BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Ekspektasi

Definisi 2.1

Ekspektasi x yang dinotasikan E [x] adalah nilai harapan suatu perubah acak x dengan distribusi peluang f (x).

$$E\,[x] = \sum_{x} x\, f(x) \text{ untuk } x \text{ diskrit}$$

$$E\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) \text{ untuk } x \text{ kontinu}$$

Definisi 2.2

Jika x adalah perubah acak kontinu dan f(x) adalah harga dari density probabilitasnya di x, ekspektasi dari perubah acak g(x) adalah

$$E\,[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

Jika x perubah acak dan f(x) adalah harga distribusi probabilitasnya, ekspektasi dari perubah acak g(x) adalah :

$$E[g(x)] = \sum_{x} g(x)\, f(x)$$

Definisi 2.3

Misal x,y perubah acak diskrit dengan distribusi peluang gabungan f(x,y). Ekspektasi dari perubah acak g(x,y) adalah

$$E\,[g(x,y)] = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)\ f(x,y)$$

Misalnya x,y perubah acak kontinu dan f(x,y) harga dan probabilitas density gabungan di (x,y), ekspektasi dari perubah acak g(x,y)

$$E\,[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\ f(x,y)\ dxdy$$

Teorema 2.1

Jika a dan b konstan maka

$E\,[ax + b] = aE\,[x] + b$

bukti :

$$E\,[ax + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\ f(x)\ dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$$

$$= aE\,[x] + b$$

Teorema 2.2

Jika c_1, c_2 ... dan c_n adalah konstanta-konstanta.

maka

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\, g_i\,(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i\, E\left[g_i(x)\right]$$

bukti :

$$\text{dengan } g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, g_i\,(x)$$

$$E\,[\sum_{i=1}^{n} c_i\, g_i\,(x)\,] = \sum_{x}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\, g_i(x)\right] f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{x} c_i\, g_i(x)\, f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ci \sum_{x} gi(x)\, f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\, E\,[\,g_i(x)]$$

Pada skripsi ini pembahasan dibatasi sampai ekspektasi dengan 2 perubah.

2.2 Optimasi dengan Differensial

Untuk menentukan harga optimal langkah pertama adalah menentukan titik ekstrim. Syarat utama titik ekstrim suatu fungsi $f(x)$ adalah :

$$f'(x) = 0$$

bila

$f''(x) > 0$, maka titik tersebut adalah titik minimal

$f''(x) < 0$, maka titik tersebut adalah titik maksimal

Apabila x_0 adalah titik dengan nilai y paling tinggi/rendah dari seluruh nilai fungsi yang ada, maka x_0 adalah absolut maksimal/absolut minimal. Sedangkan x_1 titik dengan nilai fungsi y terbesar dibanding nilai x yang lain sekitarnya, dalam batas.

$$a < x < b,\ f(x_1 - \Delta x) < f(x) < f(x_1 + \Delta x)$$

maka x_1 disebut relatif maksimal

Pembahasan dibatasi sampai fungsi dengan 1 perubah.

2.3 Fungsi Generator

Definisi 2.4

Misalkan suatu barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dengan perubah s, dapat didefinisikan suatu fungsi

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

Jika deret pangkat ini konvergen dalam interval $-s_0<s<s_0$ maka A(s) disebut fungsi generator untuk barisan a_0, a_1,...

Misalkan x perubah acak yang > 0 dan

$$P_r\ \{x = k\} = P_k \qquad k = 0,1,2\ ... \quad \sum_k P_k = 1$$

bila a_k di atas diganti probabilitas p_k, k 0,1,2, ... maka P(s) adalah fungsi probabilitas generator dari perubah acak x untuk barisan probabilitas p_k, dimana

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_r\ \{x = k\}\ s^k = E\left[s^k\right]$$

Teorema 2.3

Misalkan x perubah acak dengan $P_r\ \{x_1=k\} = p_k$ dan fungsi probabilitas generator (f.p.g)

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad \text{untuk } i = 1,2, ...$$

misalkan

$$S_N = X_1 + ... + X_N$$

dengan N adalah perubah acak bebas dari X_1 s, andaikan distribusi dari N adalah $P_r\{N = n\} = g_n$, f p.g dari N adalah :

$$G(s) = \Sigma\ g_n s^n$$

maka f.p.g H(s) dapat ditulis G(P(s))

$$H(s) = \sum_j P_r\{S_N = j\}\ s^j = G(P(s))$$

bukti

N suatu perubah acak, dapat diambil 0,1,2, ... Kejadian $S_n = j$ terjadi secara demikian $N = n$ dan $S_N = X_1 + .. + X_n = j$ untuk $n = 1,2,3$ ... bila $N = 0$ maka $X_o = S_o = 0$ sehingga

$$X_o + X_1 + \ldots X_n + S_n,\ n \geq 0$$

didapat

$$h_j \sum_{n=0}^{\infty} P_r \left\{ S_N = j \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_r \left\{ N = n \text{ dan } S_n = j \right\}$$

karena N tidak bergantung dengan x_i s juga S_n

$$h_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_r \left\{ N = n \right\} P_r \left\{ S_n = j \right\}$$

$$hj = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\ P_r \left\{ S_n = j \right\}$$

f.p.g dari $S_N = X_1 + \ldots X_N$ diperoleh dari

$$H(s) = \sum_j h_j s^j = \sum_j P_r \left\{ S_N = j \right\} s^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n P_r \{ S_n = j \} \right) s^j$$

$$= \sum_{n=j} [\, \sum P_r \{S_n = j\}\, s^j]\, g_n$$

$$= \sum g_n \,[\, P(s)]^n = G\,(P(s))$$

Definisi 2.5

Fungsi Probabilitas Generator Bivariat

Fungsi probabilitas generator dari 2 perubah acak x,y dengan distribusi fungsi p_{jk} didefinisikan dengan

$$P\,(s_1,s_2) = \sum_{j,k} p_{jk}\, s_1^{\,j} s_2^{\,k}$$

dengan s_1, s_2 perubah riil positip.

Lemma 2.1

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

dengan

$$A(1) = 1 \qquad\qquad c_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$$

maka

$$C(x) = [1 - xA(x)]/(1-x)$$

bukti

akan dibuktikan $C(x)(1-x) = (1-xA(x))$

ruas kiri

$$C(x)(1-x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^n$$

$$= (1-x)(x^0(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4 \dots) + x^1 (a_1+a_2+a_3 \dots)+$$

$$x^2(a_2+a_3+a_4 \dots) + x^3(a_3+a_4 \dots)$$

$$= x^0 (a_0+a_1+a_2+a_3 \dots) + x (a_1+a_2+a_3 \dots) +$$

$$x^2 (a_2+a_3+a_4 \dots) + x^3 (a_3+a_4 \dots) -$$

$$x^1 (a +a_0+a_1+a_2 \dots_3) - x^2(a +a_1+a_2+a_3 \dots)-$$

$$x^3 (a_2+a_3+a_4 \dots) - x^4 (a_3+a_4+ \dots)$$

$$= x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_0 x - a_1 x^2 - a_2 x^3 - \dots$$

diketahui

$$A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$$

sehingga ruas kiri menjadi

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= 1 - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 - x A(x)$$

Lemma 2.2

Jika $A(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r$ $B(x) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r$ $b_j = \sum_{s=1}^{j} a_s$

maka $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

bukti

$$B(x) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_s x^r$$

$$= xa_1 + x^2 (a_1 + a_2) + x^3 (a_1 + a_2 + a_3) + \ldots$$

$B(x)(1-x) =$

$$= xa_1 + x^2(a_1 + a_2) + x^3(a_1 + a_2 + a_3) \ldots -$$

$$x^2 a_1 - x^3(a_1 + a_2) - x^4(a_1 + a_2 + a_3) \ldots$$

$$= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r = A(x)$$

Perkalian 2 Deret Pangkat

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r b_{N-r}\right) x^N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$?

Penjabarannya sebagai berikut :

Ruas kanan

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r b_{N-r} \right) x^N = \sum_{N=1}^{\infty} (a_1 b_{N-1} + a_2 b_{N-2} + \ldots) x^N$$

$$b_{N-r} = 0 \text{ untuk } r \geq N$$

$$= a_1 (b_1 x^2 + b_2 x^3 + \ldots) + a_2 (b_1 x^3 + b_2 x^4 \ldots) + .$$

$$= a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \ldots + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + \ldots$$

$$= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r)(b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_r x^r)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \sum_{r=1} b_r x^r$$

Penulis membatasi pembahasan pada fungsi dengan 2 perubah.

2.4 Fungsi Density, Fungsi Distribusi Komulatif, Distribusi Eksponensial, Distribusi Poisson, Distribusi Seragam, Distribusi Geometris

Definisi 2.6

Fungsi dengan domain R dan kodomain [0,1] didefinisikan sebagai fungsi density diskrit jika untuk himpunan countable $x_1, x_2, \ldots, x_j$ memenuhi:

i $f(x_j) > 0$ untuk $j = 0,1,2,3...$

ii $f(x) = 0$ untuk $x = x_j$

iii $\Sigma f(x_j) = 1$

Setiap fungsi dengan domain R dan kodomain $[0,\sim]$ didefinisikan sebagai fungsi density probabilitas jika

i $f(x) = 0$

ii $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\,dx = 1$

Definisi 2.7

Fungsi distribusi komulatif dari perubah acak X di notasikan dengan $F_X(.)$ didefinisikan sebagai fungsi dengan domain garis riel dan kodomain [0.1] yang memenuhi:

$$F_X(x) = P\,[X \le x] = P\,[(\omega : X(\omega) \le x)]$$

$$F_X(x) = \int_{-\sim}^{x} f_X(u)du$$

untuk setiap bilangan riel x

Definisi 2.8

Distribusi eksponensial adalah distribusi dengan bentuk:

$$f_X(x.\lambda) = \lambda\ e^{-\lambda x}{}_{(0,\sim)}(x) \quad \text{dengan } \lambda > 0$$

$$E[X] = 1/\lambda$$

Definisi 2.9

Distribusi Poisson adalah distribusi dengan bentuk:

$$f_X(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x\ !}\ I_{(0,1,2,...,n)}(x)$$

$$E[X] = \lambda$$

Definisi 2.10

Distribusi seragam adalah distribusi dengan bentuk:

$$f(x;N) = \frac{1}{N}\ I_{(1,2,...N)}(x) \qquad N \text{ parameter} > 0$$

untuk distribusi diskrit

$$f_X(x;a,b) = \frac{1}{b-a}\ I_{[a,b]}(x)$$

untuk distribusi kontinu

$$E[X] = \frac{N+1}{2} \qquad \text{untuk distribusi diskrit}$$

$$E[X] = \frac{b+a}{2} \qquad \text{untuk distribusi kontinu}$$

Definisi 2.11

Distribusi Geometris adalah distribusi dengan bentuk:

$$f_X(x,h) = h(1-h)^{x} I_{(0,1,2,...,n)}(x)$$

$$E[X] = \frac{1-h}{h}$$