BAB II

TEOREMA PENUNJANG

2.1. Sistem Linier

2.1.1. Pengertian Sistem

Merupakan model matematika yang menghubungkan masukan atau gaya luar dengan keluaran atau tanggapan sistem dan biasanya digambarkan dengan diagram blok sebagai berikut:

2.1.2. Kelinieran

Salah satu konsep yang sangat penting dalam mempelajari sistem adalah kelinieran.

Definisi 2.1 :

Suatu sistem adalah linier jika mempunyai sifat superposisi yaitu :

Jika masukan u_1 menghasilkan keluaran y_1 dan masukan u_2 menghasilkan keluaran y_2, maka masukan ($u_1 + u_2$) menghasilkan keluaran ($y_1 + y_2$)

Secara perlambang dituliskan :

$$u_1 \longrightarrow y_1$$
$$u_2 \longrightarrow y_2 \qquad (2.1.1)$$
$$u_1 + u_2 \longrightarrow y_1 + y_2$$

Sedangkan untuk kasus masukan u_j, $j = 1,2 \ldots$ Superposisi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{jika : } u \longrightarrow y \text{ , maka}$$
$$\alpha u \longrightarrow \alpha y, \qquad (2.1.2)$$

α adalah bilangan bulat

Sifat ini disebut kehomogenan jika berlaku untuk semua α.

Notasi yang sesuai untuk tanda panah pada (2.1.1) dan (2.1.2) adalah notasi fungsional yang menyatakan sistem sebagai transformasi T dari masukan u menjadi keluaran y.

Definisi 2.2 :

Suatu sistem adalah linier jika T memenuhi :

$$T\ (\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\ T(u_1) + \beta\ T(u_2) \qquad (2.1.3)$$

dimana α dan β merupakan tetapan-tetapan sembarang.

Contoh 2.1..

Andaikata suatu sistem memiliki hubungan masukan-keluaran yang diberikan oleh persamaan $y = au + b$. Apakah persamaan tersebut menyatakan hubungan masukan-keluaran dari sebuah sistem linier ?

Penyelesaian :

Kita dapat menulis $y = T(u) = au + b$. Tinjau masukan u_1 dan u_2 maka keluarannya adalah :

$y_1 = T(u_1) = au_1 + b$

$y_2 = T(u_2) = au_2 + b$

$y_1 + y_2 = T(u_1) + T(u_2) = au_1 + b + au_2 + b$

$= a(u_1 + u_2) + 2b$

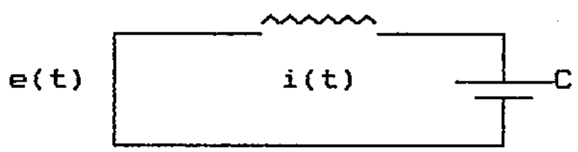
$T(u_1 + u_2) = a(u_1 + u_2) + b$

$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$

$u_1 + u_2 \not\longrightarrow y_1 + y_2$

Karena tidak memenuhi (2.1.1) jadi sistemnya tidak linier.

Contoh 2.2.



Jaringan RC sederhana yang diperlihatkan pada gambar diatas, mempunyai masukan arus i(t) dan keluaran tegangan e(t). Apakah transformasi i(t) ke e(t) ini menyatakan sebuah sistem linier.

Penyelesaian

Dimisalkan energi awal yang dikandung adalah nol, dalam arti tidak ada muatan dalam kapasitor, maka dengan menggunakan hukum Kirchoff, tegangan yang ada ialah :

$$e(t) = Ri(t) + sq$$

$$= Ri(t) + \frac{1}{c} \int_0^t i(t)\, dt$$

Untuk 2 masukan terpisah $i_1(t)$ dan $i_2(t)$ diperoleh keluaran sebagai berikut :

$$e_1(t) = T(i_1) = Ri_1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(t)\, dt$$

$$e_2(t) = T(i_2) = Ri_2(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(t)\, dt$$

sehingga untuk masukan yang berbentuk $\{ \alpha\, i_1(t) + \beta\, i_2(t) \}$ maka keluarannya adalah

$$T\{ \alpha\, i_1(t) + \beta\, i_2(t) \} =$$

$$R\, [\alpha i_1(t)+\beta i_1(t)] + \frac{1}{c} \int_0^t [(\alpha i_1(t)+\beta i_2(t)]\, dt$$

$$= \alpha \left[R\, i_1(t) + \frac{1}{c} \int_0^t i_1(t)\, dt \right] +$$

$$\beta \left[Ri_2(t) + \frac{1}{c} \int_0^t i_2(t)\, dt \right]$$

$$= \alpha\, e_1(t) + \beta\, e_2(t)$$

$$= \alpha\, T(i_1) + \beta\, T(i_2)$$

Karena memenuhi (2.1.3) maka sistem pada jaringan RC diatas adalah linier.

2.1.3. Analisa sistem

Secara umum analisa sistem dapat dibagi menjadi 3 tahapan , yaitu :

a. Mengembangkan model matematika yang cocok bagi persoalan fisika yang dihadapi.

b. Setelah model matematika yang cocok diperoleh, maka persamaan yang diperoleh diselesaikan untuk memperoleh pemecahannya

c. Kemudian pemecahan model matematikanya dihubungkan atau ditafsirkan dalam persoalan fisikanya.

Penekanan utama dalam penulisan ini adalah aspek ke-2 yaitu pemecahan model matematikanya

2.1.4 Klasifikasi sistem Linier

Sistim linier dapat dibagi menjadi dua bagian, Yaitu :

a. Sistem Linier Waktu Diskrit

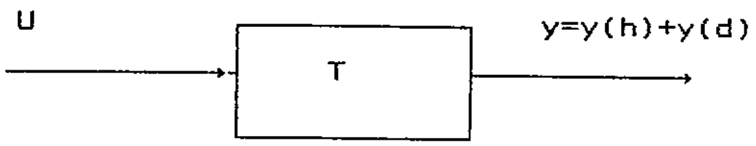
Merupakan suatu sistem yang variabel waktunya dibatasi hanya untuk waktu diskrit t_k dimana k bilangan bulat.

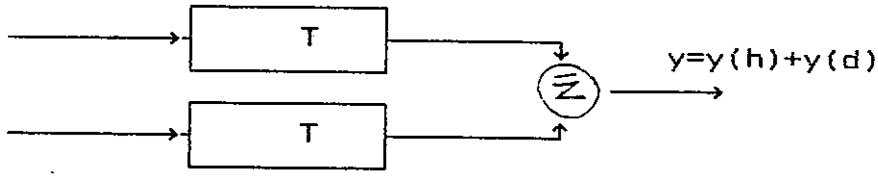
b. Sistem Linier Waktu Kontinu

Merupakan suatu sistem dimana masukan, keluaran dan keadaan merupakan fungsi dari variabel riil kontinu t.

2.1.5. Kandungan Energi Awal Pada Sistem Linier

Sistem Linier dengan Kandungan energi awal dapat dianalisis sebagai suatu sistem Linier dengan memisahkan tanggapan total dalam 2 tanggapan terpisah yaitu tanggapan dari kandungan energi awal dan tanggapan yang dihasilkan oleh masukan sistem. Pemisahan ini ditunjukkan secara skematis pada gambar di bawah ini.





Pemisahan yang terlihat pada gambar, semua sistem yang bertanda T adalah sama. Keluaran sistem y sebagai suatu jumlahan dari y(d) yaitu keluaran dari sistem dengan masukan u dan y(h) yaitu keluaran dari sistem dengan masukan nol, dengan syarat awal yang sama dengan sistem semula.

Pemecahan $y = y(h) + y(d)$ dari sistem yang dipisahkan identik dengan pemecahan dari sistem semula. Kedua pemecahan tersebut mempunyai 2 persamaan differensial yang sama dan memiliki syarat awal yang sama pula.

Contoh 2.3.

Tinjau jaringan RC pada contoh 2.1.2 yang dinyatakan dengan persamaan differensial sebagai berikut : $e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) + v_0$

i(t) sebagai masukan sistem dan e(t) sebagai keluaran sistem.

Dalam pemisahan yang dilakukan diambil y(d) adalah keluaran sistem dengan syarat awal nol.

$$\text{jadi} \quad y(d) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt$$

Pemecahan y(h) adalah keluaran dari sistem semula dengan $i(t) = 0$.

Tapi dengan syarat awal $e(o) = v_o$, jadi $y(h) = v_o$

Sehingga diperoleh keluaran total

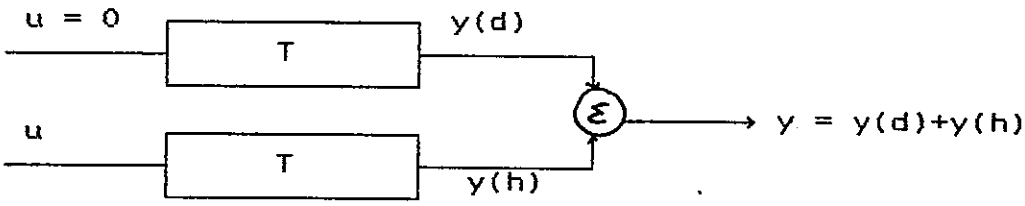
$$y = y(h) + y(d)$$

$$y = v_o + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt$$

$$\text{Jadi } e(t) = v_o + Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)\, dt.$$

Gambar sistem pemisahan contoh diatas sebagai berikut :

$$e(t) = v_o + Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)\, dt.$$



2.1.7.Sistem Linier Waktu Kontinu

Sistem Linier waktu kontinu dapat didefinisikan sebagai suatu sistem dimana masukan, keadaan, dan keluaran merupakan fungsi kontinu dari variable riil t.

Model-model dalam fisika biasanya dibatasi untuk sistem sistem yang berparameter tetap, yaitu dapat diartikan bahwa parameter sistem tidak berubah terhadap waktu. Sistem Linier waktu kontinu tak ubah waktu dapat dijelaskan sebagai berikut : Jika suatu masukan u(t) menghasilkan keluaran y(t), maka versi tergeser untuk masukan u(t+τ) menghasilkan keluaran y(t+τ).

Diskripsi matematika dasar yang dikembangkan untuk menggambarkan sistem Linier waktu kontinu dengan pendekatan input-output adalah fungsi tanggapan impuls dan persamaan defferensial linier dengan koefisien tetap. Dalam fungsi tanggapan impuls masukan berupa sederetan fungsi pulsa. Sedangkan persamaan defferensial yang dipergunakan disini adalah persamaan differensial dengan koefisien tetap yang berbentuk :

$$b_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \ldots + b_o y(t)$$

$$= a_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \ldots + a_o u(t)$$

Dimana di dalam model ini , masukan u(t) dan keluarn y(t) merupakan fungsi kontinu dari variable riil t yang biasanya berupa variable waktu.

2.2. TRANSFORMASI LAPLACE

2.2.1. Definisi Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan perluasan dari transformasi Fourier, dimana fungsi f(t) dinyatakan oleh suatu jumlahan fungsi kontinu dari fungsi-fungsi exponensial berbentuk e^{-st} , untuk s = jω adalah suatu frekuensi komplek. Sehingga transformasi Fourier dapat dipandang sebagai kasus khusus dari transformasi Laplace dimana $s = j\omega$

Diketahui definisi transformasi Fourier dari f(t) adalah :

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad (2.2.1)$$

Misalkan didefinisikan fungsi $a(t)=f(t)e^{-\sigma t}$ dimana σ adalah bilangan riil, sehingga transformasi Forier dari a(t) adalah :

$$F\{a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+j\omega t)t}\,dt \qquad (2.2.2)$$

dan persamaan (2.2.2) dapat ditulis sebagai berikut :

$$F(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt \qquad (2.2.3)$$

dimisalkan lagi s adalah frekwensi komplek dimana $s = \sigma+j\omega$, $ds = j\,d\omega$ maka $d\omega = \frac{1}{j}\,ds$. Sehingga persamaan (2.2.3) dapat ditulis sebagai :

$$F(s)= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\,dt \qquad (2.2.4)$$

Persamaan (2.2.4) ini mendefinisikan transformasi Fourier komplek atau pasangan transformasi Laplace 2 pihak (2 sisi) atau transformasi Laplace bilateral, dan biasanya dituliskan dengan menggunakan notasi sebagai berikut :

$$F(s) = \mathcal{L}_b\ f(t) \tag{2.2.5}$$

Tapi dalam sebagian besar penerapan yang menyangkut transformasi Laplace, fungsi waktu yang menjadi perhatian adalah fungsi waktu yang bersifat kausal yaitu $f(t) = 0$ untuk $t < 0$.

Pada umumnya analisa dalam sistem fisis, dapat dianggap bahwa rangsangan terjadi pada saat $t=0$. Jadi seringkali dapat membatasi kelas-kelas fungsi yang dipergunakan dalam transformasi Laplace hanya untuk fungsi-fungsi yang tak nol untuk $0 < t < \sim$.

Transformasi Laplace yang dihasilkan dinamakan transformasi Laplace satu sisi yang didefinisikan sebagai berikut :

$$F(s)=\int_{-\sim}^{\sim} f(t)\ e^{-st}\ dt \tag{2.2.6}$$

Dan ditulis dengan notasi sebagai berikut :

$$F(s) = \mathcal{L}\ \{f(t)\} \tag{2.2.7}$$

Sehingga persamaan (2.2.7) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\sim} f(t)e^{-st}\ dt \tag{2.2.8}$$

Contoh :

1. Diketahui $f(t) = 1$

$$\text{maka} \quad : \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\sim} f(t)\ e^{-st}\ dt$$

$$= \int_0^{\sim} e^{-st}\ dt$$

$$= -\frac{1}{s}\int_{0}^{\sim} de^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st} \right]_{0}^{\sim}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{\sim} - e^{0} \right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[0 - 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{s}(-1)$$

$$= \frac{1}{s}$$

2. Diketahui $f(t) = t$

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\sim} t\, e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s}\int_{0}^{\sim} t\, de^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[te^{-st} - \int_{0}^{\sim} e^{-st} dt \right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[te^{-st} + \frac{1}{s} e^{-st} \right]_{0}^{\sim}$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\left(e^{\sim} + \frac{1}{s} e^{\sim} \right) - \left(0 + \frac{1}{s} e^{0} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left(0 - \frac{1}{s} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left(-\frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^{2}}$$

Selanjutnya untuk fungsi-fungsi f(t) yang lain transformasi Laplacenya dapat diketahui dari tabel tranformasi Laplace (lihat lampiran).

2.2.2.Sifat Sifat Transformasi Laplace

1. KELINIERAN

Teorema 2.1:

Jika c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta dan $f_1(t)$, $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi Laplace masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{\ c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\ \} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Bukti :

$$F_1(s) = \mathcal{L}\ \{f_1(s)\} = \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}\ \{f_2(s)\} = \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt$$

Jika c_1 dan c_2 adalah konstanta - konstanta sembarang, maka :

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} e^{-st}\ dt$$

$$= \int_0^\infty c_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty c_2 f_2(t) e^{-st} dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt$$

$$= c_1 \mathcal{L}\ \{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\ \{f_2(t)\}$$

$$= c_1\ F_1(s) + c_2\ F_2(s)$$

Contoh :

Carilah transformasi Laplace dari $4e^{st} + 6t^2$ $- 3 \sin 4t$

Penyelesaian :

$$\mathcal{L}\{4e^{st} + 6t^2 - 3 \sin 4t\} = 4\, \mathcal{L}(e^{st}) + 6\, \mathcal{L}(t^2) - 3\, \mathcal{L}(\sin 4t)$$

dari tabel transformasi Laplace diperoleh :

$$\mathcal{L}(e^{st}) = \frac{1}{s - 5}$$

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2\,!}{s^{2+1}}$$

$$= \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\,(\sin 4t) = \frac{4}{s^2 + 16}$$

Jadi :

$$\mathcal{L}\,\{4e^{st} + 6t^2 - 3 \sin 4t\}$$

$$= 4\, \frac{1}{s - 5} + 6\, \frac{2}{s^3} - 3\, \frac{4}{s^2 + 16}$$

$$= \frac{4}{s - 5} + \frac{12}{s^3} - \frac{12}{s^2 + 16}$$

2. PERGESERAN FREKUENSI (SHIFTING I)

Teorema 2.2 :

jika :

a. $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathfrak{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$

b. $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathfrak{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

Bukti :

Diketahui : $\mathfrak{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$

a. $$\mathfrak{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)}\,dt$$

$$= F(s+a)$$

b. $$\mathfrak{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)}\,dt$$

$$= F(s-a)$$

Contoh :

jika $\mathfrak{L}(\sin 4t) = \dfrac{4}{s^2 + 16}$

maka $$\mathfrak{L}(e^{-2t}\sin 4t) = \frac{4}{(s+2)^2 + 16}$$

$$= \frac{4}{s^2 + 4s + 4 + 16}$$

$$= \frac{4}{s^2 + 4s + 20}$$

3. PERGESERAN WAKTU (SHIFTING II).

Teorema 2.3.:

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ dan $g(t)=\begin{cases} f(t-a) & t\geq a \\ 0 & t<a \end{cases}$

Maka : $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$

Bukti :

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^a 0e^{-st}dt + \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

Substitusi : $u = t - a$, $du = dt$, $t = u + a$

untuk $t = a \longrightarrow u = a - a = 0$

$t = \infty \longrightarrow u = \infty$

$$\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,e^{-(u+a)s}\,du$$

$$= \int_0^\infty f(u)\,e^{-us}.\,e^{-as}\,du$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-us}\,du$$

$$= e^{-as}F(s)$$

Contoh :

Diketahui : $f(t) = \cos t$

Carilah $\mathcal{L}\{g(t)\}$ jika :

$$g(t)=\begin{cases} \cos(t-2\pi/3) & \text{untuk } t\geq 2\pi/3 \\ 0 & \text{untuk } t<2\pi/3 \end{cases}$$

Penyelesaian :

Diketahui $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2 + 1}$ maka

berdasarkan teorema pergeseran waktu didapat:

$$\mathcal{L}\{\cos (t - 2\pi/3)\} = \frac{s\, e^{(-2\pi/3)s}}{s^2 + 1}$$

4. PENSKALAAN

Teorema 2.4.:

Jika : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

maka $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$

Bukti :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at)\, e^{-st}\, dt$$

Substitusi : $u = at$, $t = \dfrac{u}{a}$, $du = a\, dt$

Untuk $t = 0 \longrightarrow u = 0$

$t = \infty \longrightarrow u = \infty$

$$\int_0^{\infty} f(at)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} f(u)\, e^{-(s/a)u}\, 1/a\, du$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u)\, e^{-(s/a)u}\, du$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Contoh :

$$\mathfrak{L}\ \{\ \frac{\sin t}{t}\ \} = \tan^{-1}\ (\frac{1}{s}),\ \text{carilah}\quad \mathfrak{L}\ \{\frac{\sin at}{at}\}$$

dengan menggunakan teorema penskalaan :

$$\mathfrak{L}\ \{\frac{\sin at}{t}\} = \frac{1}{a}\ \mathfrak{L}\ \{\ \frac{\sin {}^{s}/a\ t}{t}\ \}$$

$$= \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\ (\ \frac{1}{(s/a)}\ )$$

$$= \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\ (\ \frac{a}{s}\ )$$

5. TURUNAN DARI TRANSFORMASI LAPLACE

Teorema3 2.5 :

Jika : $f(t) = F(s)$ maka $f'(t) = s\ F(s) - f(0)$

Bukti :

$$\mathfrak{L}\ \{f'(t)\} = \int_{0}^{\sim} f'(t)e^{-st}\ dt$$

$$= f(t)\ \bar{e}^{st}\Big|_{0}^{\sim} + \int_{0}^{\sim} f(t) - e^{-st}\ dt$$

$$= [f(\sim)e^{\sim} - f(0)e^{0}] + s\int_{0}^{\sim} f(t)e^{-st} dt$$

$$= 0 - f(0) + sF(s)$$

$$= s\ f(s) - f(0)$$

dan secara umum diperoleh :

$$\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}} = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f(0) - \ldots - f(0)$$

Contoh :

Carilah transformasi Laplace dari $f'(t)$ di mana $f(t) = e^{-at}$

Jawab :

$f(t) = e^{-at}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} \left[e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

$$f'(t) = -a\, e^{-at}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$= \mathcal{L}\{-a\, e^{-at}\}$$

$$= -a\, \mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{-a}{s+a}$$

Atau berdasarkan teorema (2.5) diperoleh :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,F(s) - f(0)$$

karena diketahui $f(0)$ untuk $f(t) = e^{-at}$ adalah 1, maka:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = s\,F(s) - f(0)$$

$$= s\,\frac{1}{s+a} - 1$$

$$= \frac{s - s - a}{s + a}$$

$$= \frac{-a}{s+a}$$

6.LAPLACE TRANSFORM INTEGRAL

Teorema 2.6 :

Jika : $\mathcal{L}\{f(t) = F(s)$

$$\text{maka } \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(u)\,du \right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Bukti :

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(u)\,du \right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(u)\,du\right] e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{-s} \int_0^\infty \left[\int_0^t f(u)\,du \right] de^{-st}$$

$$= -e^{-st} \left(\int_0^t f(u)du\right)\Big|_0^\infty +$$

$$\frac{1}{s} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{F(s)}{s}$$

Contoh :

Carilah transformasi Laplace dari $\int_{0}^{t} \frac{\sin u}{u} du$

jawab :

Dari tabel diketahui: $\mathcal{L}\ \{ \frac{\sin u}{u} \} = \tan^{-1} \frac{1}{s}$

maka :

$$\int_{0}^{t} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

2.2.3. Transformasi Laplace Dari Fungsi - Fungsi Sederhana

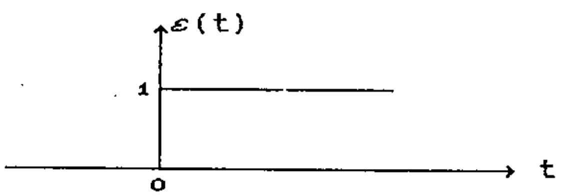
Dalam praktek, sangatlah jarang menghitung suatu transformasi Laplace dengan integrasi. Biasanya, bagi sistem sistem yang memiliki modus-modus alamiah yang tak begitu banyak, hanya perlu menggunakan sejumlah kecil transformasi dasar dan sifat - sifatnya.

Diambil $\mathcal{L}\ \{ e^{-at}\, \varepsilon(t) \} = \frac{1}{s + a}$

dimana:

$\varepsilon(t)$ adalah fungsi tangga satuan yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Dengan berpedoman pada pasangan transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\ \{\ e^{-at}\ \varepsilon(t)\ \} = \frac{1}{s + a}$$

akan didapatkan pasangan-pasangan transformasi yang lain yaitu :

1. Untuk a = 0, diperoleh transformasi Laplace dari fungsi tangga satuan.

   $$\mathcal{L}\ \{\ \varepsilon(t)\ \} = \frac{1}{s}$$

2. Untuk $a = +j\omega$ dan $a = -j\omega$ didapat :

   $$\mathcal{L}\ \{\ e^{-j\omega t}\ \varepsilon(t)\ \} = \frac{1}{s+j\omega}$$

   $$\mathcal{L}\ \{\ e^{j\omega t}\ \varepsilon(t)\ \} = \frac{1}{s-j\omega}$$

3. dengan menambahkan ke dua pasangan transformasi Laplace pada no. 2 diperoleh pasang transformasi Laplace dari fungsi cosinus.

   Diketahui :

   $$\mathrm{Cos}\ \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

   $$\mathrm{Cos}\ \omega t\ \varepsilon(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right]$$

   $$\mathcal{L}\{\ \cos\ \omega t\ \varepsilon(t)\} = \frac{1}{2}\ \mathcal{L}\ \{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\ \varepsilon(t)\ \}$$

   $$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{s - j\omega + s+j\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\ s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathfrak{L}\{ \cos \omega t\ \varepsilon(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Jadi didapat :

$$\mathfrak{L}\ \{\cos \omega t\ \varepsilon(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

4. Dengan mengurangkan kedua pasangan transformasi pada no.2 akan di dapat pasangan transformasi Laplace dari fungsi sinus.

Diketahui :

$$\text{Sin } \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\text{Sin } \omega t\ \varepsilon(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\ \varepsilon\ (t)$$

$$\mathfrak{L}\ \{\sin \omega t\ \varepsilon(t)\} = \mathfrak{L} \left\{ \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) \varepsilon(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\ \mathfrak{L} \left\{ (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\ \varepsilon(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s + j\omega} - \frac{1}{s - j\omega} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{2\,j\omega}{s^2 + \omega^2}\right]$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Jadi didapat transformasi fungsi sinus

$$\mathfrak{L}\left\{\sin \omega t\ \varepsilon(t)\right\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

5. Dengan menerapkan sifat integrasi terhadap waktu pada fungsi tangga satuan $\varepsilon(t)$, maka diperoleh transformasi Laplace fungsi tanjak $t\,\varepsilon(t)$. Yaitu $\mathfrak{L}\,\{t\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s^2}$

   Bukti :

   Diketahui $\mathfrak{L}\,\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$

   maka :

$$\mathfrak{L}\,\{\int^{\sim} \varepsilon(t)\,dt\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

$$\mathfrak{L}\,\{\,t\,\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

6. Dengan menggunakan sifat turunan terhadap waktu pada fungsi tangga satuan $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ maka diperoleh transformasi Laplace fungsi implus $\delta(t)$ yaitu :

$$\mathfrak{L}\,\{\,\delta(t)\,\} = 1$$

Bukti :

Diketahui :

$$\mathfrak{L}\ \{\ \varepsilon(t)\ \} = \frac{1}{s}$$

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$\therefore \mathfrak{L}\ \{\delta(t)\} = \mathfrak{L}\ \left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right)$$

$$\mathfrak{L}\ \left[\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$= s\ \frac{1}{s} - 0 = 1$$

$$\therefore \mathfrak{L}\ \left[\ \delta(t)\right] = 1$$

7. Dengan sifat differensiasi terhadap waktu didapat turunan fungsi delta yaitu $\delta'(t)$ dengan pasangan transformasi Laplace sebagai berikut :

$$\mathfrak{L}\ \left[\ \delta'(t)\ \right] = s$$

Bukti :

Diketahui :

$$\mathfrak{L}\ \left[\ \delta(t)\ \right] = 1$$

$$\mathfrak{L}\ \left[\ \delta'(t)\ \right] = s\ F(s) - f(0)$$

$$= s\ .\ 1 - 0$$

$$= s$$

Jadi : $\mathfrak{L}\ \left[\ \delta'(t)\right] = s$

8. Dan andaikata pada no. 1 diketahui a = $\sigma \pm j\omega$, maka pasangan transformasi yang dihasilkan adalah sebagai berikut :

$$\mathcal{L}\left[e^{-(\sigma+j\omega t)}\varepsilon(t)\right] = \frac{1}{s + (\sigma \pm j\omega)}$$

2.2.3.Menginverskan Transformasi Laplace

Agar transformasi Laplace dapat digunakan secara efektif dalam analisis sistem, maka harus dapat diadakan transformasi balik (transformasi invers) dari kawasan transformasi (kawasan s) ke kawasan waktu (kawasan t). Transformasi invers dari kawasan transformasi Laplace ke kawasan waktu dapat dilaksanakan dalam beberapa cara antara lain :

1. Metode secara langsung dengan menggunakan definisi integral dari f(t) yaitu :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma-j\omega} F(s)\, e^{st}\, ds$$

Perhitungan ini membutuhkan pemahaman akan variable komplek. Integral ini dapat dihitung dengan menggunakan integral garis (line integral) dalam bidang s. Tapi biasanya metoda ini tidak digunakan karena perhitungannya terlalu sulit, sehingga dipergunakan metoda lain yang lebih sederhana.

2. Uraian Pecahan Perbagian.

Berbagai sistem linier tak ubah waktu dengan jumlah parameter yang tergabung pada umumnya menggunakan transformasi-transformasi yang berbentuk fungsi-fungsi rasional dari s. Yakni, yang berbentuk perbandingan polinominal-polinominal dalam s. Fungsi - fungsi rasional dari bentuk ini dapat dinyatakan sebagai jumlah dari pecahan - pecahan yang lebih sederhana, yang transformasi inversnya telah ditabelkan (lihat lampiran). Dianggap bahwa disini yang ditinjau hanya fungsi-fungsi waktu yang bersifat kausal, sehingga transformasi F(s) adalah satu sisi.

Dengan demikian dapat mengenyampingkan daerah konvergensinya dalam mengambil transformasi-transformasi inversnya. Dianggap bahwa F(s) berbentuk sebagai berikut:

$$F(s)= \frac{a_o + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m}{b_o + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_n s^n} \quad (2.2.9.)$$

dan bahwa $m < n$.

Jika $m > n$ maka selalu dapat ditulis F(s) sebagai jumlah suatu polinomial $\phi(s)$ berderajat (m-n) ditambah suatu perbandingan polinom yang derajad pembilangnya kurang satu dari derajad penyebutnya.

Untuk mencari uraian pecahan perbagian dari (2.2.9) maka pertama dicari akar-akar dari polinomial penyebut yang disebut p_1 , p_2 , ..., p_n. Akar ini merupakan kutub-kutub atau kesinguleran-kesinguleran dari F(s). Dengan demikian F(s) dapat digambarkan sebagai berikut :

$$F(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m}{b_n (s - p_1)(s - p_2) \ \ldots \ (s - p_n)}$$

$$= \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \ldots + \frac{c_n}{s - p_n} \qquad (2.2.10)$$

Koefisien-koefisien c_i dalam (2.2.10) bagi kasus-kasus kutub rangkap dapat dicari dengan rumus sebagai berikut :

$$c_i = (s - p_i)\, F(s) \Big|_{s = p_i} \qquad (2.2.11)$$

Persamaan (2.2.11) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut : kalikan kedua ruas pada persamaan (2.2.10) dengan $(s - p_i)$ dan kemudian menghitung persamaan yang dihasilkan di $s = p_i$

Dalam kasus akar rangkap, misalnya p_i berulang n kali maka uraian dari (2.2.11) harus mengandung suku-suku

$$\frac{c_{i1}}{(s - p_i)} + \frac{c_{i2}}{(s - p_i)^2} + \ldots + \frac{c_{in}}{(s - p_i)^n}$$

Koefisien-koefisien c_{ik} dihitung dengan mengalikan kedua belah ruas dari (2.2.10) dengan $(s - p_i)^n$. Setelah itu menurunkan sebanyak $(n - k)$ kali, dan kemudian menghitung persamaan yang dihasilkan di $s = p_i$.

Jadi :

$$c_{in} = (s - p_i)^n F(s) \Big|_{s = p_i} \qquad (2.2.12)$$

$$c_{in-1} = \frac{d}{ds} [(s - p_i)^n F(s)] \Big|_{s = p_i}$$

$$c_{in-k} = \frac{1}{k\,!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p_i)^n F(s)] \Big|_{s = p_i}$$

$$c_{i1} = \frac{1}{(n-1)} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s - p_i)^n F(s)] \Big|_{s = p_i}$$

Dengan menganggap bahwa kutub p_i berulang n_i kali, untuk $i = 1, 2, \ldots k$ dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = r$, maka bentuk umum dari pecahan perbagian dari F(s) :

$$F(s) = \frac{c_{11}}{(s - p_1)} + \ldots + \frac{c_{i1}}{(s - p_i)} + \frac{c_{i2}}{(s - p_i)^2} +$$

$$\ldots + \frac{c_{in}}{(s - p_i)^{ni}} + \ldots + \frac{c_k}{(s - p_i)^{nk}}$$

Uraian di atas selalu dapat diperiksa dengan menggabungkan kembali suku-suku dalam uraian pecahan perbagiannya. Uraian ini berlaku pula bagi akar-akar komplek konjugat (untuk f(t) yang riil). Maka dapat dinyatakan sebagai suatu faktor kuadratis dari polinom tersebut dan dapat dipisahkan sebagai suatu kesatuan tunggal atau sebagai dua kutub sederhana.

Andaikata terdapat suatu pasangan kompleks konjugat dari kutub-kutub dalam polinom penyebut, maka 3 buah pernyataan pilihan bagi akar-akar ini adalah :

$$
\begin{aligned}
(s+\alpha +j\omega_o)(s+\alpha - j\omega_o) &= (s + \alpha)^2 + \omega_o^2 \\
&= s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \omega_o^2) \\
&= s + as + b \quad (2.2.13)
\end{aligned}
$$

Uraian pecahan perbagian yang bersangkutan dapat mengambil yang mana saja bentuk-bentuk berikut, tergantung pernyataan yang digunakan dalam (2.2.13)

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$F(s) = \frac{a_o + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m}{b_o + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_n s^n}$$

$$F(s) = \frac{A(s)}{B_1(s)(s^2+as+b)}$$

$$F(s) = \frac{\bar{a}_1 s + \bar{a}_2}{s^2 + as + b} + \frac{A_1}{B_1} \qquad (2.2.14)$$

$$= \frac{\bar{b}_1 s + \bar{b}_2}{(s + \alpha)^2 + \omega_o^2} + \frac{A_1(s)}{B_1(s)} \qquad (2.2.15)$$

$$= \frac{\bar{c}_1 + j\bar{c}_2}{s + \alpha + j\omega_o} + \frac{\bar{c}_1 + j\bar{c}_2}{s + \alpha - j\omega_o} + \frac{A_1(s)}{B_1(s)}$$

(2.2.16)

Tetapan-tetapan $\bar{a}$, $\bar{b}$, dan $\bar{c}$ dalam persamaan diatas semuanya berbentuk bilangan-bilangan riil. Biasanya dua bentuk yang terakhir pada persamaan di atas adalah yang termudah untuk dipergunakan. Sedangkan kedua bentuk pertama (2.2.14) dan (2.2.15) merupakan komplek konjugat, sehingga hanyalah satu faktor saja yang perlu dihitung.

Contoh-contoh di bawah ini memperlihatkan bagaimana transformasi invers dicari dengan menggunakan uraian pecahan perbagian.

Contoh :

dianggap f(t) fungsi kausal dan F(t) diberikan oleh:

$$F(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}$$

Untuk mencari transformasi inversnya, dapat dilakukan dengan cara memfaktorkan polinom penyebutnya dengan mencoba memilih salah satu akarnya, dengan teorema sisa.

Misalnya $s = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ & & -1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Jadi $(s^3 + 3s^2 + cs + 4) = (s + 1)(s^2 + 2s+4)$

Sehingga :

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 4)}$$

Dengan uraian pecahan perbagian didapat :

$$F(s) = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{BS + C}{s^2 + 2s + 4}$$

$$\begin{aligned} (s+3) &= A(s^2+2s+4) + (s+1)\ (Bs+C) \\ &= As^2 + 2AS + 4A + Bs^2 + Cs + Bs + C \\ &= (A + B)s^2 + (2A + B + C)s + \\ &\quad 4A + C \qquad \qquad ....(*) \end{aligned}$$

$$A = (s+1)F(s) \Big|_{s = -1}$$

$$= (s+1) \cdot \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)} \Bigg|_{s = -1}$$

$$A = \frac{2}{3}$$

Dengan menyamakan koefisien dari s diruas kiri dan ruas kanan didapat :

$A + B = 0$ maka $B = -\frac{2}{3}$

$2A + B + C = 1$ maka didapat $C = \frac{1}{3}$

Dengan demikian diperoleh :

$$F(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s + 1} + \frac{-\frac{2}{3} s + \frac{1}{3}}{s^4 + 2s + 4}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{s - 1/2}{(s + 1)^2 + 3}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s + 1}{(s+1)^2 + 3} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{(s + 1)^2 + 3}$$

Dengan melihat tabel invers transformasi Laplace didapat :

$$f(t) = \Big(\frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-t} \cos \sqrt{3t} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin \sqrt{3t} \Big) \, \varepsilon(t)$$