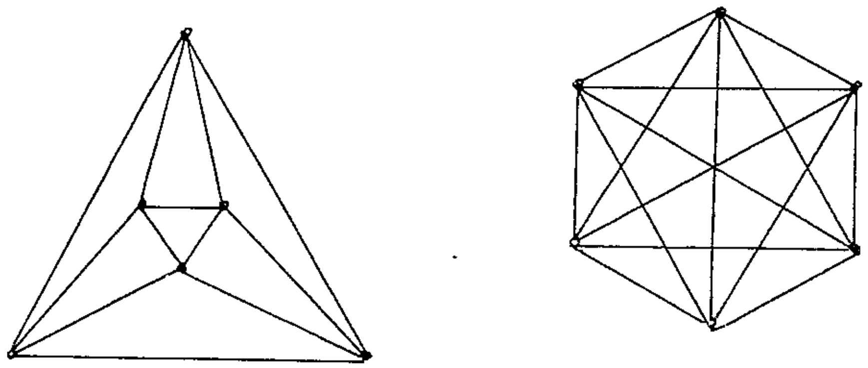
BAB III

FAKTORISASI GRAPH REGULAR

Sebuah graph dikatakan regular jika seluruh titiknya mempunyai derajat yang sama. Jika derajat titik tersebut adalah k maka graph dikatakan regular-k atau regular dengan derajat k. Graph lengkap dengan m titik adalah bentuk khusus dari graph regular berderajat k dengan k = m-1.

Contoh :



graph regular-4 graph regular-5 (K_6)

Gambar 3.1.

Faktor dari suatu graph G adalah spanning subgraph dari graph tersebut yang tidak semuanya tak terhubung (disconnected). Sebuah faktor-n adalah regular berderajat n. Bila graph G adalah produk dari faktor-n maka gabungannya disebut faktorisasi-n. Dan graph G disebut faktorable-n.

3.1. Faktorisasi-1

Suatu graph G mempunyai faktor-1 bila derajat dari setiap titik dalam spanning subgraphnya adalah 1. Karena itu faktor-1 hanya dimiliki oleh graph yang mempunyai jumlah titik genap.

Graph G disebut produk dari faktor-1 apabila subgraphnya memenuhi sifat-sifat berikut ini :

1. Setiap subgraph memuat semua titik dari G.
2. Derajat setiap titik dari setiap subgraph adalah 1.
3. Tak ada subgraph yang memuat garis yang sama dalam G.

Gabungan faktor-1 yang membentuk graph G disebut faktorisasi-1 dan graph G disebut faktorable-1.

Teorema 3.1.

Graph lengkap K_{2n} adalah faktorable-1

Bukti :

Pembuktian hanya perlu menunjukkan bahwa garis-garis dari graph lengkap K_{2n} dapat diuarikan terpisah (dekomp o sisi) menjadi (2n-1) faktor-1.

Misalkan titik-titik dari graph K_{2n} adalah $v_1, ... , v_{2n}$.

Untuk i= 1,2, . . ., 2n-1 ,

himpunan garis-garis $x_i = \{v_i \;, v_{2n}\} \cup \{v_{i-j} \;, v_{i+j} \;;$ $j=1,2,..,n-1\}$ dimana tiap subskrip i-j dan i+j dinyatakan sebagai bilangan bulat 1,2,..., (2n-1)(mod(2n-1)), maka himpunan x_i merupakan faktorisasi-1 dari graph K_{2n}.

terbukti.

Contoh :

Diberikan graph lengkap K_6 ; n=3.

Titik-titik dari graph lengkap K_6 adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Untuk i= 1,2,3,4,5 dan j= 1,2 maka $x_1=\{v_1,v_6\} \cup \{v_0,v_2\} \cup \{v_{-1},v_3\}$.Untuk subskrip dari v_0 dan v_{-1} yaitu bilangan 0 dan -1 diambil sebagai 5(mod 5) dan 4(mod 5) sehingga :

$x_1 = \{v_1, v_6\} \cup \{v_5, v_2\} \cup \{v_4, v_3\}$

$x_2=\{v_2,v_6\} \cup \{v_1,v_3\} \cup \{v_0, v_4\}$. Untuk subskrip dari v_0 yaitu bilangan 0 diambil sebagai 5(mod 5) sehingga :

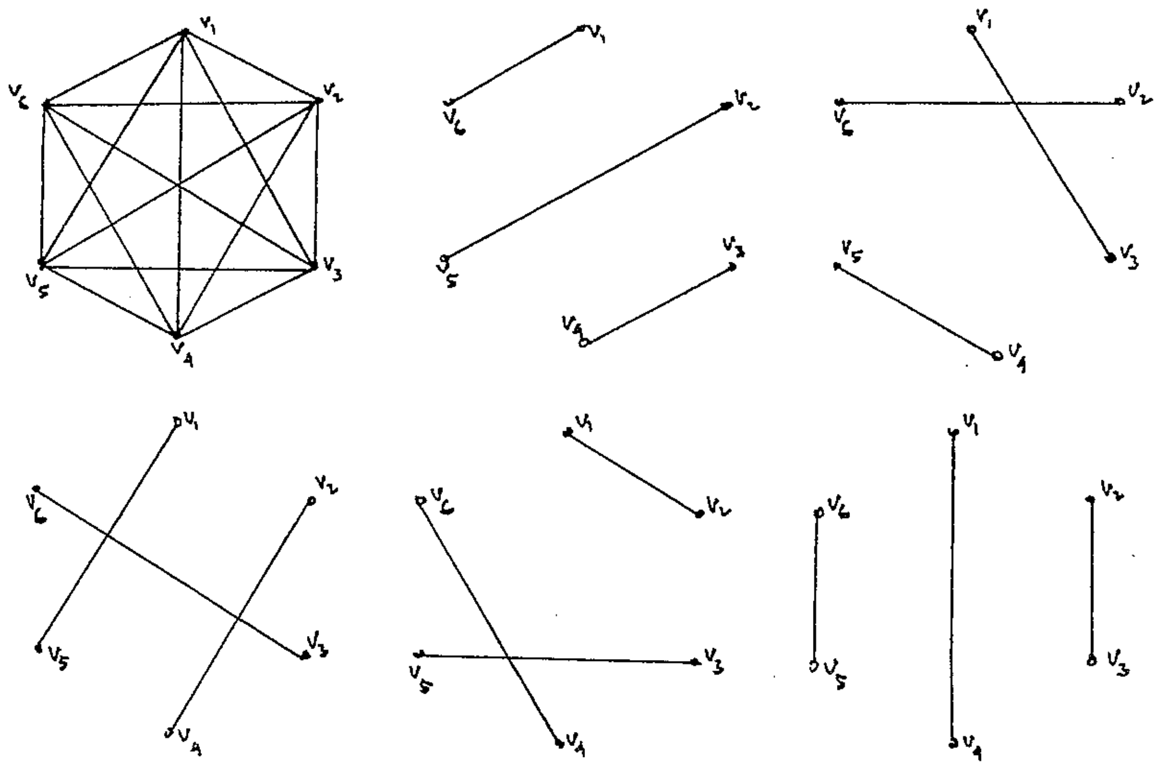
$x_2=\{v_2,v_6\} \cup \{v_1,v_3\} \cup \{v_5, v_4\}$.

Dengan cara yang sama akan diperoleh :

$x_3 =\{v_3, v_6\} \cup \{v_2, v_4\} \cup \{v_1, v_5\}$

$x_4 =\{v_4, v_6\} \cup \{v_3, v_5\} \cup \{v_2, v_1\}$

$x_5 =\{v_5, v_6\} \cup \{v_4, v_1\} \cup \{v_2, v_3\}$



Gambar 3.2.

Graph K_6 dengan 5 faktor-1

3.2. Faktorisasi-2

Suatu graph G mempunyai faktor-2 apabila derajat dari setiap titik dalam spanning subgraphnya adalah 2. Graph G disebut produk dari faktor-2 apabila subgrapnya memenuhi sifat-sifat berikut ini :

1. Setiap subgraph memuat semua titik dari graph G.
2. Derajat setiap titik dari setiap subgraphnya adalah 2.
3. Tidak ada subgraph yang memuat garis yang sama dari graph G.

Karena setiap titik disetiap subgraph mempunyai derajat 2 maka suatu faktor-2 adalah terhubung dan merupakan spanning sirkuit.

Teorema 3.2.

Graph lengkap K_{2n+1} merupakan gabungan dari n spanning sirkuit.

Bukti :

Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$ adalah titik-titik dari graph K_{2n+1} . Kemudian dibentuk path P_i dengan i= 1,2,. . . ., n dari titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ sebagai berikut :

$P_i = v_i \; v_{i-1} \; v_{i+1} \; v_{i-2} \; v_{i+2} \ldots v_{i-1+n} \; v_{i-n}$.

Untuk j = 1,2,. . .,2n titik ke-j dari P_i adalah v_k dengan $k = i + (-1)^{j+1} \lfloor j/2 \rfloor$ dan semua subskrip dari v_i diambil sebagai bilangan bulat 1,2,...,2n (mod 2n).

Kemudian dibentuk spanning sirkuit Z_i dengan menghubungkan titik v_{2n+1} ke titik ujung dari path P_i. Maka untuk i=1, 2,. . .,n akan terdapat n buah spanning sirkuit. Terbukti.

Contoh :

Graph Lengkap K_7 adalah jumlah dari 3 spanning sirkuit. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut :

untuk i=1.

$P_1 = v_1, v_0, v_2, v_{-1}, v_3, v_{-2}$.Untuk subskrip dari v_0, v_{-1} dan v_{-2} yaitu bilangan 0 dan -1 diambil sebagai 6(mod 6) 5(mod 6) dan 4(mod 6). Sehingga $P_1 = v_1, v_6, v_2, v_5, v_3, v_4$. Titik ujung dari path P_1 adalah v_1 dan v_4. Dengan menghubungkan v_7 ke v_1 dan v_4 diperoleh spanning sirkuit Z_1.

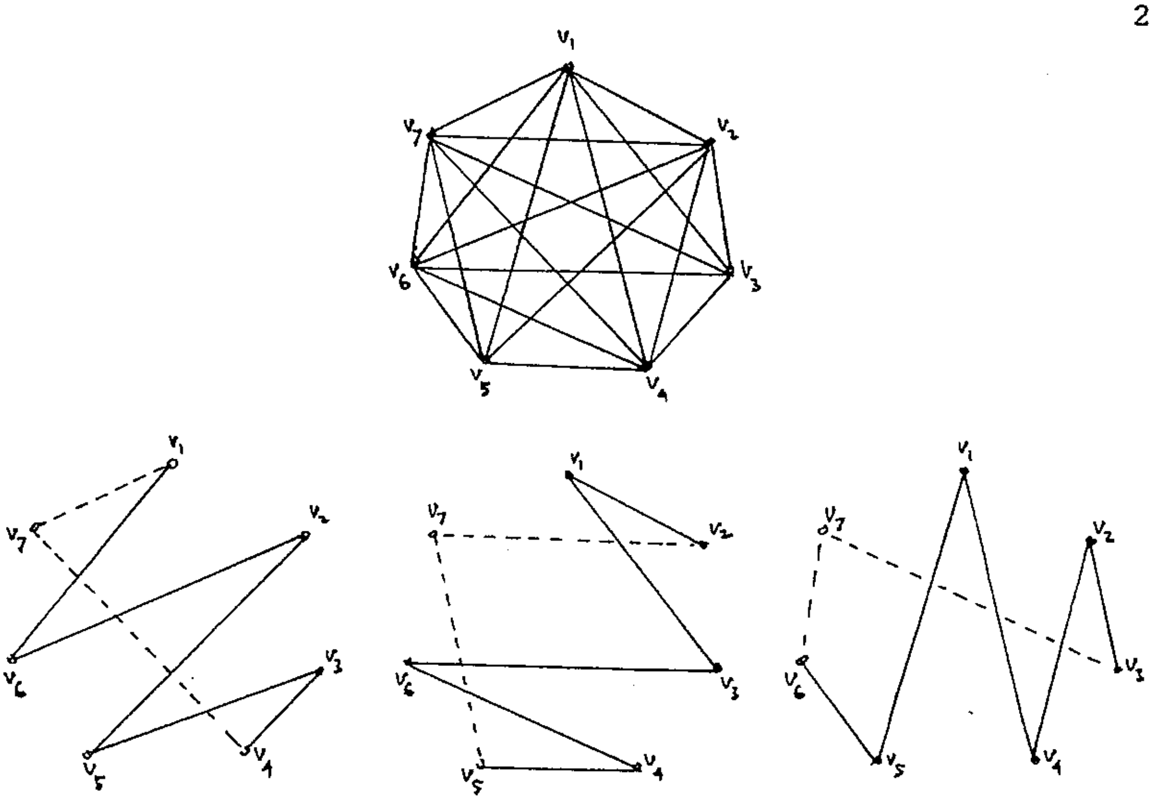
untuk i=2

$P_2 = v_2, v_1, v_3, v_0, v_4, v_{-1}$.Untuk subskrip dari v_0 dan v_{-1}yaitu bilangan 0 dan -1 diambil sebagai 6(mod 6) dan 5(mod 6) sehingga $P_2 = v_2, v_1, v_3, v_6, v_4, v_5$. Titik ujung dari P_2 adalah v_2 dan v_5 . Dengan menghubungkan v_7 ke v_2 dan v_5 diperoleh spanning sirkuit Z_2.

untuk i=3

$P_3 = v_3, v_2, v_4, v_1, v_5, v_0$. Untuk subskrip dari v_0 yaitu bilangan 0 diambil sebagai 6(mod 6) sehingga $P_3 = v_3, v_2, v_4$ v_1, v_5, v_6 .Titik ujung dari path P_3 adalah v_2 dan v_5 . Dengan menghubungkan v_7 ke v_3 dan v_6 diperoleh spanning sirkuit Z_3 .

Dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.3.

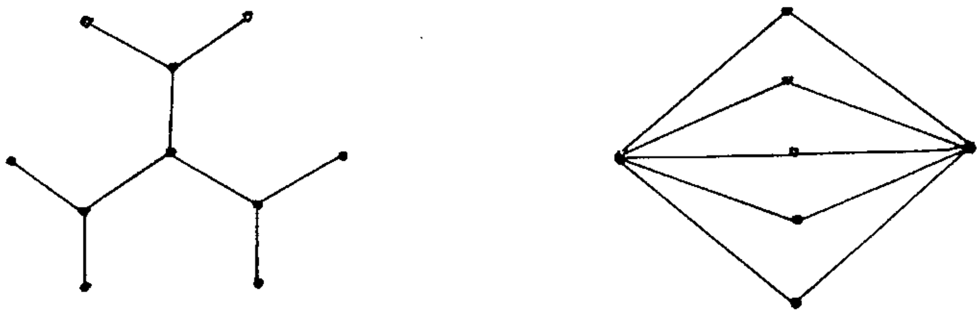
Graph lengkap K_7 dengan 3 spanning sirkuit

3.3. Faktorisasi-{1,2}

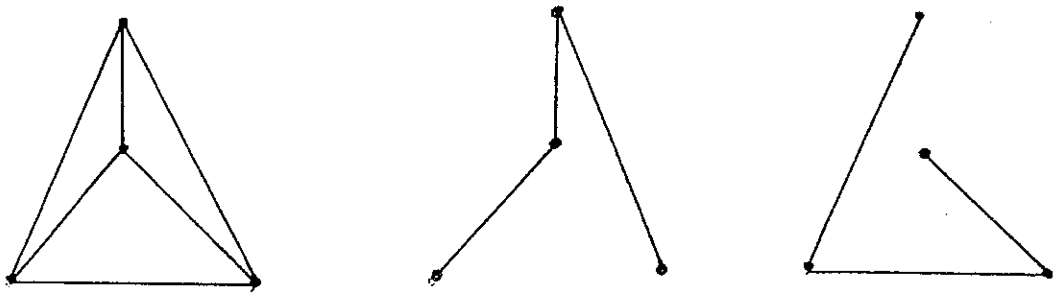
Apabila terdapat graph G dan H adalah subgraph dari graph G maka H disebut subgraph-{1,2} dari G jika $1 \le deg_H \le 2$ untuk setiap titik v di H. $Deg_H(v)$ didefinisikan sebagai derajat titik v di H.

H adalah subgraph-{1,2} maksimal dari graph G apabila terdapat subgraph-{1,2} yang lain, misalkan H′sedemikian sehingga memenuhi $|V(H)| \ge |V(H')|$. Apabila H merupakan faktor dari graph G maka H disebut faktor-{1,2} dari graph G.

Setiap graph G yang mempunyai subgraph-{1,2} belum tentu mempunyai faktor-{1,2}. Dengan kata lain, faktor-{1,2} merupakan bentuk khusus dari spanning forest linier. Pada gambar 3.4.1. Berikut ini menunjukan graph yang tidak mempunyai faktor-{1,2}.



Gambar 3.4.1

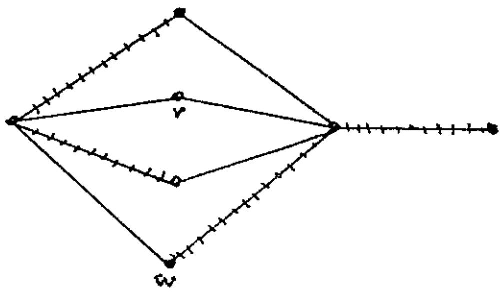


Gambar 3.4.2.

Graph G dengan 2 faktor-{1,2}

Misalkan v dan w adalah titik-titik di G dan M adalah suatu subgraph-{1,2} maksimal dari G maka path-vw yaitu $P=\{v=v_0, v_2, \ldots, v_l=w\}$ disebut path alternatif-vw jika garis-garis path p secara berganti-ganti berada di M. Atau terdapat $v_{2k}v_{2k+1} \notin M$ dan $v_{2k+1}v_{2k+2} \in M$ untuk $k = 0, 1, \ldots, \frac{l}{2} - 1$.

Contoh :



Gambar 3.5.

Gambar 3.5. menunjukan *graph* G dengan subgraph-{1,2} maksimal (ditandai dengan garis bersetrip) dan path alternatif-vw.

Teorema berikut ini menunjukan karakteristik untuk graph yang memiliki faktor-{1,2}.

Teorema 3.3.

Suatu graph G mempunyai faktor-{1,2} jika dan hanya jika dipenuhi pertidaksamaan :

$$|S_o(G-S)| \le 2|S|$$

dimana S adalah subset dari himpunan titik di G dan $S_o(G-S)$ adalah himpunan titik terasing di G-S.

Bukti (syarat perlu):

Misalkan graph G mempunyai faktor-{1,2} yaitu $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Didefinisikan bahwa :

$$V_i = \{ v |\ v \in S_o(G-S) \text{ dan } v \in V(F_i) \}$$

maka $\bigcup_{i=1}^{r} V_i = S_o(G-S)$ berarti $|\bigcup_{i=1}^{r} V_i| = |S_o(G-S)|$. . . (1)

Karena $F_1, F_2, \ldots, F_r$ merupakan faktor-{1,2} maka diantara komponennya terdapat dua kemungkinan yaitu :

Jika komponennya merupakan path dengan panjang = 2 maka berlaku :

$|S \cap V(F_i)| < |V_i|$ atau $2|S \cap V(F_i)| = |V_i|$

Jika komponennya merupakan path dengan panjang > 2 maka berlaku :

$|S \cap V(F_i)| \ge |V_i|$ atau $2|S \cap V(F_i)| > |V_i|$

Sehingga dari kedua pertidaksamaan tersebut diperoleh :

$2|\bigcup_{i=1}^{r} S \cap V(F_i)| \ge |\bigcup_{i=1}^{r} V|$; untuk i= 1,2, . . . ,r (2)

Karena $S \cap V(F_i) = S$ maka $|\bigcup_{i=1}^{r} S \cap V(F_i)| = |S|$

$$2|\bigcup_{i=1}^{r} S \cap V(F_i)| = 2\,|S|$$

dari (1) dan (2) :

$$|\bigcup_{i=1}^{r} V_i| = |S_o(G-S)| \le 2\,|\bigcup_{i=1}^{r} S \cap V(F_i)| = 2\,|S|$$

$$|S_o(G-S)| \le 2\,|S|$$

terbukti.

Bukti (syarat cukup):

Andaikan G tidak mempunyai faktor-{1,2}. Misalkan M adalah subgraph-{1,2} maksimal dari G dan u adalah titik dari G-M. S adalah himpunan titik-titik berderajat 2 di M atau $v \in S$ dan $deg_M(v)=2$. v' adalah titik-titik berderajat 1 di M atau $deg_m(v')=1$. A(x) adalah himpunan titik-titik pada komponen-komponen dari M yang dilalui path alternatif. Maka :

$$A(x) - S = v' \quad \text{dan} \quad |A(x)-S| = 2|S|$$

$$\{A(x) - S\} \cup \{u\} \subset S_o(G-S)$$

sehingga

$$|\{A(x) - S\} \cup \{U\}| \le |S_o(G-S)|$$

$$2|S| + |u| \le |S_o(G-S)|$$

$$2|S| < |S_o(G-S)| \quad \text{, kontradiksi.}$$

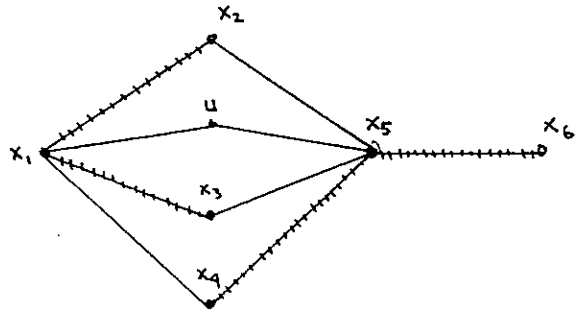
Yang benar adalah :

$2|S| \ge |S_o(G-S)|$ maka graph G mempunyai faktor-{1,2}.

Terbukti.

Contoh :

Diberikan graph G yang tidak mempunyai faktor-{1,2} seperti pada gambar 3.5. :



$S = \{x_1 , x_5\}$; $|S| = 2$

$S_o(G-S) = \{x_2 ,x_3 ,x_4 ,x_6 ,u\}$; $|S (G-S)| = 5$

$A(x) = \{x_1 ,x_2 ,x_3 ,x_4 ,x_5 ,x_6\}$

$A(x) - S = \{x_2 ,x_3 ,x_4 ,x_6\}$; $|A(x)-S| = 4$

$|A(x)-S| = 2|S| = 4$

maka $2|S| < |S_o(G-S|$ atau $4 < 5$

akibat 3.1.

Setiap graph regular mempunyai faktor-{1,2}

Bukti :

Misalkan G adalah graph regular berderajat r dan S adalah subset dari himpunan titik di G. Didefinisikan D_1 dan D_2 sebagai berikut :

$$D_1 = \sum_{v \in S} \deg_G(v) = r|S|$$

$$D_2 = \sum_{v \in S_o(G-S)} \deg_G(v) = r|S_o(G-S)|$$

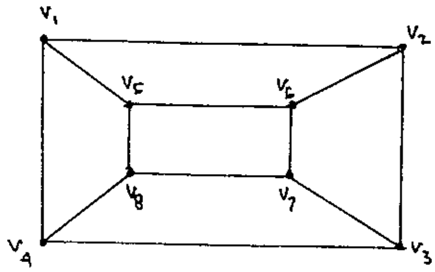
Maka $D_1 \geq D_2$ karena setiap titik di $S_o(G-S)$ bertetangga dengan titik-titik di S sehingga dipenuhi :

$r|S| \geq r|S_o(G-S)|$ maka berarti juga $2|S| \geq |S_o(G-S)|$

Maka menurut teorema 3.3. graph G mempunyai faktor-{1,2}.

Terbukti.

Contoh :



Gambar 3.6.1.

Graph regular-4

Misalkan $S = \{v_1, v_6, v_3\}$; $|S|=3$

$S_o(G-S) = \{v_2\}$; $|S_o(G-S)|=1$

maka $|S| > |S_o(G-S)|$

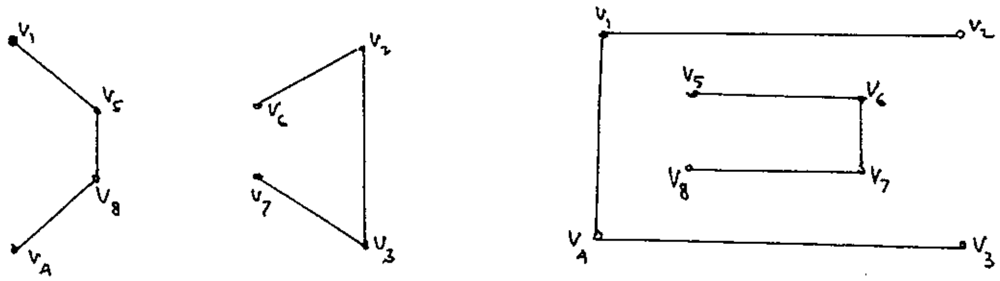
Misalkan $S=\{v_1, v_6, v_8, v_3\}$; $|S|=4$

$S_o(G-S) = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$; $|S_o(G-s)|$

Maka $|S| = |S_o(G-S)|$

Jadi $|S| \geq |S_o(G-S)|$ berarti $2|S| \geq |S_o(G-S)|$

Faktor-{1,2} dari graph G adalah :



Gambar 3.6.2.

Bila graph G adalah produk dari faktor-{1,2} maka gabungannya disebut faktorisasi-{1,2} dan graph G disebut faktorable-{1,2}.

Teorema 3.4.

Setiap graph regular adalah faktorable-{1,2} bukti :

Misalkan G adalah graph regular-r. Bila r genap maka jelas graph G dapat didekomposisikan atas $^{r}/2$ faktor-2. Maka dengan menghapus satu garis dari setiap faktor-2 akan didapatkan faktor-{1,2}.

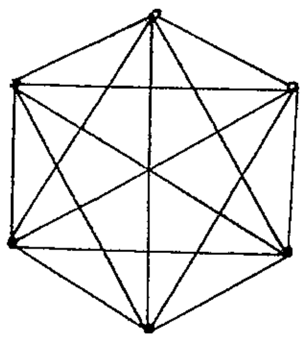
Bila r ganjil, menurut akibat 3.1, graph G mempunyai faktor-{1,2}, yaitu F. Misalkan graph G´ adalah graph yang diperoleh dengan menghapus semua garis F dari graph G maka derajat setiap titik di G´ adalah r-1 atau r-2. Dengan menambah himpunan titik baru I, maka G´ menjadi graph regular-{r-1}, yaitu G" sedemikian sehingga G" dapat didekomposisikan kedalam faktor-2, yaitu f_i dimana i= 1, 2,. . . ,$^{(r-1)}/2$. Dengan menghapus himpunan titik I dari graph G" maka f_i menjadi faktor-{1,2} dari G.

Jadi terdapat faktor-{1,2} yaitu f_i dengan i=1,2,...,$\frac{(r-1)}{2}$ yang membentuk faktorisasi-{1,2} dari graph G. Dengan demikian graph G faktorable-{1,2}.

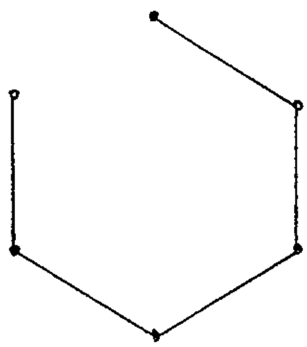
Terbukti.

Contoh :

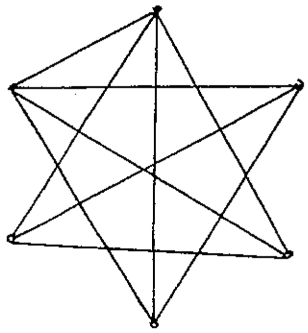
Diberikan graph regular-5 :



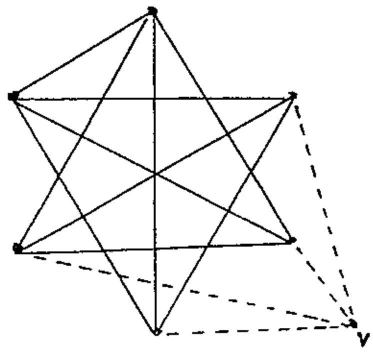
graph G



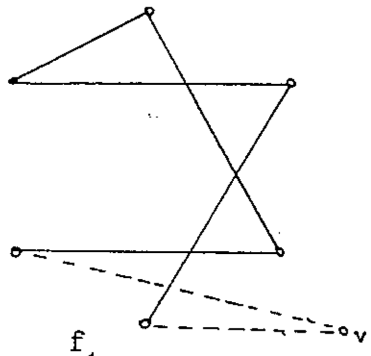
F = Faktor-{1,2} dari G



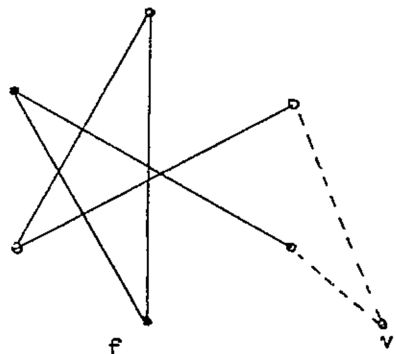
$G' = G-F$



$G'' = G' + \{v\} \in I$

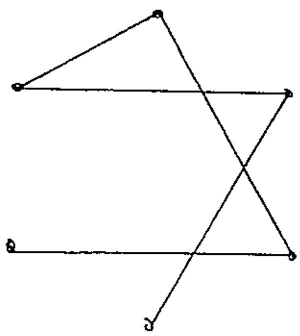


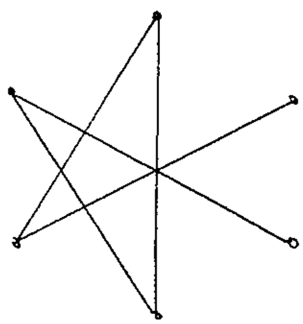
f_1



f_2

f_1 dan f_2 merupakan faktor-2 dari G''. Dengan menghapus titik $\{v\} \in I$ akan diperoleh dua faktor-$\{1,2\}$ dari G.





Gambar 3.7.

Dari teorema 3.4. didapatkan akibat sebagai berikut :

Akibat 3.2.

setiap graph regular-r mempunyai faktor-$\{k,k+1\}$ untuk setiap k dengan $1 \le k < r$.

Bukti :

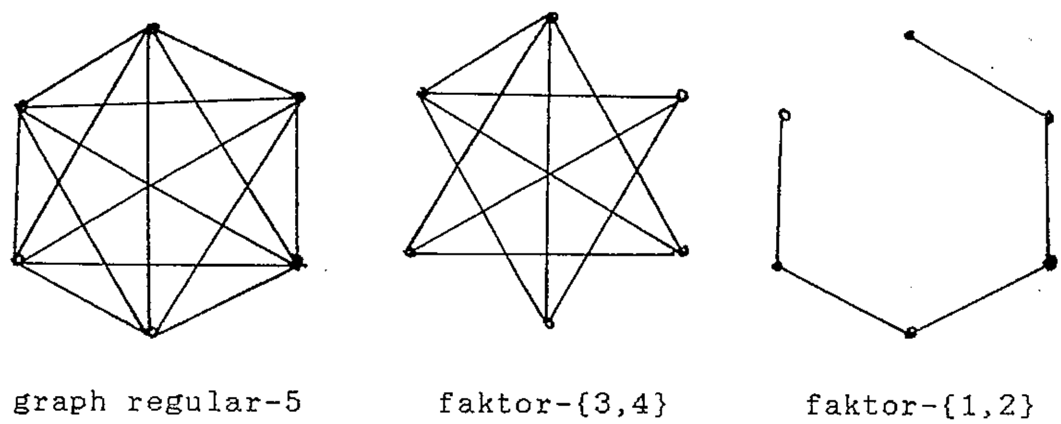
Misalkan G adalah graph regular-r.

Bila r genap, menurut bukti pada teorema 3.4, graph G dapat didekomposisikan ke dalam faktor-{1,2} sebanyak $^r/2$. Berarti dalam G terdapat faktor-{1,2} yaitu f_i dengan $i=1, 2, \ldots, {}^r/2$. Dengan menghapus semua garis dari faktor-faktor-{1,2} secara bertahap akan diperoleh faktor-{r-2i, r-2i+1} dengan $1 \le i \le {}^r/2$. Dengan demikian untuk setiap k dengan $1 \le k < r$, terdapat faktor-{k,k+1}.

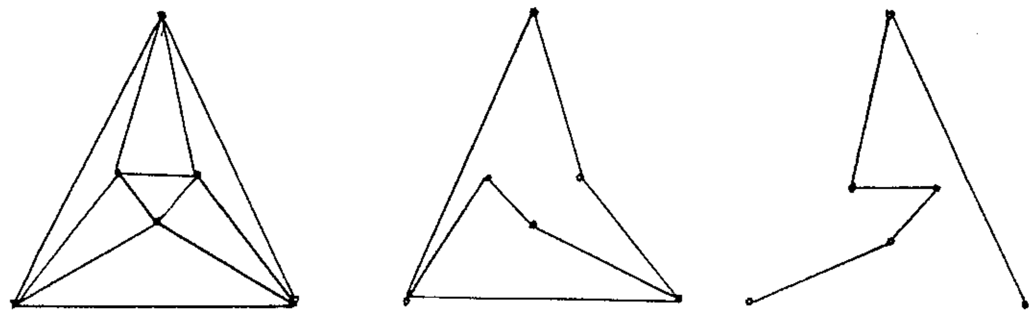
Bila r ganjil, berdasarkan teorema 3.4, graph G dapat didekomposisikan ke dalam faktor-{1,2} sebanyak $\lceil {}^r/2 \rceil$. Jadi dari graph G dapat dibuat faktor-{1,2} yaitu f_i dengan $i=1, 2, \ldots, \lceil {}^r/2 \rceil$.

Dengan cara yang sama yaitu dengan menghapus semua garis dari faktor-faktor-{1,2} secara bertahap akan didapatkan faktor-{r-2i,r-2i+1} dengan $1 \le i \le \lceil {}^r/2 \rceil$. Dengan demikian untuk setiap k dengan $1 \le k < r$ dapat ditemukan faktor-{k,k+1}. Terbukti.

Contoh :



Gambar 3.6.1.



graph regular-4 faktor-{2,3} faktor-{1,2}

Gambar 3.6.2.

Keberadaan faktor-1, faktor-2 maupun faktor-{1,2} dari graph regular-r akan membantu dalam proses pembentukan forest linier untuk mendapatkan harga arborisitas liniernya yang akan dibahas pada bab berikutnya.