BAB II

T E O R I

2.1. Matriks

2.1.1. Pengertian

Menurut D. Suryadi, matriks didefinisikan sebagai berikut :

> Matriks adalah himpunan skala dasar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun / disejajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matriks.
Untuk batasnya kita berikan :

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{Vmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{Vmatrix}$$

Notasi matriks

Matriks diberi nama dengan huruf besar A, B, P, C, dan lain-lain. Secara lengkap ditulis matriks $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} di mana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.

Contoh :

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & & & & & & \\
A = & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 6 & 10 \\ \frac{1}{3} & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris } 1 \\ \rightarrow \text{baris } 2 \\ \rightarrow \text{baris } 3 \\ \rightarrow \text{baris } 4 \end{array} \\
 & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} &
\end{array}
$$

kolom 1 2 3 4

Matriks A berukuran 4 x 4.

Secara Umum :

Pandang sebuah matriks $A = (a_{ij})$, $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ yang mana berarti bahwa banyaknya baris = m serta banyaknya kolom = n.

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Boleh pula ditulis matriks $A_{(mxn)} = (a_{ij})$. (mxn) disebut ukuran (ordo) dari matriks.

2.1.2. Operasi Pada Matriks

a. *Penjumlahan matriks*

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, matriks berukuran sama, maka A + B adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j. Atau $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Hal ini berlaku untuk matriks berukuran sama.

b. *Perkalian skalar terhadap matriks*

Kalau λ suatu skalar (bilangan) dan $A = (a_{ij})$ maka matriks λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan λ.

Beberapa hukum pada penjumlahan dan perkalian skalar :

Kalau A, B, C matriks berukuran sama, dan λ skalar maka :

1. $A + B = B + A$ (komutatif)
2. $(A+B) + C = A + (B+C)$ (asosiatif)
3. $\lambda\ (A+B) = \lambda A + \lambda B$ (distributif)
4. Selalu ada matriks D sedemikian sehingga $A + D = B$

c. *Perkalian Matriks*

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian : $AB \neq BA$. Pada perkalian matriks AB, matriks A kita sebut matriks pertama dan B matriks kedua.

Syarat Perkalian Matriks :

Jumlah banyaknya kolom matriks pertama = jumlah banyaknya baris matriks kedua.

Menurut D. Suryadi, perkalian matriks didefinisikan sebagai berikut :

$A = (a_{ij})$ berukuran (mxn) dan $B = (b_{ij})$ berukuran (nxp), maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berukuran (mxp) di mana :

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

Untuk setiap $i = 1,2, \ldots ,m$ dan $j = 1,2,\ldots,p$.

Beberapa hukum pada perkalian matriks :

Jika A, B, C matriks-matriks yang memenuhi syarat-syarat perkalian matriks yang diperlukan, maka :

1. $A\,(B+C) = AB + AC$, $(B+C)\,A = BA + CA$ memenuhi hukum distributif.
2. $A\,(BC) = (AB)\,C$, memenuhi hukum asosiatif.
3. Perkalian tidak komutatif, $AB \neq BA$.
4. Jika $AB = O$ (matriks nol) yaitu matriks yang semua elemennya = 0, kemungkinan-kemungkinannya :
   - i. $A = O$ dan $B = O$.
   - ii. $A = O$ atau $B = O$.
   - iii. $A \neq O$ dan $B \neq O$.
5. Bila $AB = AC$ belum tentu $B = C$

2.1.3. Definisi Matriks Bujur Sangkar

Menurut D. Suryadi, matriks A disebut matriks bujur sangkar bila dan hanya bila banyaknya baris = banyaknya kolom, dan untuk semua a_{ij} di mana $i = j$ disebut diagonal utama dari matriks bujur sangkar A tersebut.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 8 & 4 \\ 5 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks bujur sangkar berukuran 4 x 4

2.1.4. Akar Karakteristik (Eigen Value) dan Vektor Karakteristik (Eigen Vector)

Definisi :

A suatu matriks bujur sangkar, λ skalar yang memenuhi persamaan :

$$A\ v = \lambda\ v \quad \text{......} \ (2.1.4.1)$$

untuk suatu vektor kolom $v \neq 0$, maka dikatakan λ adalah suatu akar karakteristik dari A, dan v yang memenuhi persamaan (2.1.4.1) itu disebut vektor karakteristik yang bersangkutan dengan λ.

Contoh :

Hitunglah akar karakteristik dari matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Misalkan λ skalar dari matriks :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

vektor yang memenuhi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots(2.1.4.2)$$

suatu susunan persamaan linier homogen, kita inginkan jawab nontrivial $v \neq 0$.

Jadi rank

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix} < 2$$

Catatan :

Rank dari matriks menyatakan jumlah maksimum vektor-vektor baris / kolom yang bebas linier.

atau determinan

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots(\ 2.1.4.3.\ )$$

persamaan 2.1.4.3. disebut persamaan karakteristik.

atau $(\ 1-\lambda\ )(\ 2-\lambda\ ) - 6 = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -1$$

untuk mencari vektor karakteristik yang bersangkutan, kita masukkan harga λ ke (2.1.4.2).

Untuk $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau $-3v_1 + 2v_2 = 0$

$$3v_1 - 2v_2 = 0$$

Karena rank-nya < 2, maka cukup diambil 1 persamaan,

misal : $-3v_1 + 2v_2=0$, pilih (2 - 1) = 1 parameter.

Misalnya : $v_1 = 2\mu$

maka $v_2 = 3\mu$

Jadi

$$v = \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan dengan $\lambda_1 = 4$

Untuk $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 3 & 2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau $2v_1 + 2v_2 = 0$

$3v_1 + 3v_2 = 0$

cukup diambil 1 persamaan, yaitu : $2v_1 + 2v_2 = 0$,

pilih (2 - 1) = 1 parameter.

Misalnya : $v_1 = \mu$

maka $v_2 = -\mu$

Jadi

$$v = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor karakteristik yang bersangkutan dengan $\lambda_2 = -1$

2.1.5. Matriks Reciprocal

Menurut Sri Mulyono, definisi matriks reciprocal adalah sebagai berikut :

> Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan bersifat reciprocal jika $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ untuk $i \neq j$ di mana $a_{ij} \neq 0$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 5 & \frac{1}{6} & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Power Method

Selain menggunakan cara tersebut di atas, dalam mencari akar karakteristik dan vektor karakteristik dapat menggunakan ' *POWER METHOD* '.

Menurut John H. Mathews, dimisalkan λ merupakan akar karakteristik dari matriks M dan harganya lebih besar dari pada akar karakteristik lainnya, dan terdapat satu-satunya vektor karakteristik V yang bersesuaian dengan λ, vektor karakteristik V ini dan akar karakteristik λ dapat dicari dengan cara iterasi.

Dimulai dengan vektor :

$$V_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buat urutan $\{V_n\}$ secara rekursif, dengan menggunakan

$$U_n = M\ V_n$$

dan

$$V_{n+1} = C_{n+1}^{-1}\ U_n$$

di mana C_{n+1} merupakan elemen U_n yang terbesar.

Jika dilakukan iterasi berkali-kali nilainya akan konvergen, sehingga

$$\lim_{n \to \infty} V_n = V$$

dan

$$\lim_{n \to \infty} C_n = \lambda$$

Contoh :

Hitung vektor karakteristik dan akar karakteristik dari matriks :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan power method.

Penyelesaian :

ambil matriks

$$V^{<o>} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

n = 0 ... 5

Untuk mencari C_n(elemen terbesar U_n) gunakan fungsi

max (M x $V^{<n>}$)

$$V^{<n+1>} = \frac{M \times V^{<n>}}{\max \left[M \times V^{<n>} \right]}$$

$$M \times V^{<o>} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

didapat :

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

harga maksimum dari matriks B adalah 5, agar diperoleh harga yang konvergen maka matriks B dibagi 5 sehingga didapat :

$$V^{<1>} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kemudian matriks :

$$M \times V^{<1>} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,8 \end{bmatrix}$$

didapat :

$$C = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,8 \end{bmatrix}$$

harga maksimum dari matriks C adalah 3,8 maka matriks C dibagi 3,8 sehingga didapat :

$$V^{<2>} = \begin{bmatrix} 0,68 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks :

$$M \times V^{<2>} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,68 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,68 \\ 4,04 \end{bmatrix}$$

didapat :

$$D = \begin{bmatrix} 2,68 \\ 4,04 \end{bmatrix}$$

harga maksimum dari matriks D adalah 4,04 maka matriks D dibagi 4,04 sehingga didapat:

$$V^{<3>} = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks :

$$M \times V^{<3>} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,66 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,66 \\ 3,98 \end{bmatrix}$$

didapat :

$$E = \begin{bmatrix} 2,66 \\ 3,98 \end{bmatrix}$$

harga maksimum dari matriks E adalah 3,98 maka matriks E dibagi 3,98 sehingga didapat :

$$V^{<4>} = \begin{bmatrix} 0,67 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kemudian matriks :

$$M \times V^{<4>} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,67 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 4,01 \end{bmatrix}$$

didapat :

$$F = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 4,01 \end{bmatrix}$$

harga maksimum dari matriks F adalah 4,01 maka matriks F dibagi 4,01 sehingga didapat :

$$V^{<5>} = \begin{bmatrix} 0,67 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka vektor karakteristik dari matriks :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ adalah } \begin{bmatrix} 0,67 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{<n+1>} = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,68 & 0,66 & 0,67 & 0,67 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Max} \left[M \times V^{<n>} \right] = 4,01$$

Nilai Max $\left[M \times V^{<n>} \right]$ tersebut adalah akar karakteristik dari matriks M.

Normal dari vektor karakterisik matriks M adalah :

$$\frac{V^{<5>}}{\Sigma V^{<5>}} = \begin{bmatrix} 0,401 \\ 0,599 \end{bmatrix}$$

di mana nilai dari $\Sigma V^{<5>}$ adalah 1,67

2.3. Multiple Criteria

2.3.1. Pengertian

Multiple criteria adalah suatu metoda dengan proses yang kompleks karena banyaknya faktor yang mempengaruhi, sehingga pemilihan-pemilihan alternatif sangat dipengaruhi oleh bobot faktor. Bobot faktor dalam multiple criteria sangat berperan sekali untuk menentukan tingkat kepentingan dari faktor tersebut.

Penentuan alternatif diperhitungkan berdasarkan hasil survei yang terpisah, sehingga di dalam mencari hubungan optimal bisa dilakukan dengan membuat pilihan optimal dari alternatif yang ada.

Dalam multiple criteria ada dua cara untuk menentukan bobot faktor. Yang pertama adalah untuk faktor-faktor yang dapat dihitung dan yang kedua untuk faktor-faktor yang tidak dapat dihitung.

2.3.2. Bobot Untuk Faktor Yang Dapat Dihitung.

Untuk faktor-faktor yang dapat dihitung, nilai yang mempengaruhi faktor-faktor tersebut diubah menjadi satu skala yang bernilai mulai dari 0 sampai 1, dengan menggunakan prosedur sebagai berikut.
Nilai-nilai dari faktor yang dapat dihitung diproporsikan dengan total per faktor dengan dua cara, yaitu :

1. Untuk faktor dengan nilai terbesar yang menguntungkan, maka proporsi digunakan tanda positif seperti pada persamaan (2.3.1.)

$$X_{i\,>} = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \quad \ldots\ldots \; (\; 2.3.1. \;)$$

di mana $i = 1,2,\ldots,n$

$j = 1,2,\ldots,n$

2. Sedangkan untuk faktor dengan nilai terkecil yang menguntungkan, maka proporsi digunakan tanda negatif seperti pada persamaan (2.3.2.)

$$X_{i<} = \frac{-x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \quad \ldots\ldots \ (2.3.2.)$$

di mana $i = 1,2,\ldots,n$

$j = 1,2,\ldots,n$

Contoh :

Alternatif	Faktor I (F1)
A	100
B	50
C	25

Normalisasi sebagai berikut :

Alternatif	Equivalent Value	Equivalent Value
A	0,571	-0,571
B	0,286	-0,286
C	0,143	-0,143

Jika menggunakan rumus 2.3.1., maka alternatif yang menguntungkan adalah alternatif A dengan nilai 0,571. Tetapi jika menggunakan rumus 2.3.2., maka alternatif yang menguntungkan adalah alternatif C dengan nilai -0,143.

2.3.3. Bobot Untuk Faktor Yang Tidak Dapat Dihitung.

Untuk faktor-faktor yang tidak dapat dihitung, ada dua langkah yang dilakukan sebelum menentukan pilihan optimal, yaitu :

1. Langkah pertama adalah membuat penilaian tentang kepentingan relatif dua faktor pada suatu tingkat tertentu dalam kaitannya dengan tingkat di atasnya. Hasil dari penilaian ini akan disajikan dalam bentuk matriks pasangan perbandingan (pairwise comparison matrices). Dalam penyusunan skala kepentingan akan timbul pertanyaan :
   - faktor mana yang lebih (penting / disukai / mungkin / ...) ?
   - berapa kali lebih (penting / disukai / mungkin / ...) ?

   Agar diperoleh skala yang bermanfaat ketika membandingkan dua faktor, responden yang akan memberikan jawaban perlu pengertian menyeluruh tentang faktor-faktor yang dibandingkan dan relevansinya terhadap faktor atau tujuan yang dipelajari. Dalam penyusunan skala kepentingan ini, digunakan patokan tabel berikut :

TABEL 2.2.1. : SKALA DASAR

Tingkat Kepentingan	Definisi
1	sama pentingnya diban - ding yang lain
3	moderat pentingnya di - banding yang lain
5	kuat pentingnya diban - ding yang lain
7	sangat kuat pentingnya dibanding yang lain
9	ekstrim pentingnya di - banding yang lain
2,4,6,8	nilai diantara dua pe - nilaian yang berdekatan

Sumber : Thomas L.Saaty, The Analytical Hierarchy Process

Dalam penilaian kepentingan relatif dua faktor berlaku aksioma reciprocal, artinya jika faktor i dinilai 5 kali lebih penting dibanding j, maka faktor j harus sama dengan $\frac{1}{5}$ kali pentingnya dibanding faktor i. Disamping itu, perbandingan dua faktor yang sama akan menghasilkan angka 1, artinya sama penting. Dua faktor yang berlainan dapat saja dinilai sama penting. Jika terdapat n faktor, maka akan diperoleh matriks pasangan perbandingan berukuran n x n.

Banyaknya penilaian yang diperlukan dalam menyusun matriks ini adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ karena matriksnya reciprocal dan faktor-faktor diagonalnya sama dengan 1.

Dari setiap matriks pasangan perbandingan tersebut dihitung vektor karakteristiknya. Vektor karakteristik tersebut digunakan sebagai dasar untuk mencari nilai bobot faktor.

2. Langkah kedua adalah mencari bobot responden. Dalam mencari bobot responden, tahap pertama adalah membuat matriks urutan kepentingan antar faktor. Dari matriks urutan kepentingan antar faktor tersebut kemudian diubah menjadi matriks nilai kepentingan. Misal ada 12 faktor yang mempengaruhi dalam mencari optimalitas suatu masalah, maka faktor urutan pertama diberi nilai 12 (nilai yang paling maksimal), urutan kedua diberi nilai 11, dan seterusnya. Setelah didapat matriks nilai kepentingan, kemudian dicari bobot masing-masing faktor dengan rata-rata geometrik :

$$g_j = \sqrt[n]{X_1 . X_2 . \ldots X_n} \quad ..(2.3.3.1.)$$

Keterangan :

n = banyaknya responden dalam sebuah instansi

m = banyaknya faktor yang mempengaruhi.

X_i = nilai kepentingan faktor untuk responden ke i.

g_j = bobot faktor ke j

untuk :

$i = 1, 2, \ldots, n$

$j = 1, 2, \ldots, m$

Setelah bobot masing-masing faktor diperoleh kemudian dicari vektor karakteristik untuk mendapatkan bobot responden.

Cara mencari vektor karakteristik di dalam multiple criteria seperti disebutkan di bawah ini.

Diketahui faktor-faktor dari suatu tingkat dalam suatu rangking adalah C_1, C_2, C_3, ... , C_n dan bobot pengaruh mereka adalah b_1, b_2, b_3, ..., b_n.

Misalkan $a_{ij} = \frac{b_i}{b_j}$ menunjukkan kekuatan C_i jika dibandingkan dengan C_j. Matriks dari angka-angka a_{ij} ini dinamakan matriks pasangan perbandingan, yang diberi simbol A. Telah disebutkan bahwa A adalah matris reciprocal, sehingga $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$.

Harga a_{ij} didapat dari penilaian dengan menggunakan skala dasar di mana daerah (range) nya dari 1 sampai 9.

Hasilnya disajikan dalam matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks A tersebut kemudian dicari vektor karakteristiknya dengan menggunakan power method.

Secara matematis digambarkan :

$$a_{ij} = \frac{b_i}{b_j} \qquad \ldots\ldots \text{(2.3.3.2.)}$$

untuk $i, j = 1, 2, \ldots, n$

atau disajikan dalam matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{b_1} & \frac{b_1}{b_2} & \cdots & \frac{b_1}{b_n} \\ \frac{b_2}{b_1} & \frac{b_2}{b_2} & \cdots & \frac{b_2}{b_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{b_n}{b_1} & \frac{b_n}{b_2} & \cdots & \frac{b_n}{b_n} \end{bmatrix}$$

di mana :

$$a_{ij} \left(\frac{b_j}{b_i} \right) = 1 \quad \text{untuk } i,j = 1,2,\ldots,n$$

konsekuensinya :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j \left(\frac{1}{b_i} \right) = n \quad \text{untuk } i = 1,2,\ldots,n$$

atau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j = n\, b_i \qquad \text{untuk } i = 1,2,\ldots,n$$

Dalam bentuk matriks :

$$A\, b = n\, b$$

Rumus ini menunjukkan bahwa b merupakan vektor karakteristik dari matriks A dengan akar karakteristik n. Dari hasil-hasil tersebut di atas (baik untuk faktor-faktor yang dapat dihitung maupun faktor-faktor yang tidak dapat dihitung), digandakan dengan bobot faktor dari setiap kelompok responden. Setelah itu alternatif yang mempunyai bobot nilai yang paling tinggi akan berada di urutan pertama.