BAB II

MARTINGALE DAN SUPERMARTINGALE

2.1 Martingale, Supermartingale dan Submartingale

Misalkan $(\Omega , \mathcal{A} , P)$ adalah suatu ruang probabilitas, dimana Ω menunjukkan event - event, $\mathcal{A}$ menunjukkan sebuah σ - field yang didefinisikan dalam Ω dan P menunjukkan probabilitas yang didefinisikan dalam $\mathcal{A}$, serta $(\mathcal{F}_n)$ adalah keluarga sub σ - field dari $\mathcal{A}$, dengan $n \geq 0$ sedemikian sehingga $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}$. Dan misalkan $X_0, X_1, \ldots$ adalah barisan variabel random yang didefinisikan pada $(\Omega , \mathcal{A} , P)$ maka jika variabel X_n terukur terhadap $\mathcal{F}_n$, untuk $n \geq 0$, kita katakan bahwa himpunan $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$ atau secara sederhana $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ disebut barisan stokastik.

Jika barisan stokastik $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ mempunyai sifat bahwa variabel X_n terukur terhadap $\mathcal{F}_{n-1}$, untuk setiap $n \geq 1$ maka barisan stokastik tersebut boleh kita tulis sebagai $X = (X_n , \mathcal{F}_{n-1})$

Definisi 2.1.1

Proses stokastik $X = X_t$, $t \in R^+$ adalah terukur jika fungsi $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ adalah terukur terhadap $\mathcal{B}(R^+) \times \mathcal{A}$. Jika $t \in [0,T]$, keterukuran adalah terhadap $\mathcal{B}\ [0,T] \times \mathcal{A}$.

Definisi 2.1.2

Misal barisan $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ adalah barisan stokastik, dengan X_n terintegral dan terukur terhadap $\mathcal{F}_n$, untuk setiap $n \geq 0$.

Maka :

(i) barisan $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ disebut Martingale jika,
$E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ untuk $m \geq n \geq 0$

(ii) barisan $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ disebut Supermartingale jika, $E(X_m \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$, untuk $m \geq n \geq 0$

(iii) barisan $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ disebut Submartingale jika, $E(X_m \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$, untuk $m \geq n \geq 0$

Dalam keadaan khusus, yaitu jika $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$ dimana $\mathcal{F}_n^X = \sigma\ \{ \omega : X_o , \ldots , X_n \}$, yaitu field yang dibangun oleh X_o ,..., X_n dan barisan $X = \{ X_n , \mathcal{F}_n \}$ adalah suatu martingale atau supermartingale atau submartingale maka barisan (X_n), $n \geq 0$ dikatakan sebagai suatu martingale atau supermartingale atau submartingale.

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh martingale atau submartingale, sedangkan khusus untuk supermartingale akan dibahas lebih lanjut dalam Bab III.

Contoh 1

Jika (ξ_n), $n \geq 0$ adalah barisan dari variabel random independen dengan $E(\xi_n) = 0$ dan $X_n = \xi_o + \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma \{ \omega : \xi_o ,\dots, \xi_n \}$ maka barisan stokastik $X = (X_n , \mathcal{F}_n)$ adalah suatu martingale.

Bukti :

Misalkan $X_n = \xi_o + \dots + \xi_n$, maka

$$E(|X_n|) = E(|\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n|)$$
$$\leq E(|\xi_0|) + \ldots + E(|\xi_n|)$$
$$< \infty \text{ , untuk } n \geq 0.$$

Karena $E(|X_n|) < \infty$ maka jelas bahwa untuk setiap $n \geq 0$, X_n teritengral.

Dan untuk $m \geq n \geq 0$,

$$E(X_m \mid \mathscr{F}_n) = E(X_n + X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$$
$$= E(X_n \mid \mathscr{F}_n) + E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$$

Karena X_{n+1} independen dengan $\mathscr{F}_n$ maka :

$$E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = E(X_{n+1})$$

dan juga karena $E(\xi_n) = 0$ maka $E(X_{n+1}) = 0$, sehingga didapat :

$$E(X_m \mid \mathscr{F}_n) = E(X_n \mid \mathscr{F}_n) + E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$$
$$= E(X_n \mid \mathscr{F}_n) + E(X_{n+1})$$
$$= X_n + 0$$
$$= X_n$$

Juga $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_m$, untuk $m \geq n \geq 0$ dan X_n terukur terhadap $\mathscr{F}_n$. Karena barisan stokastik diatas memenuhi semua sifat dari martingale maka terbukti bahwa $X = (X_n , \mathscr{F}_n)$ adalah suatu martingale.

Contoh 2.

Jika (ξ_n), $n \geq 0$ merupakan barisan variabel random yang independen dengan $E(\xi_n) = 1$, maka barisan stokastik $(X_n, \mathcal{F}_n)$ dengan $X_n = \Pi_{k=o}^{n} \xi_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\omega : \xi_o, \ldots, \xi_n\}$ adalah suatu martingale.

Bukti :

Dari $X_n = \prod_{k=o}^{n} \xi_k$, maka didapat :

$$E(X_n) = E[\Pi_{k=o}^{n} E(\xi_k)]$$

$$= \prod_{k=o}^{n} E(\xi_k)$$

$$= 1 < \infty$$

Sehingga jelas bahwa X_n terintegral, untuk $n \geq 0$.

Dan untuk $m \geq n \geq 0$,

$$E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = E(X_n \,.\, X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

$$= E(X_n \mid \mathcal{F}_n) \,.\, E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

Karena X_{n+1} independen dengan $\mathcal{F}_n$ maka :

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1})$$

dan juga karena $E(\xi_n) = 1$ maka $E(X_{n+1}) = 1$

sehingga :

$$E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = E(X_n \mid \mathcal{F}_n) \,.\, E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

$$= E(X_n \mid \mathcal{F}_n) \cdot E(X_{n+1})$$
$$= X_n \cdot 1$$
$$= X_n$$

Juga terlihat $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ untuk $m \geq n \geq 0$ dan X_n terukur terhadap $\mathcal{F}_n$. Karena barisan stokastik diatas memenuhi sifat dari martingale maka terbukti bahwa $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah suatu martingale.

Contoh 3.

Misalkan η adalah random variabel, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n$ dan $\xi_k = E(\eta \mid \mathcal{F}_k)$, maka barisan $\xi = (\xi_k, \mathcal{F}_k)$ adalah suatu martingale.

Bukti :

Dari pernyataan diatas jelas terlihat bahwa $E(\eta \mid \mathcal{F}_k)$ terukur terhadap $\mathcal{F}_k$ dan

$$E(\xi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = E(E(\eta \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k)$$
$$= E(\eta \mid \mathcal{F}_k)$$
$$= \xi_k < \infty$$

Pada hubungan ini perhatikan bahwa jika $\xi = (\xi_k, \mathcal{F}_k)$ adalah suatu martingale maka :

$$
\begin{aligned}
\xi_k &= E(\xi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \\
&= E[\, E(\xi_{k+2} \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k \,] \\
&= E(\xi_{k+2} \mid \mathcal{F}_k) = \ldots = E(\xi_n \mid \mathcal{F}_k)
\end{aligned}
$$

Karena $\xi_k = E(\xi_n \mid \mathcal{F}_k)$ maka $\xi = (\xi_k, \mathcal{F}_k)$ adalah suatu martingale.

Pada pembahasan contoh berikutnya kita akan memerlukan definisi dan lemma sebagai berikut :

Definisi 2.1.3

Fungsi $g(x)$ disebut fungsi konvek jika :

$g(x) \geq g(x_o) + (x - x_o)\, \lambda(x_o)$, untuk semua $x \in R$ dan $0 < \lambda < 1$

Lemma 2.1.1 (Ketidaksamaan Jensen)

Jika $g(x)$ adalah fungsi konvek dan $E[\xi] < \infty$ maka berlaku :

$$E[\, g(\xi) \,] \geq g(\, E[\xi] \,)$$

Bukti :

Jika $g = g(x)$ adalah fungsi konvek, maka untuk setiap $\mathbf{x}_o \in R$ ada bilangan $\lambda(\mathbf{x}_o)$ sedemikian sehingga $g(x) \geq g(x_o) + (x - x_o)\, \lambda(x_o)$, untuk semua $x \in R$.

Ambil $x = \xi$ dan $x_o = E(\xi)$ maka akan kita dapatkan :

$$g(\xi) \geq g(E(\xi)) + (\xi - E(\xi)).\lambda(E(\xi))$$

Akibatnya :

$$E[g(\xi)] \geq g(E(\xi))$$

Jadi terbukti bahwa :

$$E[g(\xi)] \geq g(E(\xi))$$

Contoh 4.

a. Jika $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah suatu martingale dan $g(x)$ adalah fungsi konvek dengan $E[g(X_n)] < \infty$, $n \geq 0$, maka barisan stokastik $(g(X_n), \mathcal{F}_n)$ adalah submartingale.

b. Jika $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah submartingale dan $g(x)$ adalah fungsi konvek, dengan $E|g(X_n)| < \infty$ untuk semua $n \geq 0$ maka $(g(X_n), \mathcal{F}_n)$ juga suatu submartingale.

Bukti :

a. Dengan ketidaksamaan Jensen terlihat bahwa :

$$E [g(X_m) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(E(X_m \mid \mathcal{F}_n)),$$

untuk $m \geq n \geq 0$.

Karena $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah suatu martingale maka :

$$E [g(X_m) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(E(X_m \mid \mathcal{F}_n))$$
$$= g(X_n)$$

Sehingga terbukti bahwa $(g(X_n), \mathcal{F}_n)$ adalah suatu submartingale.

b. Dengan ketidaksamaan Jensen terlihat bahwa :

$$E [g(X_m) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(E(X_m \mid \mathcal{F}_n)),$$

untuk $m \geq n \geq 0$.

Karena $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ adalah submartingale, maka :

$$E [g(X_m) \mid \mathcal{F}_n] \geq g(E(X_m \mid \mathcal{F}_n)) \geq g(X_n)$$

Sehingga terbukti bahwa $(g(X_n), \mathcal{F}_n)$ adalah juga suatu submartingale.

2.2 STOPPING TIME

Definisi 2.2.1

Variabel random $\tau = \tau(\omega)$ disebut random waktu untuk proses $\{X_n, n \geq 0\}$, jika $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Apabila $P\{\tau < \infty\} = 1$, maka random waktu τ disebut dengan suatu stopping time.

Atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

Variabel random $\tau = \tau(\omega)$ dengan nilai pada himpunan $\{0, 1, \ldots, +\infty\}$ disebut stopping time terhadap $(\mathscr{F}_n)$, jika untuk setiap $n \geq 0$;

$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$, dengan $P(\tau < \infty) = 1$

Misalkan τ adalah random waktu untuk proses $\{X_n, n \geq 0\}$ dan,

$$\bar{X}_n = \begin{cases} X_n & \text{jika } n \leq \tau \\ X_\tau & \text{jika } n > \tau \end{cases}$$

Maka $\{\bar{X}_n, n \geq 0\}$ disebut proses terhenti atau " stopped " proses.

Proposisi 2.2.1

Jika τ adalah variabel random untuk martingale $\{X_n\}$ maka proses terhenti $\{\bar{X}_n\}$ juga suatu martingale.

Bukti :

Misalkan :

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } \tau \geq n \\ 0 & \text{jika } \tau < n \end{cases}$$

yaitu $I_n = 1$ jika belum terhenti setelah $\mathcal{F}_{n-1}$. Maka kita nyatakan bahwa :

$$\bar{X}_n = \bar{X}_{n-1} + I_n (X_n - X_{n-1}) \quad \text{......(2.2.1)}$$

Untuk membuktikan (2.2.1) perhatikan 2 kasus berikut:

(i) untuk $\tau \geq n$

$\bar{X}_n = X_n$, $\bar{X}_{n-1} = X_{n-1}$ dan $I_n = 1$

dan (2.2.1) mengikuti.

(ii) untuk $\tau < n$

$\bar{X}_{n-1} = \bar{X}_n = X_\tau$, $I_n = 0$

dan (2.2.1) mengikuti.

Selanjutnya :

$$E[\,\overline{X}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\,] = E[\,\overline{X}_{n-1} + I_n\,(X_n - X_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}]$$
$$= E[\,\overline{X}_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}\,] + I_n\; E[(X_n - X_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}\,]$$
$$= E[\,\overline{X}_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}\,] + [\; I_n \;\; E[X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\,] \; -$$
$$I_n \; E[\,X_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}\,]$$
$$= \overline{X}_{n-1} + I_n \,.\, X_{n-1} - I_n \,.\, X_{n-1}$$
$$= \overline{X}_{n-1} + 0$$
$$= \overline{X}_{n-1} \qquad (2.2.2)$$

Dari sini terlihat bahwa $\overline{X}_{n-1}$ dan I_n ditentukan oleh $\mathscr{F}_{n-1}$, dan menunjukkan bahwa $\{\; X_n \;\}$ adalah suatu martingale .

Sekarang , akan kita buktikan bahwa $E[\;\overline{X}_n \mid \overline{\mathscr{F}}_{n-1}\;] = \overline{X}_{n-1}$. Bagaimanapun ini sudah dinyatakan secara tidak langsung dalam (2.2.2), karena jika kita tahu nilai dari $\mathscr{F}_{n-1}$ maka kita juga tahu nilai dari $\overline{\mathscr{F}}_{n-1}$.

Untuk lebih jelasnya , kita buktikan sebagai berikut :

$$E\;[\;\overline{X}_n \mid \overline{\mathscr{F}}_{n-1}\;] = E[\;E\,(\overline{X}_n \mid \mathscr{F}_{n-1} \,.\, \overline{\mathscr{F}}_{n-1}) \mid \overline{\mathscr{F}}_{n-1}\;)$$
$$= E\,[\,E\,(\;\overline{X}_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\;) \mid \overline{\mathscr{F}}_{n-1}\;]$$

$$= E[\ \bar{X}_{n-1} \mid \bar{\mathcal{F}}_{n-1}\ ]$$
$$= \bar{X}_{n-1}$$

Jadi terbukti bahwa proses terhenti $\{ \bar{X}_n \}$ juga suatu martingale.

Karena proses terhenti ini juga suatu stopping time, dan karena $\bar{X}_1 = X_1$, maka kita dapatkan :

$$E[\ \bar{X}_n\ ] = E[\ X_1\ ],\ \text{untuk semua } n \quad \ldots(2.2.3)$$

Sekarang andaikan bahwa random waktu τ adalah suatu stopping time , dimana $P\{ \tau < \infty \} = 1$

Karena :

$$\bar{X}_n = \begin{cases} X_n & \text{jika } n \le \tau \\ X_\tau & \text{jika } n > \tau \end{cases}$$

menunjukkan bahwa $\bar{X}_n$ sama dengan X_τ saat n cukup besar. Karena itu ,

$$\bar{X}_n \longrightarrow X_\tau \quad \text{dengan } n \longrightarrow \infty \text{ dengan probabilitas } 1$$

dan juga,

$$E[\ \bar{X}_n\ ] \longrightarrow E[\ X_\tau\ ] \text{ dengan } n \longrightarrow \infty \quad \ldots(2.2.4)$$

Karena $E[\bar{X}_n] = E[X_1]$ untuk semua n , maka (2.2.4) menyatakan bahwa :

$$E[X_\tau] = E[X_1]$$

Dari keterangan diatas , kita dapat menyatakan teorema sebagai berikut, tanpa perlu dibuktikan :

Teorema 2.2.1

Jika salah satu,

(i) $\bar{X}_n$ terbatas seragam , atau

(ii) τ terbatas , atau

(iii) $E[\tau] < \infty$, dan

$M < \infty$ sedemikian sehingga :

$$E[\,|X_{n+1} - X_n|\,|\,\mathcal{F}_n] < M$$

maka

$$E[X_\tau] = E[X_1]$$

Analog dengan teorema 2.2.1 juga berlaku untuk submartingale dan supermartingale. Atau secara khusus dapat dinyatakan bahwa jika τ adalah suatu stopping time untuk $\{X_n, n \geq 0\}$ sedemikian sehingga salah satu dari kondisi pada teorema 2.2.1 terpenuhi, maka:

$$E\ [\ X_\tau\ ] \geq E\ [\ X_1\ ] \quad , \text{ untuk submartingale}$$

dan

$$E\ [\ X_\tau\ ] \leq E\ [\ X_1\ ] \quad , \text{ untuk supermartingale}$$

Apabila $X = (\ X_n\ ,\ \mathcal{F}_n\ )$ adalah barisan stokastik dan τ suatu stopping time terhadap $(\ \mathcal{F}_n\ )$, $n \geq 0$, maka :

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n\ I_{\{\tau=n\}}\ (\ \omega\ )$$

Teorema 2.2.2

Misalkan $X = (X_n\ ,\ \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$ adalah suatu martingale dan τ suatu stopping time terhadap $(\mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$. Maka :

$$E\ (\ X_\tau\ |\ \mathcal{F}_1\ ) = X_1$$

dimana

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n\ I_{\{\ \tau\ =\ n\ \}}\ (\ \omega\ )$$

dan

$$E\ (\ X_\tau\ ) = E\ (\ X_1\ )$$

Bukti :

Misalkan $F \in \mathscr{F}_{\tau}$. Maka dengan menggunakan sifat dari ekspektasi bersyarat kita temukan :

$$E[X_{\tau} \mid F] = \frac{E[X_{\tau} \; I_F]}{P(F)}$$

$$= \frac{1}{P(F)} \sum_{k=o}^{\infty} E[E(X_n \mid \mathscr{F}_k) \cdot I_{\{\tau = k\}} \cdot I_F]$$

$$= \frac{1}{P(F)} \sum_{k=o}^{\infty} E[E(X_n \cdot I_{\{\tau = k\}} \cdot I_F \mid \mathscr{F}_k)]$$

$$= \frac{1}{P(F)} \sum_{k=o}^{\infty} E[X_n \cdot I_{\{\tau = k\}} \cdot I_F]$$

$$= \frac{1}{P(F)} E(X_n \cdot I_F)$$

$$= E(X_n \mid F)$$

Sehingga

$$E(X_\tau \mid \mathcal{F}_1) = E(X_n \mid \mathcal{F}_1) = X_1$$

Jadi teorema 2.2.2 terbukti.

Stopping time yang telah kita bicarakan diatas adalah stopping time pada kasus diskrit. Untuk selanjutnya akan kita bahas pengertian stopping time untuk kasus kontinu, lebih khusus lagi yaitu stopping time untuk keluarga naik.

Keluarga $(\mathcal{F}_t)$, $t \in T$ disebut keluarga naik atau increasing family dari σ-field jika $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, untuk $s \leq t$.

Dan keluarga $(\mathcal{F}_t)$, $t \in T$ disebut keluarga turun atau decreasing family dari σ-field jika $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_t \supset \mathcal{A}$, untuk $s \leq t$.

Selanjutnya akan kita definisikan σ - field sebagai berikut :

$$\mathcal{F}_{t^-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s \quad \text{jika } t > 0$$

$$\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \text{jika } t \geq 0$$

$$\mathcal{F}_{0^-} = \mathcal{F}_0$$

$$\mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{R^+} \mathcal{F}_t \text{ , dan}$$

$$\mathcal{F}_{T^+} = \mathcal{F}_T \quad \text{untuk } T = [\ 0,T\ ]$$

Dan keluarga naik ($\mathcal{F}_t$) dikatakan kontinu kanan jika :

(i) $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$, untuk setiap t

(ii) $\mathcal{F}_0$ mengandung semua himpunan kosong P dalam $\mathcal{A}$.

Definisi 2.2.2

Terhadap keluarga naik pada sub σ - field, τ (ω) dikatakan sebagai suatu stopping time untuk ($\mathcal{F}_t$), $t \in R^+$ jika [$\omega : \tau (\omega) \leq t$] $\in \mathcal{F}_t$, untuk setiap $t \in R^+$.

Definisi ini juga berlaku untuk keluarga $(\mathcal{F}_t)$, $t \in (0,T)$, tetapi dengan asumsi bahwa range pada τ sekarang adalah $(0,T)$.

Suatu stopping time τ dikatakan stopping time berhingga jika $\tau (\omega) < \infty$ untuk semua $\omega \in \Omega$.