{-1} ada. Terbukti B non singular.

(6 $\Rightarrow$ 7) Pilih $\lambda > 0$ sedemikian hingga $A - \lambda I \leq 0$; sehingga

$\lambda - \rho(\lambda I - A) \in \sigma(A)$. Karena λ real dan $\rho(\lambda I - A)$ real, terbukti terdapat eigenvalue riil dalam A

(7 $\Rightarrow$ 1) Ambil $\lambda > 0$ sehingga $I - \lambda A \geq 0$

Menurut theorema (5) $\sum_{\ell=0}^{\infty} (I - \lambda A)^{\ell} = (I - (I - \lambda A))^{-1}$

Karena $I - \lambda A \geq 0$ maka $(I - (I - \lambda A))^{-1} \geq 0$

Padahal $A = \dfrac{1}{\lambda}(I - (I - \lambda A))$

$$A^{-1} = \lambda\ (I - (I - \lambda A))^{-1} \geq 0$$

Jadi $A^{-1} \geq 0$

Sekarang ambil $x = A^{-1}\ e \quad \geq 0$.

Maka terbukti $A\ x > 0$

2.8. Teknik Iterasi Pada Matriks Klass K.

Diberikan persamaan sistim linier : $A\ x = b$

dengan : A = matriks dalam klass K berukuran $(n \times n)$

x , b = vektor kolom dimensi n

Untuk menjamin kekonvergenan penyelesaian persamaan diatas dengan metode iterasi matriks, akan dipilih matriks-matriks R dan S sedemikian hingga : $A = R - S$ dengan : R = matriks non singular dan $\rho(R^{-1}S) < 1$. Hal ini akan dibuktikan dengan theorema-theorema berikut ini.

Theorema (7) :

Apabila $A \in K$, $B \in Z$ dan $A \leq B$, untuk $B \in K$ maka sifat-sifat berikut dipenuhi untuk K =matriks klass K dan Z = matriks klass Z.

1. $A^{-1}B \geq I$ dan $BA^{-1} \geq I$
2. $B^{-1}A \geq$ dan $AB^{-1} \leq I$
3. $\rho(I - B^{-1}A) < I$ dan $\rho(I - AB^{-1}) < I$

Bukti :

1. A didalam klass K, maka menurut definisi (32), $A^{-1} \geq 0$

   karena $B \geq A$ maka $B - A \geq 0$

$$A^{-1}B - A^{-1}A \geq 0 \text{ .Terbukti } A^{-1}B \geq I$$

$$B - A \geq 0$$

$$BA^{-1} - AA^{-1} \geq 0$$

$$BA^{-1} - I \geq 0 \text{ ; terbukti } BA^{-1} \geq I$$

2. $B \in K$ maka $B^{-1} \geq 0$. Padahal $B \geq A$

   *) $B - A \geq 0$

   Sehingga $B^{-1}B - B^{-1}A \geq 0$ atau $I - B^{-1}A \geq 0$

   Terbukti $I \geq B^{-1}A$

   **) $B - A \geq 0$

   $BB^{-1} - AB^{-1} \geq 0$

   $I - AB^{-1} \geq 0$

   Terbukti $AB^{-1} \leq I$

3. Dari sifat (2) $(I - B^{-1}A) \geq 0$; menurut theorema (5)

   $(I - I + B^{-1}A)^{-1} = BA^{-1} \geq 0$

   *) Karena $B \geq A$ maka $B - A \geq 0$ dan $A^{-1} \geq B^{-1}$. Sehingga menurut theorema (6.5) diperoleh :

   $\rho(A(B^{-1} - A)) \geq \rho(B^{-1}(B - A)) = \rho(I - B^{-1}A) < 1$

   **) Dengan cara yang sama ,dari sifat ke-2 ;$(I - AB^{-1}) \geq 0$ menurut theorema (5) $(I - (I - AB^{-1}))^{-1} = (I - I + AB^{-1})^{-1}$

$$= A^{-1}B \geq 0$$

   Karena $A^{-1} \geq B^{-1}$ maka $A^{-1} - B^{-1} \geq 0$. Sehingga menurut theorema (6.5) diperoleh :

   $\rho(B(A^{-1} - B^{-1})) \geq \rho(A(A^{-1} - B^{-1})) = \rho(I - AB^{-1}) < 1$

   Terbukti $\rho(I - B^{-1}A) < I$ dan $\rho(I - AB^{-1})$

Theorema (8) :

Apabila matriks A dalam klass K dan memenuhi pemecahan matriks A sedemikian hingga $A = R-S$,

dengan : R = matriks dalam klass Z.

S = matriks yang memenuhi pemecahan martiks diatas dan matriks $S \geq 0$.

Maka radius spektral dari matriks $R^{-1}S$, yaitu $\rho(R^{-1}S) < 1$ dan R matriks non singular.

Bukti :

*) Karena $R = A+S \geq A$, dengan $A \in K$ dan $R \in Z$, maka menurut theorema (7) dipenuhi :

$$1 > \rho\ (I-R^{-1}A) = \rho\ (R^{-1}(R-A)) = \rho\ (R^{-1}S)$$

terbukti radius spektral $R^{-1}S < 1$ atau $\rho\ (R^{-1}S) < 1$.

*) Karena $R \in Z$, maka elemen-elemen bukan diagonal utamanya non negatif sehingga terdapat bilangan riil positif $\alpha > 0$ sedemikian hingga $(I - \alpha R) \geq 0$, dengan I = matriks Identitas.

Menurut theorema (5) $\sum_{\ell=0}^{\infty} (I - \alpha R)^{\ell} = (I - (I - \alpha R))^{-1}$

karena $(I - \alpha R) \geq 0$ maka $\sum_{\ell=0}^{\infty} (I - \alpha R)^{\ell} = (I - (I - \alpha R)^{-1} \geq 0$

Padahal matriks R bisa ditulis sebagai :

$R = \dfrac{1}{\alpha} (\alpha R)$;$\alpha > 0$;atau $R = \dfrac{1}{\alpha} (I - (I - \alpha R))$

$R^{-1} = \alpha(I - (I - \alpha R))^{-1}$,karena $I - (I - \alpha R)^{-1} \geq 0$;maka $R^{-1} \geq 0$

Menurut definisi (16) $R^{-1} \geq 0$ berarti invers R ada atau $\det(R) \neq 0$.

Terbukti R non singular.

2.9. Systim Substitusi Leontief.

Dalam sub bab ini konsep matriks dari klass Z dan klass K akan diperluas lagi sehingga menjadi suatu sistem persamaan yang penyelesaiannya dititikberatkan pada karakteristik basis Leontief sebagai titik ekstrim dari himpunan penyelesaian non negatif dari sistem persamaan tersebut.

Definisi (34) :

Suatu matriks dinamakan matriks Pre Leontief jika tiap kolomnya mempunyai paling banyak satu elemen positif.

contoh (18) :

Diberikan matriks A, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah pre Leontief,sebab tiap kolomnya mempunyai paling banyak satu elemen positif.

Definisi (35) :

Suatu matriks pre Leontief A juga merupakan matriks Leontief jika tiap-tiap kolomnya mempunyai tepat satu elemen positif dan terdapat suatu vektor $x \geq 0$ sedemikian hingga dipenuhi $A\,x > 0$

contoh (19) :

Pandang matriks A dari contoh (18). A bukan matriks Leontief,sebab meskipun A pre Leontief tetapi pada baris ketiga tidak ditemukan adanya elemen positif, sehingga pada baris ke-3 tidak terdapat vektor $x \geq 0$ yang memberikan $A\,x > 0$

contoh (20) :

Diberikan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 0,54 & 0,79 & -0,3 & -0,26 & -0,3 & -0,13 \\ -0,13 & -0,31 & 0,74 & 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,37 & -0,22 & -0,2 & -0,3 & 0,64 & 0,77 \end{bmatrix}$$

Matriks B adalah pre Leontief sebab tiap kolomnya mempunyai dengan tepat satu elemen positif.

Jika diambil suatu vektor $x \geq 0$, misal

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$ maka akan didapat

$$B\,x = \begin{bmatrix} 0,54 & 0,79 & -0,3 & -0,26 & -0,3 & -0,13 \\ -0,13 & -0,31 & 0,74 & 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,37 & -0,22 & -0,2 & -0,3 & 0,64 & 0,77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,49 \\ 0,72 \end{bmatrix} > 0$$

Jadi B adalah matriks Leontief, sebab B pre Leontief dan terdapat vektor $x \geq 0$ sehingga $B\,x > 0$.

<u>Definisi</u> (36) :

Suatu matriks Pre Leontief disebut Sub Leontief jika xektor x yang memberikan $A\,x \geq 0$ hanya dipenuhi oleh vektor $x = 0$.

<u>Definisi</u> (37):

Jika A matriks Leontief dan terdapat suatu vektor $y \geq 0$ sedemikian hingga $y' \cdot A > 0$,maka A adalah matriks Leontief Total.

Contoh (21) :

Diberikan matriks B dalam contoh (20). Akan dibuktikan bahwa B matriks Leontief Total.

Bukti :

Dari contoh (20) telah terbukti bahwa matriks B Leontief.

Diambil suatu vektor $y \geq 0$;yaitu $y = \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka vektor $y' = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga :

$y'.B =$

$$\begin{bmatrix} 1{,}4 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}54 & 0{,}79 & -0{,}30 & -0{,}26 & -0{,}30 & -0{,}13 \\ -0{,}13 & -0{,}31 & 0{,}74 & 0{,}70 & -0{,}20 & -0{,}30 \\ -0{,}37 & -0{,}22 & -0{,}20 & -0{,}30 & 0{,}64 & 0{,}77 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}256 & 0{,}576 & 0{,}12 & 0{,}036 & 0{,}02 & 0{,}288 \end{bmatrix}$$

$y'.B \geq 0$

Terbukti B matriks Leontief Total sebab matriks B Leontief dan $\exists\ y \geq 0$ sehingga didapatkan $y'.B > 0$.

<u>Definisi</u> (38) :

Baris/kolom dari suatu matrks $A_{(m \times n)}$ trivial jika untuk setiap vektor non negatif $x \geq 0$ dipenuhi $A\,x \geq 0$ dan komponen ke-i dari $A\,x$ tersebut adalah nol. Sedangkan baris-baris/kolom-kolom yang selain ke-i adalah non trivial.

Theorema (9) :

Jika A matriks segitiga (atas/bawah) dengan A_{ij} untuk $i \neq j$. Maka A Leontief bujur sangkar jika A_{ii} Leontief untuk semua i

Bukti :

($\Rightarrow$) Diambil A matriks segitiga bawah ($A_{ij} = 0$;$\forall j > i$).

Dianggap A Leontief ;maka $\exists x \geq 0$ sedemikian hingga $Ax > 0$ sehingga diperoleh

$$A_{NN} \cdot x_N > 0$$

$$A_{(N-1)(N-1)} \cdot x_{(N-1)} + A_{(N-1)(N)} \cdot x_{(N)} > 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ii} \cdot X_i > 0$$

Sehingga A_{NN} adalah Leontief. Karena A_{nn} Leontief maka $A_{(N-1)(N)} \leq 0$ dan $A_{(N-1)(N-1)}$ adalah Leontief dan seterusnya.

($\Leftarrow$) Dianggap A_{ii} Leontief untuk semua i.

Karena A_{NN} Leontief, maka $\exists\, x_N \geq 0$ sedemikian hingga $A_{NN}\, x_N > 0$

Karena $A_{(N-1)(N-1)}$ Leontief , $\exists\, x_{N-1} \geq 0$ sedemikian hingga $A_{(N-1)(N-1)}\, x_{(N-1)} > 0$

Atau $A_{(N-1)(N-1)} + A_{(N-1)(N)}\, x_{(N-1)} > 0$

untuk $A_{(N-1)\,N} \leq 0$ dan seterusnya ;sehingga terdapat $x \geq 0$ sedemikian hingga $A\, x > 0$ **Terbukti.**

Definisi (39) :

Jika diberikan sistim persamaan $A\, x = b$

$b\, ,\, x \geq 0.$

Dengan A = Matriks berukuran (m×n)

x , b = vektor-vektor kolom berukuran n

Sistim persamaan diatas disebut sistim Substitusi Leontief jika A adalah matriks Leontief dan disebut Sistim Substitusi Leontief Total jika matriks A adalah matriks Leontief Total.

Theorema (10) :

Jika A suatu matriks Leontief berukuran (m×n) maka A adalah suatu titik ekstrim dari $X(b) = \{x : Ax = b,\ x \geq 0$ untuk $b \geq 0\}$; jika x ditentukan oleh matriks Leontief berukuran (m×m) sebagai basis matriksnya.

Bukti :

Dianggap x titik ekstrim dari X(b).

Jika x = 0 maka hasilnya dipenuhi. Andaikan $x \geq 0$; ambil A_J sub matriks dari A, dengan J terdiri dari $i = 1, 2, \ldots, n$, dengan x_i positif. Maka $x_{\bar{J}} = 0$ dengan $\bar{J}$ = komplemen dari J. Jadi baris non positif dari A_J harus nol.

Ubah A_J dan b sehingga : $A_J = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Maka $b_2 = 0$. Sekarang A_1 mempunyai kolom bebas linier dan baris-barisnya tidak dapat dihilangkan. Lebih lanjut karena $x_J > 0$,maka kolom-kolom A_1 non trivial. Maka menurut theorema (9), A_1 Leontief bujur sangkar. Sekarang karena A Leontief maka terdapat suatu matriks C Leontief berukuran (m×m) dengan $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 \\ C_4 & C_2 \end{bmatrix}$;

dengan $C_3 \leq 0$,$C_4 \leq 0$

dan ukuran C_1 sama dengan A_1 sehingga terdapat matriks D yaitu : D = $\begin{bmatrix} A_1 & C_3 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$ dan matriks D leontief.

Karena matriks C Leontief maka menurut theorema (9), C_2 Leontief. Sehingga D adalah Leontief bujur sangkar dan x dapat ditentukan dari matriks Leontief D berukuran (m×m). Jadi x merupakan titik ekstrim.

Contoh (22) :

Jika diberikan sistim persamaan : $A\ x = b$; dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan definisi (21) ,maka terbukti A Leontief berukuran (3×2)

Jika $x \geq 0$ titik ekstrim dari $A\ x = b$ dan $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ maka x dapat

ditentukan oleh $J = (3,2)$ dengan $A_J \cdot x_J = b$. Sehingga $A_J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

dan $x_J = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

atau $A_{(3,2)}$ merupakan basis Leontief dalam A dan berukuran (2×2).

Theorema (11) :

$A = (a_{ij})$ matriks Leontief berukuran $(n \times n)$ yang dibentuk dari matriks klass Z. Jika dan hanya jika $A \in K$ dengan K = matriks klass K.

Bukti :

($\Rightarrow$) Karena A leontief maka menurut definisi (26) ,$\exists\ x > 0$ sehingga $A\ x > 0$, menurut theorema (6) sifat 7 maka $A^{-1} \geq 0$, padahal $A \in Z$ dengan Z = matrks klass Z. Dengan definisi(23) diperoleh $A \in Z$ dan $A^{-1} \geq 0$ berarti A merupakan matriks dalam klass K.

($\Leftarrow$) $A \in K$ berarti $A \in Z$,menurut theorema (6) sifat 1 maka terdapat suatu $x \geq 0$, sedemikian hingga $A\ x > 0$. Sesuai dengan definisi (26) maka A Leontief.

Definisi (40) :

Diberikan $A = (a_{ij})$ = matriks Leontief berukuran (m×n); maka $A_J \in Z$ untuk $\forall\ J \in N$ dengan :

$N_i = \{j : a_{ij} > 0\}$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Dan

$$N = \bigtimes_{i=1}^{m} N_i = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m;$$ untuk N = himpunan basis matriks A pada kolom J yang ada dalam klass Z.

Definisi (41) :

Jika diberikan $A = (a_{ij})$ yaitu matriks Leontief berukuran (m×n) maka ; $M \subseteq N$, dengan N = himpunan semua basis matriks A pada kolom J yang ada dalam klass Z (yaitu $A_J \in Z$) dan M = himpunan semua basis matriks A pada kolom J yang ada dalam klass K (yaitu $A_J \in K$).

Theorema (12) :

Jika A matriks Leontief Total maka setiap basis matriks A pada kolom J yang ada dalam klass Z juga merupakan basis matriks A pada kolom J yang ada dalam matriks klass K. Atau M = N.

Bukti :

Diketahui matriks A total Leontief maka A Leontief. Menurut definisi (41) A Leontief berarti $M \subseteq N$. Akan ditunjukkan $N \subseteq M$.

Pilih basis A_J untuk $J \in N$.

Karena A matriks Leontief Total maka menurut definisi (37) $\exists$ vektor $y \geq 0$ sehingga $y' . A > 0$; untuk y' tranpose y. Ini juga dipenuhi untuk $y' . A_J > 0$. Menurut theorema (6) matriks klass K tertutup terhadap pertukaran kolom. Padahal pada pemilihan basis A_J dalam klass Z dan klass K juga tidak dapat saling dipertukarkan, yaitu harus sesuai dengan definisi (40) dan (41). Ini berarti A_J yang telah dipilih yang ada dalam klass K yaitu $A_J \in K$.

Sehingga menurut definisi (41) $J \in M$. Jadi $N \subseteq M$.

Karena $M \subseteq N$ dan $N \subseteq M$, maka terbukti $M = N$.

Contoh (23) :

Diberikan matriks B sebagaimana dalan contoh (21). Akan dibuktikan bahwa B matriks Leontief Total dan $N = M$.

Jawab :

Dari contoh (21) telah terbukti bahwa B matriks Leontief Total. Sekarang tinggal membuktikan bahwa setiap $B_J \in Z$ juga dipenuhi $B_J \in K$ atau $M = N$.

$$B = \begin{bmatrix} 0,54 & 0,79 & -0,30 & -0,26 & -0,30 & -0,13 \\ -0,13 & -0,31 & 0,74 & -0,70 & -0,20 & -0,30 \\ -0,37 & -0,22 & -0,20 & -0,30 & 0,64 & 0,77 \end{bmatrix}$$

menurut definisi (40) $N_i = \{j,\ a_{ij} > 0\}$, $i = 1,2,\ldots,m$.

$N_1 = \{1,2\}$

$N_2 = \{3,4\}$

$N_3 = \{5,6\}$

$N = N_1 \times N_2 \times N_3$

$= \{1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6\}$

$= \{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(2,3,5),(2,4,5),$

$(2,3,6),(2,4,6)\}$

$= \{J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ J_5,\ J_6,\ J_7,\ J_8\}$

$$B_{J_1} = \begin{bmatrix} 0,54 & -0,30 & -0,30 \\ -0,13 & 0,74 & -0,20 \\ -0,37 & -0,20 & 0,64 \end{bmatrix} \in K \text{ ,sebab } B_{J_1} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 4,47 & 1,02 & 3,09 \\ 2,60 & 2,42 & 2,26 \\ 2,91 & 1,52 & 3,72 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_2} = \begin{bmatrix} 0,54 & -0,30 & -0,13 \\ -0,13 & 0,74 & -0,30 \\ -0,37 & -0,20 & 0,77 \end{bmatrix} \in K \text{ ,sebab } B_{J_2} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,35 & 1,68 & 1,07 \\ 0,06 & 2,10 & 1,08 \\ 1,73 & 1,03 & 2,08 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_3} = \begin{bmatrix} 0,54 & -0,26 & -0,30 \\ -0,13 & 0,70 & -0,20 \\ -0,37 & -0,30 & 0,64 \end{bmatrix} \in K, \text{ sebab } B_{J_3} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 4,85 & 3,20 & 3,28 \\ 1,97 & 2,94 & 1,84 \\ 3,24 & 3,23 & 4,30 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_4} = \begin{bmatrix} 0.54 & -0,26 & -0,13 \\ -0,13 & 0,70 & -0,30 \\ -0,37 & -0,30 & 0,77 \end{bmatrix} \in K, \text{ sebab } B_{J_4} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_4}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,95 & 1,04 & 0,73 \\ 0,04 & 1,60 & 0,78 \\ 1,30 & 1,13 & 1,48 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_5} = \begin{bmatrix} 0,79 & -0,30 & -0,30 \\ -0,31 & 0,74 & -0,20 \\ -0,22 & -0,20 & 0,64 \end{bmatrix} \in K, \text{ sebab } B_{J_5} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_5}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,17 & 1,26 & 1,41 \\ 1,21 & 2,20 & 1,26 \\ 1,12 & 1,12 & 2,46 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_6} = \begin{bmatrix} 0,79 & -0,26 & -0,30 \\ -0,31 & 0,70 & -0,20 \\ -0,22 & -0,30 & 0,64 \end{bmatrix} \in K, \text{ sebab } B_{J_6} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_6}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,28 & 1,53 & 1,54 \\ 1,40 & 2,59 & 1,48 \\ 1,45 & 1,73 & 2,78 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_7} = \begin{bmatrix} 0,79 & -0,30 & -0,13 \\ -0,31 & 0,74 & -0,30 \\ -0,22 & -0,20 & 0,77 \end{bmatrix} \in K, \text{ sebab } B_{J_7} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_7}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,82 & 0,92 & 0,66 \\ 1,09 & 2,07 & 0,99 \\ 0,80 & 0,80 & 1,76 \end{bmatrix} > 0$$

$$B_{J_8} = \begin{bmatrix} 0,79 & -0,26 & -0,13 \\ -0,31 & 0,70 & -0,30 \\ -0,22 & -0,30 & 0,77 \end{bmatrix} \in K, \text{ sebab } B_{J_8} \in Z \text{ dan}$$

$$B_{J_8}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,04 & 0,73 & 0,17 \\ 1,36 & 2,64 & 0,77 \\ 1,12 & 1,34 & 2,15 \end{bmatrix} > 0$$

Terbukti $N = M$ sebab untuk setiap $J \in N$ maka $A_J \in K$, untuk $J \in M$.

2.10. Dualitas.

Definisi (42) :

Jika diberikan suatu permasalahan sistim linier dengan bentuk :

(I)(*) Memaksimalkan/meminimalkan sistim linier : $f = C\,x$

(**) dengan syarat $A\,x \leq B$

(***) yang memenuhi $x \geq 0$

(II) Meminimalkan/ mamaksimalkan sistim liner : $g = B'\,v$

dengan syarat $A'\,v \geq C'$

yang memenuhi $v \geq 0$

dengan: A = Matriks koefisien

B = kolom suku tetap

C = koefisien ongkos

A' = transpose matriks A

B' = transpose matriks B

C' = transpose matriks C

Soal (II) disebut dual terhadap soal (I) sedang soal (I) disebut primalnya. Sebaliknya jika soal (II) dianggap primal maka (I) adalah dualnya.

Dalam notasi Σ soal (I) dan soal (II) diatas dapat ditulis :

(I) Memaksimalkam/meminimalkan : $f = \sum_j c_j x_j$

Dengan syarat $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$

yang memenuhi $x_j \geq 0$

(II) Meminimalkan/memaksimalkan : $g = \sum_i b_i v_i$

Dengan syarat $\sum_i a_{ji} v_i \geq c_j$

yang memenuhi $v_i \geq 0$

$i = 1, 2, \ldots, m$

$j = 1, 2, \ldots, n$

Dari soal (I) dan (II) nampak bahwa :

- Koeffisien ongkos c_j pada (I) menjadi kolom suku tetap pada soal (I).
- Kolom suku tetap b_i pada soal (I) menjadi koefisien ongkos pada soal (II).
- Matriks koefisien pada soal (II) adalah transpose pada soal (I).

Definisi (43):

x disebut penyelesaian fisibel dari masalah (I) jika memenuhi (*) dan (**).Dan disebut penyelesaian optimal jika sekaligus memenuhi (***). Optimal disini adalah memaksimalkan dan meminimalkan.

Dalil (1) :

Jika x suatu penyelesaian fisibel soal (I) dan v penyelesaian fisibel soal (II) maka :

$$c\,x \leq B'\,v \quad \text{atau} \quad f(x) \leq g(v) \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

Bukti :

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ adalah penyelesaian fisibel soal (I).

Jadi: $(\sum_j a_{ij} x_j \le b_i) \cdot v_i$;untuk semua i .

$v_i \sum_j a_{ij} x_j \le v_i b_i$;karena $v_i \ge 0$

$\sum_i v_i \sum_j a_{ij} x_j \le \sum_i v_i b_i$ atau dapat ditulis

$v' A x \le B' v$.

$v = [v_1, v_2, \ldots, v_3]$ adalah penyelesaian fisibel soal (II).

Jadi: $(\sum_i a_{ij} v_i \ge c_j) \cdot x_j$; untuk semua j

$\sum_i a_{ij} v_i x_j \ge c_j x_j$;karena $x_j \ge 0$

$\sum_j \sum_i a_{ij} v_i x_j \ge \sum_j c_j x_j$ atau dapat ditulis

$v' A x \ge C x$

Dari kedua hasil diatas diperoleh :

$C x \le v' A x \le B' v$

Jadi $C x \le B' v$; ....**Terbukti.**

Dalil (2) :

Jika x_o adalah penyelesaian fisibel soal (I) dan v_o penyelesaian fisibel soal (II) dan $C x_o = B v_o$;maka x_o adalah penyelesaian optimal soal (I) dan v_o penyelesaian optimal soal (II) sehingga $f_{max} = g_{min}$

Bukti :

Diketahui $C x_o = B' v_o$

Dengan (i) $C x \le B' v_o = C x_o$ untuk sembarang penyelesaian fisibel soal (I).

Jadi $C x \le C x_o$ berarti x_o adalah penyelesaian optimal soal (I)

Dengan cara yang sama untuk sembarang penyelesaian fisibel soal (II) misal v berlaku :

$$B' \ v \leq C \ x_o \ = B' \ v_o$$

Jadi $B' \ v \geq B' \ v_o$

Jadi v_o adalah penyelesaian optimal soal (II).

Dan jelas bahwa $f_{max} = C \ x_o = B \ v_o = g_{min}$. ....Terbukti.