BAB II

KONSEP-KONSEP DASAR TEORI GRAPH

2.1. Graph Dan Subgraph

Definisi 1.

Suatu graph G(V,E) disingkat graph G, terdiri dari himpunan V yang elemennya berupa titik (vertex) dan himpunan E yang elemennya berupa pasangan tidak berurutan dengan bentuk (i,j) atau (j,i) yang disebut garis-garis (edges) dimana i dan j merupakan titik-titik pada V.

Garis (i,j) terhubung diantara titik i dan j maka garis (i,j) dikatakan *insiden* dengan titik i dan j. Sebaliknya, titik i dan j dikatakan insiden dengan garis (i,j). Pasangan dari titik yang terhubung melalui beberapa garis yang berbeda disimbolkan dengan $(i,j)_1,(i,j)_2, \ldots,$ $(i,j)_k$. Jika $k \geq 2$ maka garisnya disebut garis-garis *paralel*. Bila terdapat garis-garis dari pasangan titik yang sama (i,i) maka garisnya disebut *loop*. Dan jika terdapat dua atau lebih garis loop disuatu titik maka garisnya juga disebut garis-garis paralel.

Definisi 2.

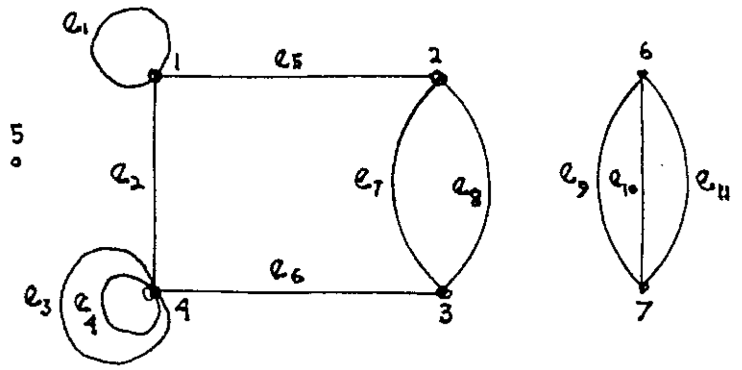
Suatu titik yang tidak insiden dengan suatu garis disebut titik terasing (*isolated point*).

Contoh :

untuk menjelaskan definisi-definisi diatas diberikan contoh sebagai berikut :

contoh sebagai berikut :

Diberikan suatu graph G :



Gambar 2.1.

graph G(V,E) dengan

V ={1,2,3,4,5,6,7} dan

$E=\{(1,1),(1,2),(1,4),(4,4)_1,(4,4)_2,(4,3),(2,3)_1,(2,3)_2,$
$(6,7)_1,(6,7)_2,(6,7)_3\}$.

Garis (1,1) pada titik 1 merupakan suatu loop, demikian juga garis $(4,4)_1$ dan $(4,4)_2$ merupakan dua loop pada titik 4. Garis $(2,3)_1$ dan $(2,3)_2$ yaitu garis-garis yang terhubung diantara titik 2 dan 3 merupakan dua garis yang paralel. Demikian juga garis $(6,7)_1,(6,7)_2,(6,7)_3$ adalah garis yang paralel. Titik 5 merupakan titik terasing (isolated point), karena tidak ada garis yang insiden dengannya.

Garis-garis dalam graph dapat juga disimbolkan dengan e_i, misalnya pada gambar 2.1 :

garis (1,1) = e_1

garis (1,4) = garis (4,1) = e_2

garis $(2,3)_1$ = garis $(3,2)_1$ = e_7

garis $(2,3)_2$ = garis $(3,2)_2$ = e_8

Selanjutnya notasi $|E(G)|$ dan $|V(G)|$ akan digunakan untuk menunjukkan banyaknya garis dan banyaknya titik pada suatu graph G.

Definisi 3 :

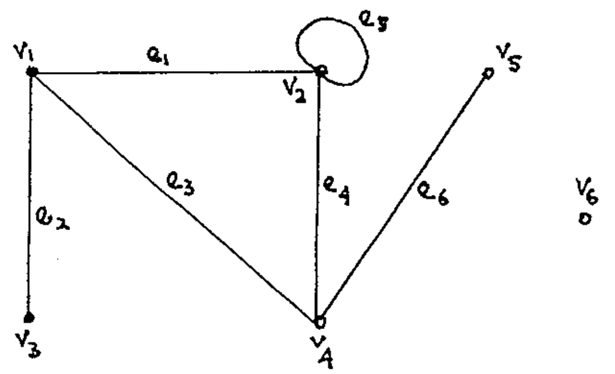
Dua titik dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika kedua titik tersebut dihubungkan paling sedikit oleh satu garis.

Definisi 4 :

Derajat suatu titik v_i dinotasikan dengan $d_G(v_i)$ adalah banyaknya garis yang insiden dengan titik tersebut.

Contoh :

Diberikan graph G :



Gambar 2.2.

Pada gambar 2.2, v_1 dan v_2 bertetangga, v_1 dan v_3, v_1 dan v_4, v_2 dan v_4 , v_4 dan v_5 juga bertetangga. Tetapi v_1 tidak bertetangga dengan v_5 , v_3 tidak bertetangga dengan v_2, v_4 dan v_5 .

Derajat v_1 dinotasikan dengan $d_G(v_1)= 3$, $d_G(v_3)= 1$ $d_G(v_2)=4$,

$d_G(v_4)=3$, $d_G(v_5)=1$. Sedangkan $d_G(v_6)=0$ sehingga v_6 disebut juga titik terasing.

Teorema 1.1 :

Jumlah derajat dari titik-titik dalam suatu graph G adalah dua kali jumlah garis-garisnya. Atau :

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2\ m. \qquad (1)$$

Bukti :

Misalkan titik-titik dari suatu graph G adalah v_1, v_2, . . ., v_n, yang mana masing-masing dari titik v_i mempunyai i derajat $d_G(v_i)$. Misalkan pula jumlah garis dari graph G adalah m. Karena setiap garis menghubungkan dua titik, maka setiap garis akan menambahkan masing-masing 1 derajat pada dua buah titik yang berbeda atau menambahkan 2 derajat pada satu titik yang sama. Dengan demikian jumlah derajat dari setiap titik adalah dua kali jumlah garis pada G, atau :

$$d_G(v_1) + d_G(v_2) + \ .\ .\ . + d_G(v_n) = 2\ m$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2\ m.$$

terbukti.

Teorema 1.2 :

Banyaknya titik dengan derajat ganjil pada suatu graph adalah genap.

Bukti :

Jika suatu titik dengan derajat ganjil dan derajat genap dipisahkan, maka banyaknya derajat suatu titik di ruas kiri persamaan (1) dapat dituliskan sebagai jumlahan dari dua jumlahnya yang masing-masing memuat titik-titik dengan derajat genap dan ganjil :

$$\Sigma\, d_G(v_i) = \sum_{genap} d_G(v_j) + \sum_{ganjil} d_G(v_k) \qquad (2)$$

Jika pada ruasa kiri persamaan (2) adalah genap, maka pernyataan pertama pada ruas kanan adalah genap (karena jumlahan dari bilangan genap) maka pernyataan kedua juga harus genap. Andaikan pernyataan kedua pada ruas kanan adalah ganjil maka tidak mungkin terjadi jumlahan dari bilangan genap dan bilangan ganjil adalah genap.
Kontradiksi dengan sifat jumlahan. Jadi pengandaian salah, yang benar adalah :

$$\Sigma\, d_G(v_i) = \text{suatu bilangan genap.}$$

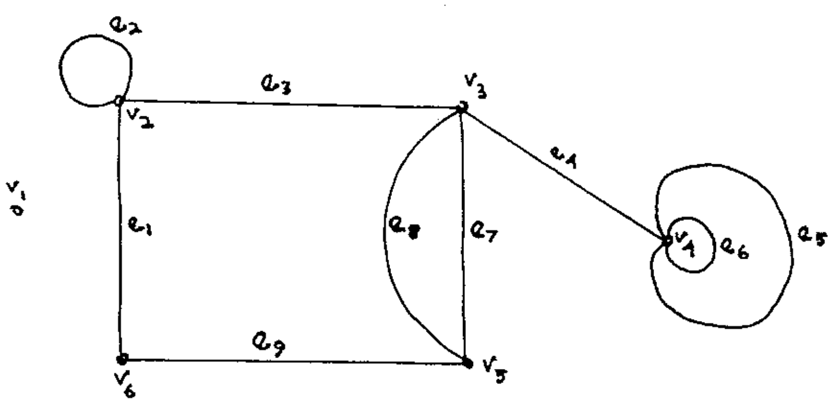
Sehingga teorema terbukti.

Definisi 5 :

Graph $G_s(V_s,E_s)$ adalah *subgraph* dari graph $G(V,E)$ dimana V_s adalah subset dari V dan E_s adalah subset dari E. Jika V_s dan E_s masing-masing adalah subset sejati dari V dan E maka subgraphnya disebut subgraph sejati. Jika $V_s = V$ dan E_s subset sejati dari E maka subgraphnya disebut *spanning subgraph.* Jika V_s adalah subset sejati dari V atau $V_s = V$ dan E_s adalah himpunan kosong maka subgraphnya disebut graph nol (*null graph*)

Contoh :

Diberikan suatu graph G :



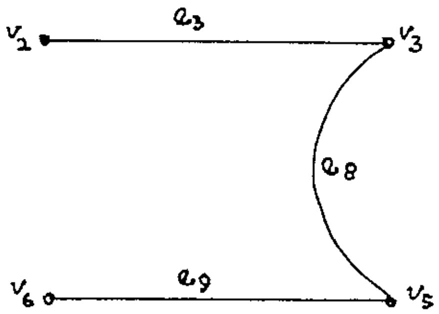
Gambar 2.3.

Pada gambar diatas, graph dengan $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$

Subgraph sejati dari G adalah :

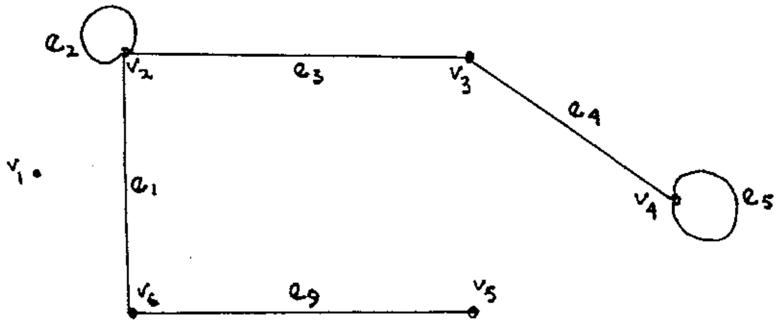
dengan $V_s =\{v_2,v_3,v_5,v_6\}$

$E_s =\{e_3,e_8,e_9\}$



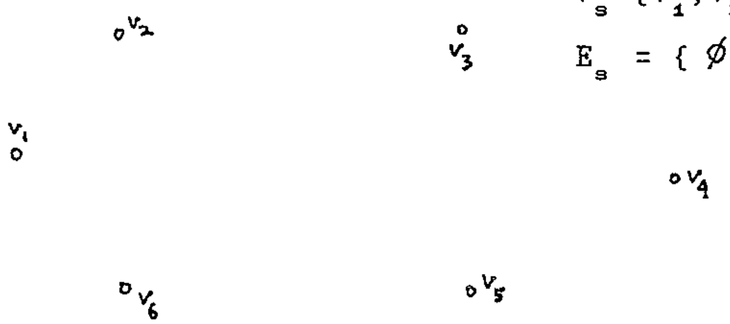
Gambar 2.3.1.

Spanning subgraph dari G adalah



Gambar 2.3.2

Graph nol dari graph G adalah



$V_s = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E_s = \{ \emptyset \}$

Gambar 2.3.3

2.2. Connected Graph

Definisi 6 :

Walk adalah deretan bergantian dari titik dan garis dalam suatu graph yang dimulai dan diakhiri dengan titik. Setiap garis insiden dengan titik yang mendahului dan mengakhirinya.

Dalam suatu walk titik maupun garis boleh diulang. Bila titik awal sama dengan titik akhir maka walk yang demikian disebut walk tertutup dan bila titik awal tidak sama dengan titik akhir maka disebut terbuka.

Definisi 7 :

Trail adalah suatu walk dimana titik-titiknya boleh diulang tetapi garis-garisnya tidak boleh diulang. Trail euler (*eulerian trail*) adalah trail tertutup yang memuat semua garis dari graphnya.

Definisi 8 :

Sirkuit adalah suatu trail dimana titik awal sama dengan titik akhir. Jika suatu sirkuit mempunyai barisan titik-titik $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k$ dimana $i_1 = i_k$, maka sirkuit dikatakan mempunyai panjang k-1. Bila suatu sirkuit memuat seluruh titik dari graph G maka disebut spanning sirkuit.

Definisi 9 :

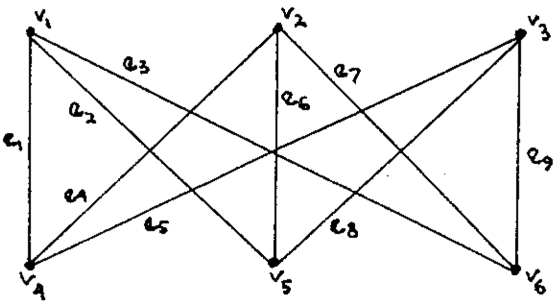
Path adalah suatu walk dengan semua titik dalam barisan yang berbeda. Suatu path disebut juga trail yang terbuka. Jika suatu path mempunyai barisan titik $i_1, i_2, \ldots\ i_{k-1}, i_k$ maka path tersebut mempunyai panjang k-1. Suatu titik terasing dikatakan sebagai path dengan panjang nol.

Definisi 10 :

Girth dari suatu graph G adalah panjang sirkuit yang terpendek dalam graph tersebut. Girth dari suatu graph dinotasikan dengan $g(G)$.

Contoh :

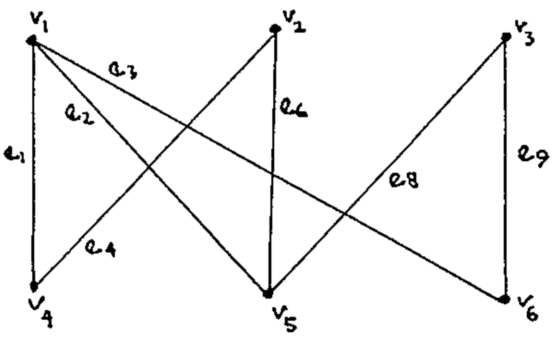
Diberikan suatu graph G:



Gambar 2.4

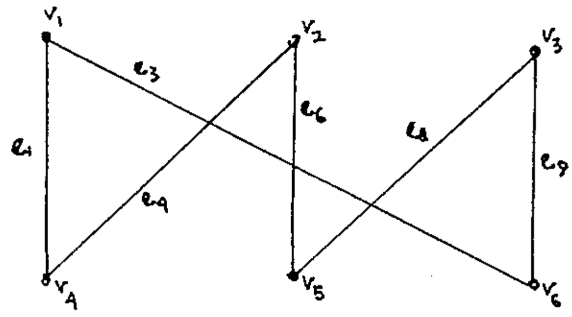
Pada gambar diatas, suatu walk terbuka yaitu barisan titik dan garis $v_1, e_1, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_8, v_3, e_9, v_6$.

Contoh suatu trail yaitu barisan titik dan garis $v_1, e_1, v_4, e_4, v_2, e_6, v_5, e_2, v_1, e_3, v_6, e_9, v_3, e_8, v_5$. Seperti ditunjukkan pada gambar 2.4.1 :



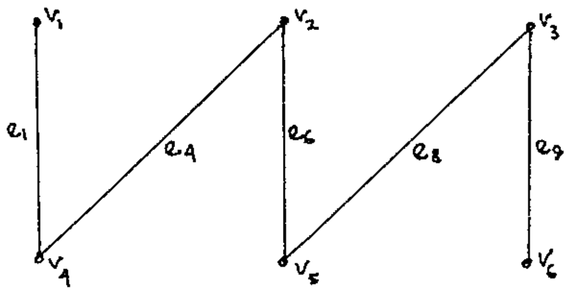
Gambar 2.4.1.

Suatu sirkuit dari graph pada gambar 2.4, yaitu barisan titik dan garis $v_1, e_1, v_4, e_4, v_2, e_6, v_5, e_8, v_3, e_9, v_6, e_3, v_1$ dengan panjang 6.Ditunjukkan pada gambar 2.4.2 :



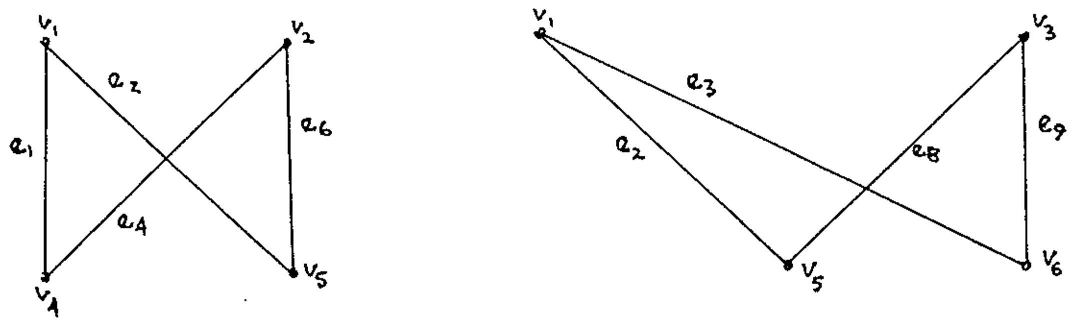
Gambar 2.4.2

Contoh suatu path dari graph pada gambar 2.4, yaitu barisan titik dan garis $v_1, e_1, v_4, e_4, v_2, e_6, v_5, e_8, v_3, e_9, v_6$, dengan panjang 5 seperti ditunjukkan pada gambar 2.4.3.



Gambar 2.4.3.

Contoh dua girth dari graph G dengan $g(G)=4$ ditunjukkan pada gambar 2.4.5 :

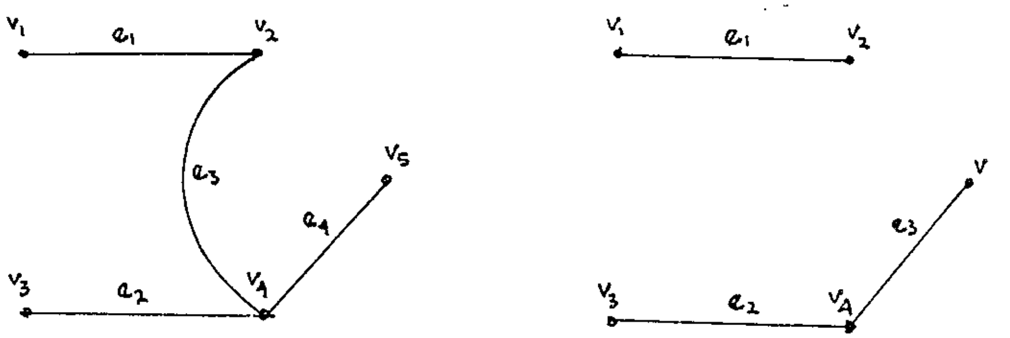


Gambar 2.4.4.

Definisi 11:

Suatu graph G disebut *connected graph* jika setiap pasangan dari titik-titiknya terhubung melalui suatu path, dan suatu graph disebut *disconnected graph* jika terdapat pasangan titik yang tidak terhubung melalui suatu path.

Contoh :



(i) connected graph (ii) disconnected graph

Gambar 2.5.

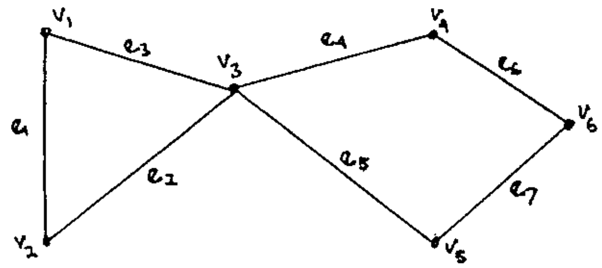
Definisi 12 :

Suatu *komponen* adalah connected subgraph yang memuat maksimal sejumlah garis-garisnya. Suatu titik terasing merupakan suatu komponen.

Definisi 13 :

Graph euler (*eulerian graph*) adalah graph terhubung yang mempunyai trail tertutup yang memuat semua garis dari graph tersebut (mempunyai eulerian trail).

Contoh :



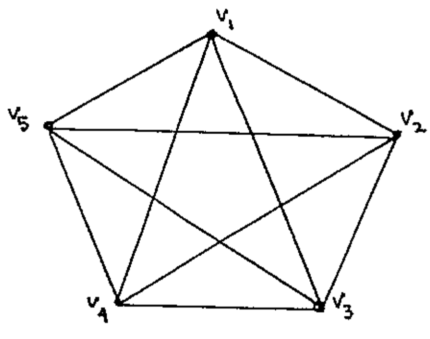
Gambar 2.6.

Suatu graph G dengan himpunan titik-titik $V=\{v_1, . . . ,v_6\}$ dan himpunan garis-garis $E=\{e_1, . . . ,e_7\}$ pada gambar diatas adalah graph euler. Setiap titik pada graph euler selalu berderajat genap. Ciri seperti ini ditemukan oleh Euler dan berlaku bagi sembarang graph.

Definisi 14 :

Suatu graph G disebut graph lengkap (*complete graph*) jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh satu garis atau bertetangga (*adjacent*). Graph lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n.

Contoh :



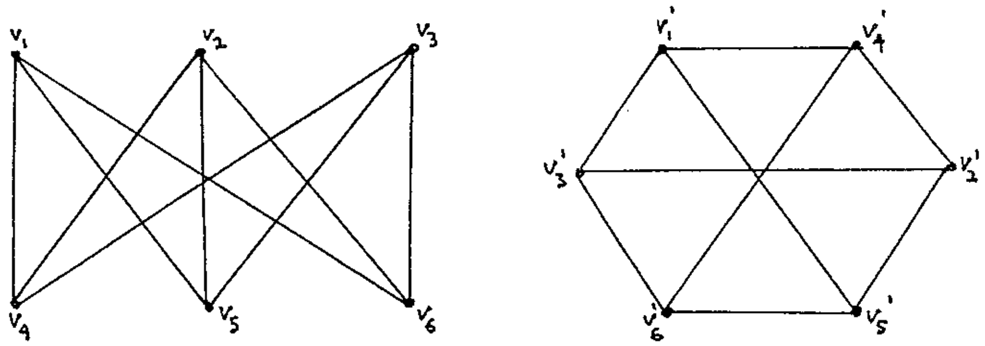
Gambar 2.7.

Graph lengkap dengan lima titik (K_5)

Definisi 15 :

Dua graph disebut *isomorphism* , dinyatakan dengan $G_1 = G_2$, jika terdapat korespondensi satu-satu diantara elemen-elemen dari himpunan titik-titiknya dan terdapat korespondensi satu-satu diantara elemen-elemen dari himpunan garis-garisnya sedemikian sehingga garis-garis yang bersesuaian insiden dengan titik-titik yang sesuai.

Contoh :



Gambar 2.8.

Kedua graph pada gambar 2.8. adalah isomorphis hal ini dapat dilihat dari titik-titik $v_i \in V_1$ dan $v_i' \in V_2$ untuk i= 1,2,3,4,5,6. dimana terdapat korespondensi satu-satu dari titik-titik yang memperlihatkan ketetanggaan (adjacency).

2.3. Tree Dan Forest

Definisi 16 :

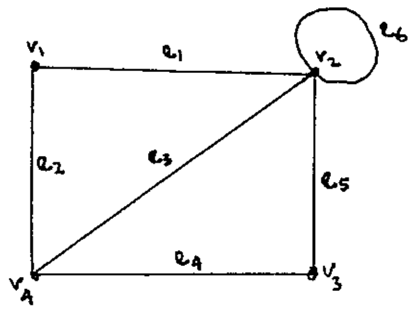
Suatu graph disebut *Tree* jika dan hanya jika graph tersebut connected dan tidak punya sirkuit.

Definisi 17 :

Suatu tree disebut *spanning tree* dalam suatu graph jika tree tersebut memuat semua titik-titik dari graphnya.

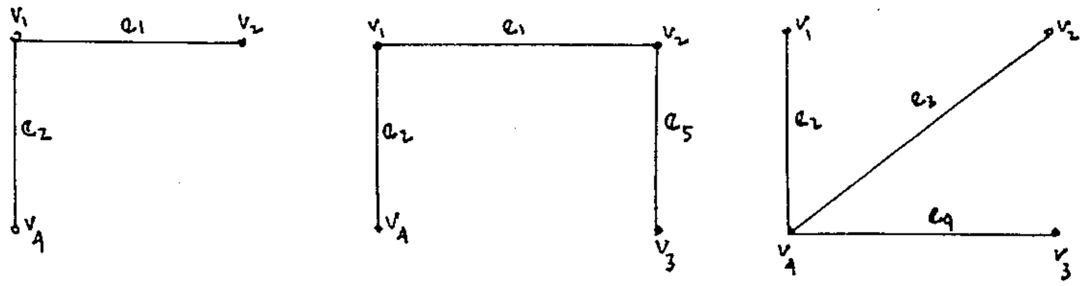
Contoh :

Diberikan suatu graph G :



Gambar 2.9.

Tree dari gambar 2.9 yang mungkin adalah :



Gambar 2.9.1.

Pada gambar 2.9.1.(ii) dan (i i i) me rupakan spanning tree dari graph G (gambar 2.9)

Definisi 18 :

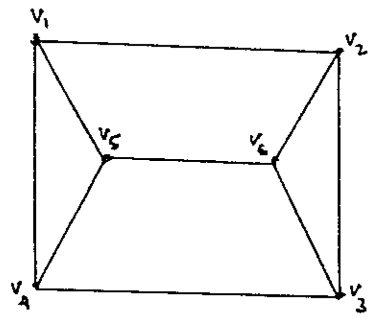
Forest dari graph G adalah subgraph dari graph G tanpa memuat sirkuit dimana graph G boleh connected atau disconnected. Forest didefinisikan juga sebagai kumpulan dari beberapa tree dimana boleh connected atau disconnected. Sehingga forest yang terdiri dari satu tree merupakan tree itu sendiri.

Definisi 19 :

Suatu graph F disebut *Forest linier* jika grap h F tersebut tidak mempunyai sirkuit dan setiap komponennya merupakan suatu path. Sehingga derajat titik-titiknya adalah $1 \le d_F(v) \le 2$.

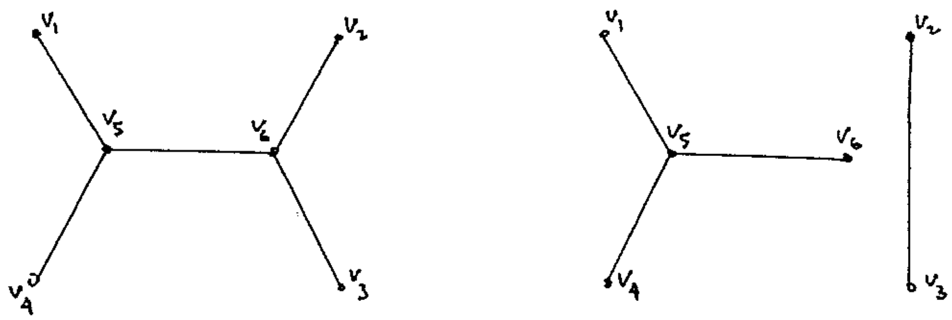
Contoh :

Diberikan suatu graph G :



Gambar 2.10.

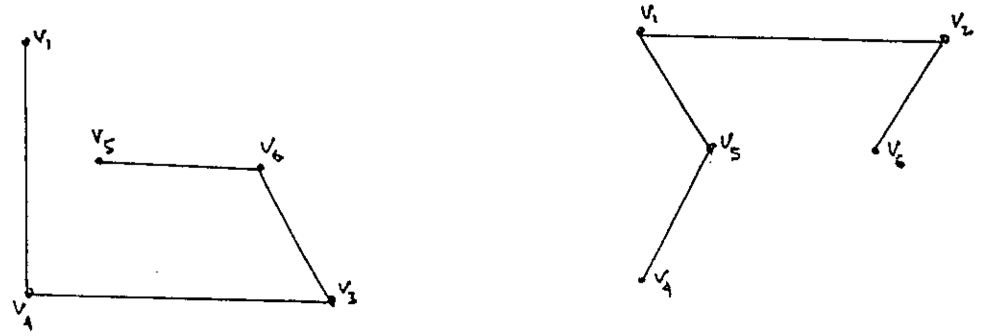
suatu forest dari graph diatas adalah :



(i)Connected. (ii)Disconnected.

Gambar 2.10.1.

Forest linier dari graph G adalah :



Gambar 2.10.2.

2.4. Operasi Dalam Graph

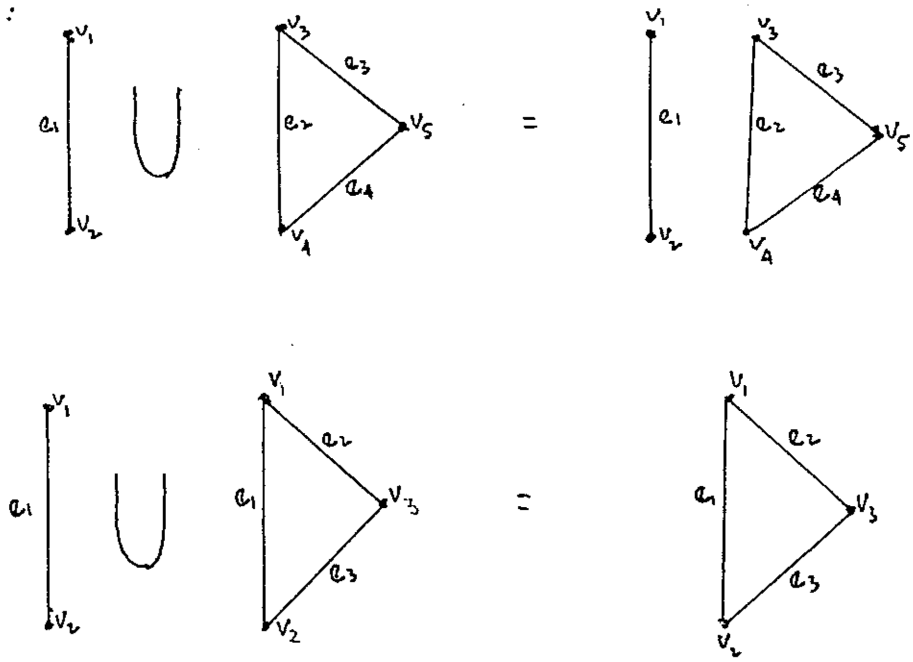
Definisi 20 :

Gabungan (*union*) d a r i graph G_1 dan graph G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graph $G=(V,E)$ dengan himpunan titik-titik $V=V_1 \cup V_2$ dan himpunan garis-garis $E = E_1 \cup E_2$

Contoh :

(1)

(2)

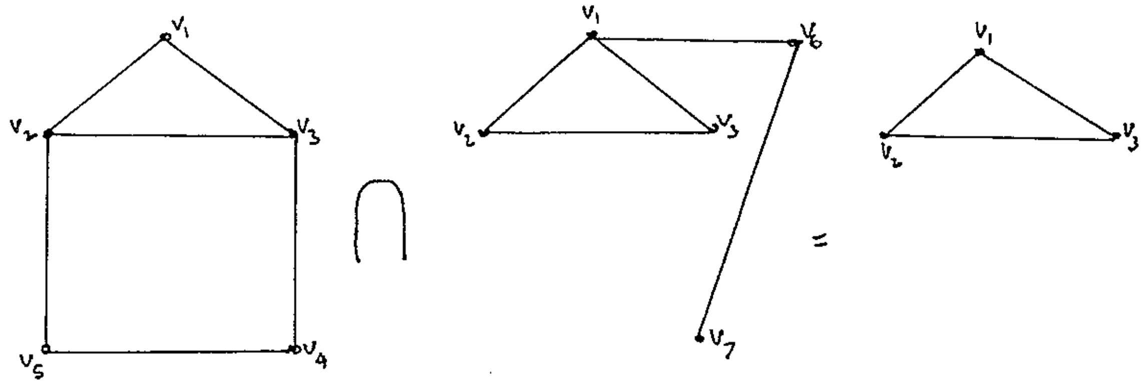


Gambar 2.11.

Definisi 21 :

Irisan dari graph G_1 dan graph G_2, dinotasikan dengan $G_1 \cap G_2$ adalah graph $G = (V,E)$ dengan himpunan titik $V = V_1 \cap V_2$ dan himpunan garis $E = E_1 \cap E_2$.

Contoh :

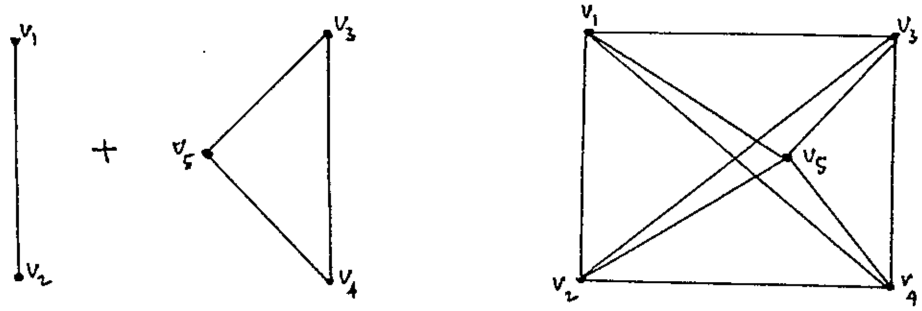


Gambar 2.12.

Definisi 22 :

Jumlah dari graph G_1 dan G_2, dinotasikan $G_1 + G_2$ adalah graph yang terdiri dari $G_1 \cup G_2$ dengan setiap titik di G_1 dihubungkan dengan setiap titik di G_2.

Contoh :

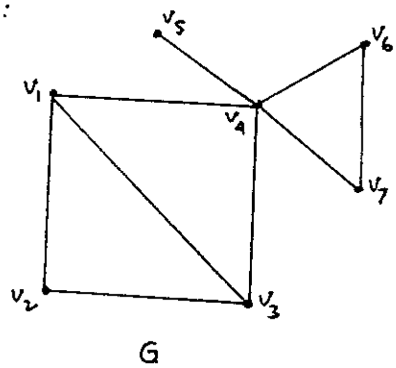


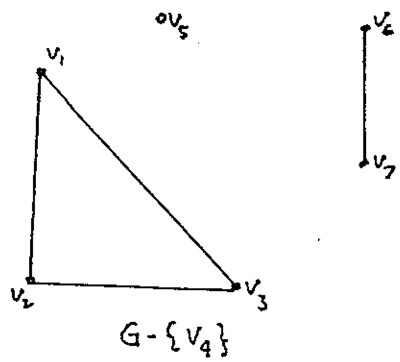
Gambar 2.13.

Definisi 23 :

Jika v_i suatu titik sembarang dalam graph $G=(V,E)$ maka $G-\{v_i\}$ adalah subgraph G_s yang diperoleh dengan menghapus titik v_i dan semua garis yang insiden dengan titik v_i .

Contoh :



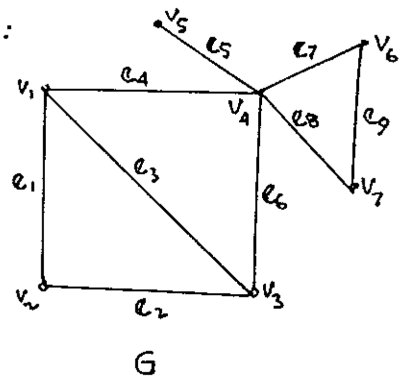


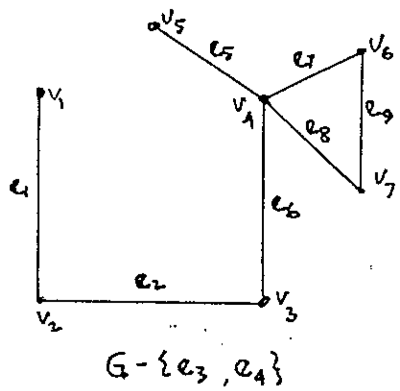
Gambar 2.14.

Definisi 24 :

Jika e_i suatu garis sembarang dalam graph $G=(V,E)$ maka $G-\{e_i\}$ adalah subgraph G_s yang diperoleh dengan menghapus garis e_i dari graph G. Penghapusan garis tidak berakibat penghapusan titik ujungnya.

Contoh :





Gambar 2.15.

2.6. Bilangan Modulo

Bila suatu integer Z dibagi oleh integer positip p maka terdapat q sebagai hasil bagi dan r sebagai sisa sedemikian sehingga :

$$Z = q\,p + r \qquad ; \quad 0 \le r \le p-1.$$

Untuk setiap $p>1$ dan untuk semua $a,b \in Z$ didefinisikan sebagai $a \equiv b \pmod{p}$ bila $a-b$ habis dibagi p, yaitu apabila terdapat $q \in Z$ sedemikian sehingga $a = q\,p + b$, untuk $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Contoh :

1. $45 \equiv 3 \pmod{7}$, karena $45 = 6 \cdot 7 + 3$
2. $35 \equiv 0 \pmod{7}$, karena $35 = 5 \cdot 7 + 0$
3. $-1 \equiv 4 \pmod{5}$, karena $-1 = (-1) \cdot 5 + 4$