BAB II

2.1. Relations (Hubungan-hubungan)

Pengertian matematis dari suatu relasi sangat mengikuti ide/pikiran intuisi kita.
Diberikan suatu himpunan X dari elemen-elemen x, y, ..., maka pengertian dari suatu relasi antara elemen-elemen tersebut harus sedemikian rupa sehingga kita dapat mengatakan dengan tepat apakah x berhubungan dengan y atau tidak. Karena x mungkin berhubungan dengan y tanpa y harus berhubungan (dengan cara yang sama) dengan x (misal: hubungannya mungkin seperti "adalah anak dari" atau "adalah lebih berat dari"), maka yang penting adalah *pasangan berurutan* (x, y) atau *ordered pair* (x, y).

Definisi 2.1. :

Bila diberikan dua himpunan X dan Y, maka suatu *relasi* f antara X dan Y adalah suatu himpunan bagian (subset) dari $X \times Y$ dan ditulis $x f y$ jika $(x, y) \in f$.

Definisi - definisi 2.2. :

Bila diberikan suatu relasi f antara himpunan X dan Y, maka *image (bayangan)* dari x ditunjukkan oleh $f_*(x)$ dan merupakan himpunan dari semua elemen dalam Y yang berhubungan dengan x, maka :

$$f_*(x) = \{y \in Y : (x,y) \in f\}$$

Dengan cara yang sama, *preimage* dari y, ditunjukkan oleh $f^*(y)$ merupakan himpunan:

$$f^*(y) = \{x \in X : (x,y) \in f\}$$

Kita bisa berpikir f_* sebagai fungsi dari X ke $\mathcal{P}$ (Y) dan f^* sebagai fungsi dari Y ke $\mathcal{P}$ (X); dimana $\mathcal{P}$ (X) merupakan himpunan dari semua himpunan bagian dari X (Power set $\mathcal{P}$ (X).

Secara lebih umum, jika $A \subset X$ dan $B \subset Y$, maka didefinisikan image-image yang *lemah (weak)* atau lebih *rendah (lower)* sebagai berikut:

$f_w(A) = \{y \in Y : (x,y) \in f$ untuk beberapa x dalam A$\}$

$= \{y \in Y : f^*(y) \cap A \neq \emptyset\}$

$f^w(B) = \{x \in X : (x,y) \in f$ untuk beberapa y dalam B$\}$

$= \{x \in X : f_*(x) \cap B \neq \emptyset)$

Karakterisasi-karakterisasi lain yang mungkin dari himpunan-himpunan ini adalah:

$f_w(A) = \cup_{x \in A} f_*(x)$;

$f^w(B) = \cup_{y \in B} f^*(y)$.

Dengan menggunakan notasi ϕ maka $\phi(A)$

adalah image biasa dan ϕ^{-1} (B) adalah inverse image.

Pengertian suatu *strong* atau *upper image* sebagai berikut:

$f_s(A) = \{y \in Y : f^*(y) \subset A\}$

$f^s(B) = \{\varkappa \in X : f_*(\varkappa) \subset B\}$

f_v, f_s adalah fungsi-fungsi dari $\mathcal{P}(X)$ ke $\mathcal{P}(Y)$ dan

f^w, f^s adalah fungsi-fungsi dari $\mathcal{P}(Y)$ ke $\mathcal{P}(X)$

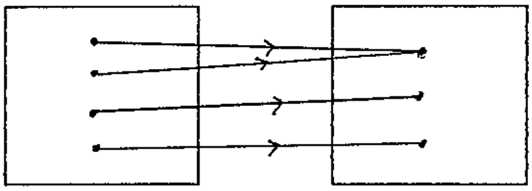
Domain dari f adalah merupakan himpunan dari semua x dalam X yang mana $f_*(\varkappa)$ tidak kosong (non empty). Dalam kebanyakan aplikasinya, sebenarnya akan serupa/ bertepatan dengan X. Kita namakan *Y codomain* , dan *range* untuk menunjukkan himpunan dari semua y dimana $f_*(y)$ tidak kosong.

Dua hal yang perlu diperhatikan:

1. Dari semua himpunan yang dibahas, f adalah satu-satunya yang merupakan suatu himpunan bagian dari X x Y, yang lainnya merupakan himpunan bagian-himpunan bagian dari X ataupun Y.

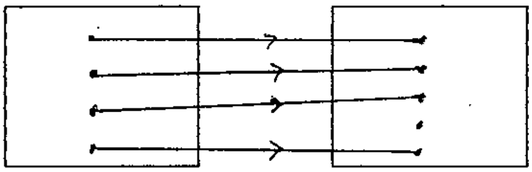
2. Kita tidak sepenuhnya mengidentifikasikan relasi f dengan graphnya tetapi lebih dengan graphnya sebagai suatu himpunan bagian dari X x Y, sehingga bila kita mengubah X x Y kita mengubah himpunan dimana graphnya ada (tersimpan) dan dengan alasan itu juga relasinya.

Sebagai visualisir dari fungsi-fungsi surjektif, injektif dan bijektif adalah sebagai berikut:



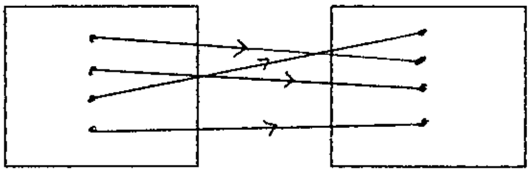
X Y

SURJEKTIF



X Y

INJEKTIF



X Y

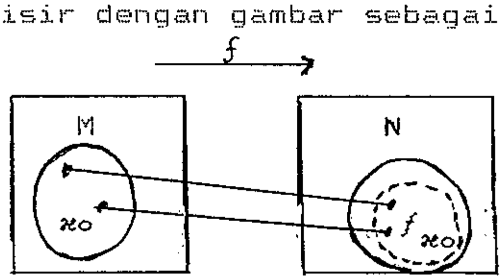
BIJEKTIF

Definisi 2.3.:

Fungsi f kontinue di x_0

$(Nf_{x_0})\ (EM_{x_0})\ .\ fM \subseteq N$

Divisualisir dengan gambar sebagai berikut:



X Y

f kontinue yaitu $(Nfx)\ (EMx)\ .\ f(M) \subseteq N$ jika Image invers setiap open set G dalam Y adalah open dalam X.

Definisi 2.4. :

Suatu relasi f pada X dikatakan:

- Refleksif bila $x f x$ untuk semua x dalam X
- Symetrik bila $x f y$ implikasi $y f x$
- Transitif bila $x f y$ dan $y f z$ bersama-sama menyatakan secara tidak langsung $x f z$.

Suatu relasi pada X yang refleksif, simetrik dan transitif adalah suatu *relasi ekuivalen*.

Suatu *partial order* pada X adalah suatu relasi transitif, antisymetrik (dalam pengertian bahwa paling banyak satu dari (x,y) dan (y,x) di dalam f) dan non refleksif (dalam pengertian bahwa untuk semua x, x tidak berhubungan dengan x).

Definisi 2.5.:

Himpunan X yang dilengkapi dengan relasi binair $<$ disebut suatu *partially ordered set (Poset)* bila mempunyai sifat-sifat:

Refleksif, yaitu $a < a$ untuk setiap $a \in X$.

Anti simetris, yaitu $a < b$ & $b < a$ ==> $a = b$ untuk setiap a, b, $\in X$.

Transitif, yaitu $a < b$ & $b < c$ ===> $a < c$ untuk setiap a, b, c $\in X$.

Pada suatu Poset terdapat kemungkinan adanya dua elemen yang tidak dapat dibandingkan, yaitu $a \nless b$ dan $b \nless a$. Misal, pada himpunan kuasa 2^X (=power set $\mathcal{P}(X)$), jika $<$

diartikan *set-theoretical inclusion* $\subset$, maka mungkin a $\not\subset$ b dan b $\not\subset$ a.

Apabila pada suatu Poset setiap dua elemen *dapat* dibandingkan maka Poset itu disebut suatu *totally partially ordered set.*

Istilah untuk relasi-relasi berurutan (order relations) tidak sepenuhnya standard, (persyaratan tidak harus dipaksakan).

Contoh-contoh paling umum dari himpunan-himpunan pasangan berurutan sebagian adalah bilangan-bilangan real dengan urutannya yang biasa, berbagai himpunan bagian dari bilangan-bilangan nyata dan power set $\mathcal{P}(X)$ dari beberapa himpunan X yang disusun oleh inclusion.

Ada suatu notasi dan kosa kata khusus yang digunakan bila berhubungan dengan partial order.

Relasi itu akan ditunjukkan oleh < atau oleh $\subset$ demikian juga > atau $\supset$. Ditekankan bahwa > untuk bilangan-bilangan dan $\supset$ untuk himpunan-himpunan.

Dengan cara yang sama, image dan preimage dari suatu elemen x mempunyai simbol-simbol dan nama-nama khusus.

$]x,.] = \{y : x < y\}$, himpunan itu disebut *final segment*

$[.,x[= \{y : y < x\}$, himpunan ini disebut *initial segment*

Jika $x_1 < x_2$ maka interval terbuka (open interval) $]x_1, x_2[$ didefinisikan oleh persamaan:

$]x_1,x_2[=]x_1,.]\cap[.,x_2[=\{y: x_1<y<x_2\}$

Digunakan pula notasi interval tertutup standard:

$[\cdot, x] = \{y : y \leq x\}$;

$[x_1, x_2] = \{y : x_1 \leq y \leq x_2\}$

Perhatikan bahwa dua elemen dari $[x_1, x_2]$ tidak perlu dihubungkan. Sebagai contoh:

Jika X adalah suatu himpunan dengan empat elemen {1, 2, 3, 4} dan $\mathcal{P}(X)$ disusun oleh Inclusion, maka boleh diambil:

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1,2,3\}$ sehingga $A_1 \subset A_2$.

Maka $[A_1, A_2] = \{\{1\}, \{1,2\}. \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Tentu {1,2} dan {1,3} tidak saling berhubungan.

Hal ini juga benar dengan $]A_1, A_2[= \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$.

2.2. Topologi Pada Partially Ordered Sets

Ditentukan himpunan sembarang X, terdiri atas elemen-elemen yang tidak didefinisikan (undefined element). Selanjutnya $\mathcal{T} \leq 2^X = \mathcal{P}(X)$.

Definisi 2.6 :

AKSIOMA HIMPUNAN TERBUKA:

$\mathcal{T}$ disebut suatu Topologi untuk X bila aksioma-aksioma di bawah ini dipenuhi:

1. Apabila $G_i \in \mathcal{T}$ untuk setiap $i \in I$, (I suatu index set yang berhingga atau tak terhingga) maka $\bigcup_i G_i \in \mathcal{T}$.
2. Apabila $G_i \in \mathcal{T}$ untuk setiap $i \in I$ (I suatu index set yang disyaratkan berhingga, maka $\bigcap_i G_i \in \mathcal{T}$

   Atau:

Setiap interseksi (diisyaratkan berhingga) dari anggota $\mathcal{T}$ menghasilkan anggota $\mathcal{T}$

3. $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $X \in \mathcal{T}$.

Anggota dari X disebut titik, sedangkan anggota $\mathcal{T}$ disebut *himpunan terbuka (open set)*.
Dapat dikatakan bahwa sistim aksioma di atas merupakan *definisi implisit* dari open set.

Diambil misal X suatu himpunan sembarang dan $\mathcal{T}=\{\emptyset, X\}$. Maka aksisoma-aksioma dipenuhi. Dalam topologi ini hanya ada dua open set. Topologi ini disebut *indiscreet topologi*.
Apabila untuk $\mathcal{T}$ diambil 2^X ($\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$) maka topologinya disebut *discreet topologi*. Dalam topologi ini setiap himpunan bagian dari X merupakan open set. Pada khususnya setiap singleton $\{x\}$, $\{y\}$ dan seterusnya adalah open.

Usual topologi dari bilangan-bilangan real. Sebagai X diambil himpunan bilangan real R. Sedangkan $\mathcal{T}$ didefinisikan demikian; himpunan G adalah open (yaitu $G \in \mathcal{T}$) bila $G = \emptyset$ atau apabila $x \in G$ maka ada suatu open interval yang memuat x dan termuat dalam G. Jelas aksioma terpenuhi. Open sets dalam topologi adalah open intervals dan union dari open intervals. Misal:
$G_1 = \{x : a<x<b\}$, $G_2 = \{x : a<x<b\} \cup \{x : c<x<d\}$.
$G_3 = \{x : x<a\}$; $G_4 = \{x : x>b\}$ dan seterusnya.
Sebaliknya $\{x : a \leq x < b\}$ dan $\{x : a \leq x \leq b\}$ maupun singleton $\{a\}$, $\{b\}$ dan seterusnya *bukan open sets*.

Bila garis real dipandang dalam usual topologi, maka open interval-interval-terbuka dalam arti susunan teoritis - adalah terbuka secara topologi juga. Setiap himpunan terbuka (open set) adalah suatu gabungan yang bisa dihitung (a contable union) dari interval-interval terbuka sehingga himpunan-himpunan ini membentuk suatu dasar (basis) bagi topologi.

Lebih jauh, karena masing-masing interval terbuka merupakan interseksi dari sebuah segmen awal dan akhir (an initial and a final segments), kumpulan-kumpulan dari semua segmen membentuk sebuah sub-basis untuk usual topologi.

Definisi 2.7.:

Diberikan $(X,<)$ menjadi suatu partially ordered set, maka topologi tersusun (order topology) pada X adalah yang dihasilkan dengan mengambil semua segmen awal dan akhir sebagai suatu sub basis.

Contoh :

(i) Seperti yang sudah diamati, topologi tersusun pada garis real merupakan usual topologi.

(ii) Diberikan X menjadi suatu himpunan dengan paling sedikit tiga elemen dan menganggap $\mathcal{P}(X)$ tersusun oleh inclusion.

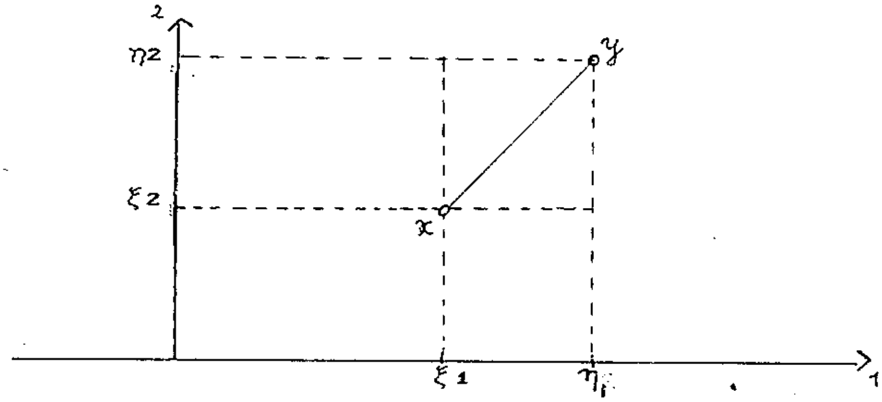
Sekarang jika $A \in \mathcal{P}(x)$ salah satu dari A atau $X \setminus A$ mempunyai paling sedikit dua elemen.

Pada keadaan terakhir, jika $x_1, x_2 \in X \setminus A$, $a \in A$ maka:

$\{A\} = [\cdot, A \cup \{x_1\}] \cap [\cdot, A \cup \{x_2\}[\cap] A \setminus \{a\}, \cdot]$

sehingga singleton {A} terbuka.

(iii) Anggap R^2 dengan relasi tersusun $x = (\xi_1, \xi_2) < (\eta_1, \eta_2) = y$, jika $\xi_1 < \eta_1$ dan $\xi_2 < \eta_2$.
Maka interval $]x,y[$ merupakan bujur sangkar/ empat persegi panjang terbuka dan topologi tersusun adalah usual topologi dari bidang.



Konstruksi yang sama dapat diaplikasikan dalam R^n

Mengingat kenyataan bahwa untuk menggunakan semua segmen dalam $\mathcal{P}(X)$ menghasilkan suatu topologi yang agak rumit, maka mungkin lebih baik menggunakan suatu himpunan bagian (subset) dari himpunan segmen-segmen sebagai suatu subbasis.

Kemungkinan pertama adalah hanya menggunakan segmen-segmen awal atau hanya menggunakan segmen-segmen akhir saja.
Memang dengan salah satu pembatan-pembatasan ini, kita mendapatkan topologi-topologi pada R yang lebih kasar, tetapi lebih menarik (mudah dimengerti).

Definisi 2.8:

Diberikan (X,≤) menjadi suatu partially ordered set, *topologi tersusun yang lebih tinggi (the upper order topology)* pada X adalah yang dihasilkan dengan menggunakan segmen-segmen akhir sebagai suatu subbasis.

Topologi tersusun yang lebih rendah (the lower topologi) adalah yang dibentuk dengan menggunakan segmen-segmen awal sebagai suatu subbasis.

2.3. Topologi Pada Ruang Himpunan Bagian

Kita bisa menganggap suatu korespondensi X dan Y sebagai suatu fungsi dari X ke $\mathcal{P}(Y)$, maka definisi kontinyuitas akan langsung jika kita memiliki suatu topologi yang tepat pada $\mathcal{P}(Y)$.

Kadang menjadi masalah (kasus), himpunan kosong menimbulkan beberapa problem. Merupakan hal yang biasa untuk tidak memasukkan hal itu sebagai suatu nilai yang mungkin dari suatu korespondensi.

Pengenyampingan ini sesungguhnya merupakan perbedaan antara suatu korespondensi dengan suatu relasi - maka kebanyakan bagian akan dibahas.

$$\mathcal{P}_o(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{ \emptyset \}$$

Mengikuti jalan pikiran yang sudah ada, kita mendefinisikan topologi-topologi yang lebih kasar dengan membatasi himpunan-himpunan dasar dan subdasar (basic dan subbasic sets).

Karena kita membutuhkan suatu topologi pada X, maka kita menghubungkan topologi pada $\mathcal{P}o(X)$ ke topologi pada X dengan menghubungkan himpunan-himpunan subbasic ke himpunan-himpunan terbuka di dalam X.

Dikatakan bahwa $\mathcal{T}_2$ *lebih kasar* atau *lebih kecil* dari pada $\mathcal{T}_1$ bila $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ dengan $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$ dan sebaliknya $\mathcal{T}_1$ adalah *lebih halus* atau *lebih besar* dari pada $\mathcal{T}_2$.

Diberikan $(X, \mathcal{T})$ menjadi suatu ruang Topologi dan diberikan G menunjukkan himpunan bagian terbuka (open subset) sembarang dan tidak kosong (anggota $\mathcal{T}$). Maka keluarga $\mathcal{U}$ terdiri dari semua segmen awal tertutup ditentukan oleh G seperti:

$$\{U \in \mathcal{P}o(X) : U \subset G\} = [.,G].$$

adalah suatu basis untuk suatu topologi

Definisi 2.9:

Topologi *yang lebih tinggi (upper topologi)* pada $\mathcal{P}o(X)$ adalah yang dihasilkan oleh basis $\mathcal{U}$ dimana:

$\mathcal{U} = \{[.,G]: G \in \mathcal{T}\}$

Topologi ini ditunjukkan oleh $\mathcal{T}u$

Diperhatikan bahwa komplemen dari $[.,G]$ diberikan oleh:

$\mathcal{P}o(X)\backslash[.,G] = \{V \in \mathcal{P}o(X) : V \cap (X\backslash G) \neq \emptyset\}$

Sehingga suatu himpunan tertutup yang dasar adalah dari bentuk $\{V \in \mathcal{P}o(X) : V \cap F \neq \emptyset\}$ dimana F tertutup (closed) dalam X. Oleh analogi dengan formula-formula ini, maka topologi yang lebih rendah pada $\mathcal{P}o(X)$ adalah topologi yang himpunan-himpunan tertutupnya dihasilkan oleh kumpulan-kumpulan:

$$\{V \in \mathcal{P}o(X) : V \subset F\} = [\cdot, F]$$

dan yang mempunyai himpunan-himpunan terbuka yang dihasilkan oleh kumpulan-kumpulan:

$$\{U \in \mathcal{P}o(X) : U \cap G \neq \emptyset\}$$

Keluarga yang terakhir ini adalah tidak tertutup di bawah interseksi-interseksi terbatas (finite) sehingga ini harus membentuk suatu subbasis. Secara lebih formal kita berikan :

$$I_G = \{U \in \mathcal{P}o(X) : U \cap G \neq \emptyset\}$$

dan diberikan :

$$\mathcal{L} = \{I_G : G \in \mathcal{T}\}$$

Definisi 2.10:

Topologi yang *lebih rendah* *(lower Topologi)* pada $\mathcal{P}o(X)$ adalah yang dihasilkan oleh subbasis $\mathcal{L}$. Topologi ini ditunjukkan oleh $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$

Penandaan dimana topologi adalah "upper" dan "lower" bersifat berubah-ubah. Istilah tersebut tepat karena sebuah "korespondensi semi kontinu yang lebih tinggi" (upper semicontinuous correspondence) akan kontinu pada upper topologi, dan sama halnya dengan "lower".

Definisi 2.11:

Topologi Vietoris $\mathcal{T}_v$ pada $\mathcal{P}_0(X)$ adalah yang dihasilkan oleh $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{L}$ secara bersama-sama.

Suatu karakterisisasi alternatif dari $\mathcal{T}_v$ yang sering digunakan adalah sebagai berikut:

Diberikan G_1, G_2, G_3, ...,G_n menjadi suatu kumpulan terbatas dari open set-open set dan diberikan:

$$\mathcal{B}(G_1,G_2....G_n)=\{U \in \mathcal{P}_0(X):\mathcal{U} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i \text{ dan } \mathcal{U} \cap G_i\neq\emptyset \};$$

maka keluarga dari semua kumpulan-kumpulan seperti $\mathcal{B}$ $(G_1, G_2,.... G_n)$ merupakan suatu subbasis untuk $\mathcal{T}_v$.

Definisi 2.12:

Suatu himpunan $F \subseteq X$ disebut closed (tertutup) bila dapat ditentukan open set G sedemikian hingga $F = G^c$

Pengertian-pengertian intuisi dibalik Upper topologi dan lower topologi pada $\mathcal{P}_0(X)$ adalah bahwa, bila diberikan suatu elemen A dalam $\mathcal{P}_0(X)$, maka suatu neighbourhood (sekitar) dasar dari A dalam $\mathcal{T}_u$ terdiri dari himpunan-himpunan B yang tidak jauh lebih besar dari pada A. Demikian juga lower topologi adalah bahwa suatu neighbourhood dasar dari A dalam $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ yang terdiri dari himpunan-himpunan C yang tidak jauh lebih kecil dari A.

Dalam hal bila $(X, \mathcal{T})$ adalah suatu ruang metrik ada, seperti pertama diamati Hausdorff, suatu cara yang berbeda untuk mencapai hal ini.

Ketiga topologi $\mathcal{T}u$, $\mathcal{T}\mathcal{L}$, $\mathcal{T}v$, sudah didefinisikan pada $\mathcal{P}_o(X)$. Sering lebih baik untuk membatasi topologi-topologi ini dalam berbagai himpunan bagian. Secara khusus kita menganggap:

$\mathcal{F}_o(X) = \{F \in \mathcal{P}_o(X) : F \text{ closed}\}$

$\mathcal{K}_o(X) = \{K \in \mathcal{P}_o(X) : K \text{ Compact}\}$

Topologi-topologi relatif pada himpunan-himpunan bagian ini masih akan ditunjukkan oleh $\mathcal{T}u$, $\mathcal{T}\mathcal{L}$, $\mathcal{T}v$.