BAB II

PENGERTIAN DASAR TENTANG GRAPH

2.1. Beberapa Definisi Dasar Dalam Graph

Definisi 2.1.1 :

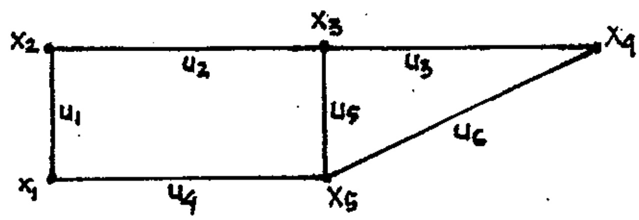
Suatu graph $G=(X,U)$ adalah suatu himpunan tidak kosong yang berhingga dan terdiri dari titik-titik $X=X(G)$ dan garis-garis $U=U(G)$.

Definisi 2.1.2 :

Undirected graph adalah suatu graph dimana himpunan pasangan titik – titiknya $\{x_i,\ldots,x_j\}$ merupakan pasangan tidak berarah, dimana $u = (x_i x_j)$.

Contoh :

Graph berikut ini adalah suatu undirected graph $G = (X,U)$ dengan $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ dan $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$.

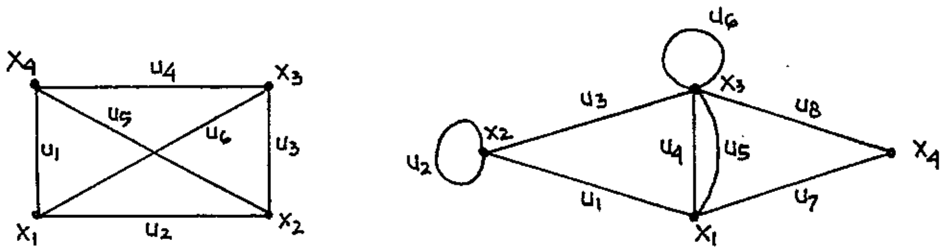


Gb.2.1. Undirected graph $G = (X,U)$

Definisi 2.1.3 :

Suatu graph $G = (X,U)$ yang tidak mengandung garis paralel atau loop disebut simple graph dan disebut multigraph jika mengandung garis paralel atau loop.

Contoh :



Gb.2.2. (a). Simple graph

(b). Multigraph

Definisi 2.1.4 :

Dua buah garis disebut adjacent jika keduanya mempunyai satu titik persekutuan, sedangkan dua buah titik sembarang x_i dan x_j disebut adjacent jika ada garis yang langsung menghubungkan kedua titik tersebut.

Contoh :

Pada gambar 2.2.(b) garis u_3 adjacent dengan garis u_4 pada titik x_3. Titik x_1 adjacent dengan titik x_4 membentuk garis u_7.

Definisi 2.1.5 :

Bila sebuah titik x_i adalah titik ujung dari beberapa garis u_j maka dikatakan x_i incident dengan u_j atau u_j incident dengan x_i. Banyaknya garis yang incident pada titik x_i disebut degree titik x_i, ditulis $d(x_i)$.

Contoh :

Pada gambar 2.2.(b) garis $\{u_3, u_4, u_5, u_6, u_8\}$ incident dengan titik x_3.

$d(x_1)=4$, $d(x_2)=4$, $d(x_3)=6$, $d(x_4)=2$.

Apabila dijumlahkan maka :

$$d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)+d(x_4)=16$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk suatu (p-q) graph yaitu graph yang mempunyai p titik dan q garis, berlaku sifat berikut :

$$\sum_{i=1}^{p} d(x_i) = 2q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1)$$

Teorema 1 :

Banyaknya titik berdegree ganjil dalam suatu graph $G=(X,U)$ selalu merupakan bilangan genap.

Bukti :

Jika kita pecahkan himpunan titik-titik menjadi Q dan Y, masing-masing merupakan titik-titik dengan degree ganjil dan genap , maka persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk :

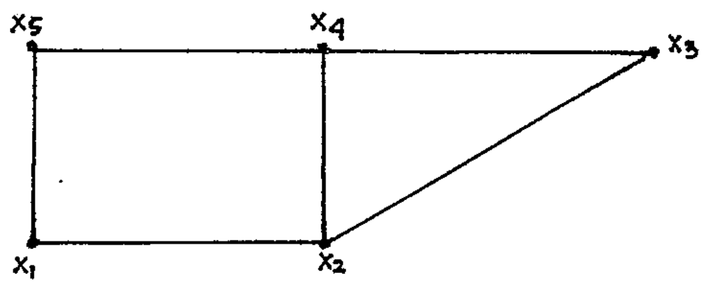
$$\sum_{i=1}^{p} d(x_i) = \sum_{x_j \in Q} d(x_j) + \sum_{x_k \in Y} d(x_k)$$

atau

$$\sum_{x_j \in Q} d(x_j) = \sum_{i=1}^{p} d(x_i) - \sum_{x_k \in Y} d(x_k)$$

Karena selisih dua bilangan genap juga merupakan bilangan genap, berarti ruas kiri persamaan terakhir ini merupakan bilangan genap. Selanjutnya karena setiap $d(x_j)$ adalah bilangan ganjil, maka haruslah banyaknya titik (banyaknya bilangan yang dijumlahkan) genap agar diperoleh jumlah yang hasilnya genap.

Contoh :



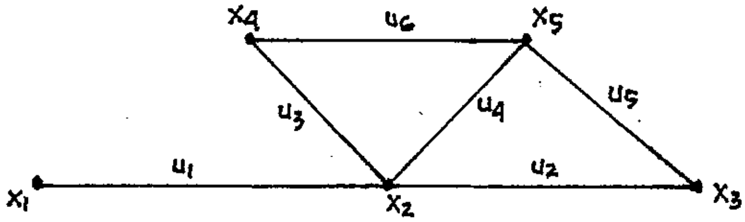
Gb.2.3. Graph dengan dua titik berdegree ganjil.

2.2. Hubungan Dalam Graph

Definisi 2.2.1 :

Suatu lintasan dimana titik maupun garisnya tidak boleh diulang disebut path. Path dengan lintasan tertutup disebut cycle. Sedangkan chain adalah lintasan dengan garis tidak boleh diulang dan titik boleh diulang. Chain dengan lintasan tertutup disebut circuit. Chain dasar adalah chain yang titik-titiknya berbeda.

Contoh :



Gb. 2.4

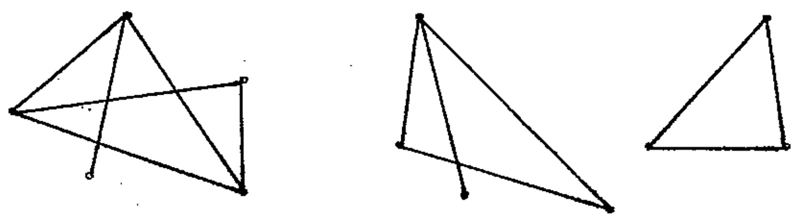
Chain dengan lintasan $\{u_1, u_4, u_6, u_3, u_2\}$ dan titik-titik $\{x_1, x_2, x_5, x_4, x_2, x_3\}$.

Path dengan lintasan $\{u_1, u_2, u_5, u_6\}$ dan titik - titik $\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_4\}$.

Definisi 2.2.2 :

Graph $G=(X,U)$ disebut connected jika setiap dua titik dihubungkan dengan sekurang - kurangnya satu path. Jika tidak disebut disconnected yaitu terdiri dari dua atau lebih connected graph.

Contoh :



(a) (b)

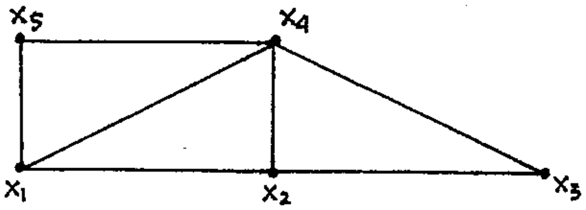
Gb.2.5. (a).Connected graph

(b).Disconnected graph

Definisi 2.2.3 :

Panjang dari lintasan x_i ke x_j dalam graph $G=(X,U)$ adalah jumlah garis yang berada dalam lintasan tersebut. Ditulis $d(x_i,x_j)$.

Contoh :



Gb.2.6

Panjang lintasan $\{x_1, x_4, x_2, x_3\}$ atau $d(x_1, x_3) = 3$

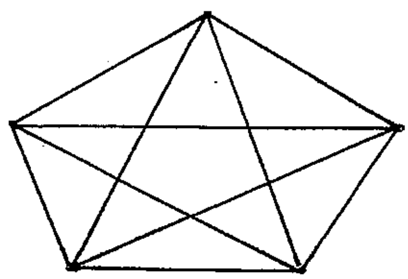
2.3. Jenis graph

Jenis graph dapat diklasifikasikan dalam beberapa jenis tergantung bagaimana cara memandang kekhasan strukturnya. Berikut ini disajikan gambaran sejumlah graph khusus yang sering dijumpai dalam teori aplikasi graph.

Definisi 2.3.1 :

Graph lengkap adalah suatu graph dimana setiap titik adjacent dengan setiap titik lainnya. Graph lengkap dilambangkan dengan $\mathbb{K}(X)$.

Contoh :

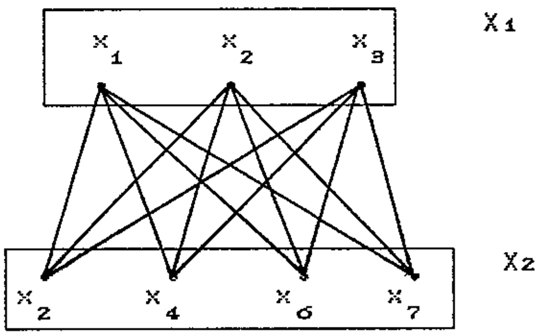


Gb.2.7. Graph lengkap

Definisi 2.3.2 :

Suatu graph $G=(X,U)$ disebut bipartisi graph apabila himpunan titik-titik dari X dapat dipisahkan atas dua himpunan X_1 dan X_2 dengan $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ (X_1 dan X_2 saling asing), sedemikian sehingga jika ada garis-garis u dalam G, maka u pasti menghubungkan titik di X_1 dengan titik di X_2 (dan tidak ada dua titik di X_1 yang adjacent, juga tidak ada dua titik di X_2 yang adjacent).

Contoh : Gb.2.8. Bipartisi graph



Jika X_1 mempunyai m titik dan X_2 mempunyai n titik, maka bipartisi graph lengkap mempunyai (m+n) titik dan (m.n) garis.

Teorema 2 :

$G=(X,U)$ bipartisi graph jika dan hanya jika circuit di dalamnya mempunyai panjang genap.

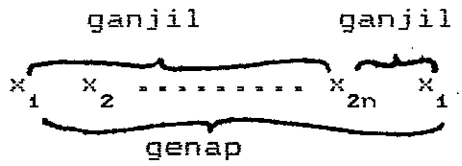
Bukti :

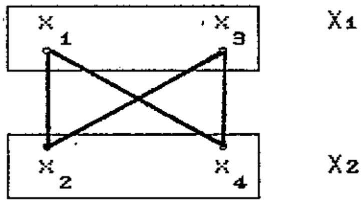
1. G bipartisi graph ==> setiap circuit didalamnya mempunyai panjang genap.

Diambil C = circuit sembarang.

Diambil titik dari C yang berada di X_1, sebut x_1. Semua titik di X_1 mempunyai indeks ganjil dan semua

titik di X_2 mempunyai indeks genap. Maka circuitnya pasti berbentuk $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2n}, x_1\}$ dari sebab dua titik di X_1 pasti tidak adjacent dan dua titik di X_2 pasti tidak adjacent.



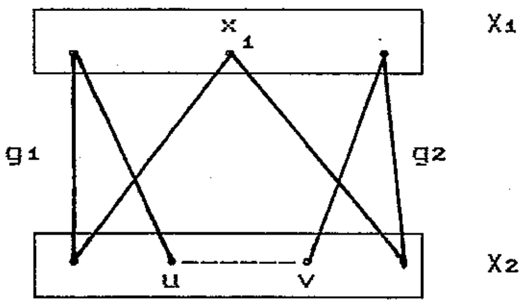


Gb.2.9

Jadi banyaknya garis pada circuit pasti genap. Pada gambar 2.9 circuitnya adalah $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

2. Setiap circuit di dalamnya mempunyai panjang genap ==> G bipartisi graph.

Andaikan ada dua titik u dan v (di X_2) yang adjacent seperti gambar 3.0



Gb.3.0

Ditentukan chain g_1 dari x_1 ke u, juga g_2 dari x_1 ke v. Circuitnya adalah

$$\underbrace{x_1 \ldots\ldots u}_{\text{ganjil}}\,\underbrace{v}_{1}\,\underbrace{\ldots\ldots x_1}_{\text{ganjil}} = \text{ganjil}$$

Karena diketahui circuit ini panjangnya genap, jadi kontradiksi. Pengandaian harus diingkar. Sehingga tidak ada dua titik u dan v di X_2 yang adjacent. Kemudian karena persoalan simetris di X_1 dan X_2, maka di X_1 juga tidak ada dua titik yang adjacent.Maka terbukti G bipartisi graph.

2.4. Algoritma Mendapatkan Chain Terpendek

Diberikan suatu graph G=(X,U), jika u=(xy) garis yang menghubungkan titik x dan y dimana $u \in U$ maka w(xy) adalah besaran dari u = (xy).

Definisi 2.4.1 :

Masalah chain terpendek antara dua titik x dan y adalah mendapatkan chain L(xy) dari x ke y dengan jumlah besaran total :

$$w(L) = \sum_{(xy) \in L(xy)} w(xy)$$

adalah minimum, dimana $w(xy) \geq 0$.

Algoritma dari Moore dan Dijkstra dapat digunakan untuk menghitung chain terpendek dari suatu titik (misalkan titik 1) ke semua titik lain. Jika diberikan bagian X={1,2,...,N}. Membatasi $\pi^*(x)$ adalah besaran chain terpendek dari titik awal (misalkan 1) ke x, khususnya $\pi^*(1)=0$.

Algoritma menghasilkan N-1 pengulangan. Pada setiap awal pengulangan, titik-titik yang ada dibagi menjadi dua bagian S dan $\bar{S}=X-S$, dengan $1 \in S$. Setiap titik $x \in X$ berlabel $\pi(x)$ dengan sifat :

1. Jika $x \in S$, maka $\pi(x) = \pi^*(x)$
2. Jika $x \in \bar{S}$, maka $\pi(x) = \min\ [\ \pi(k) + w(kx)\ ]$

Algoritma :

Mendapatkan chain terpendek dari titik awal (misal 1) ke titik lain dalam suatu graph dimana besaran didalamnya positip.

a. Start. S = {1}.

   $\bar{S} = \{2,3,4,.....,N\}$, $\pi(1)=0$

   $\pi(x) = w(1x)$ jika $x \in T_1$

   $= \sim$ untuk yang lain

b. Mendapatkan $y \in \bar{S}$ dimana $\pi(y) = \min\limits_{x \in \bar{S}} \pi(x)$

   Bagian $\bar{S} \longrightarrow \bar{S} - \{y\}$

   Jika $|\bar{S}| = 0$ stop, jika tidak ke langkah c.

c. Untuk semua $x \in T_y$ dan $x \in \bar{S}$ bagian :

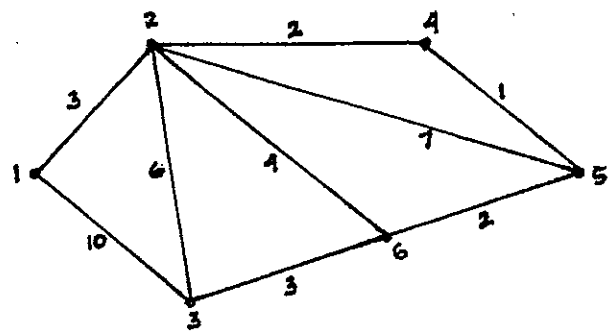
   $\pi(x) \longrightarrow \min\ [\ \pi(x)\ ,\ \pi(y)+w(yx)\ ]$

   Kemudian ke langkah b.

   T_y adalah himpunan bagian titik pada $\bar{S}$ yang adjacent dengan titik y.

Contoh :

Untuk bentuk undirected graph



Gb.3.1

Pengulangan dari algoritma adalah sebagai berikut :

1. Chain terpendek dari titik 1 ke titik lain.

a. S = {1}

$\pi(1)=0$, $\pi(2)=3$, $\pi(3)=10$, $\pi(4)=\pi(5)=\pi(6)=$ ~

b. y=2, S = {1,2}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {3,4,5,6}

$\pi(3)$ = min [10,3+6] = 9

$\pi(4)$ = min [~,3+2] = 5

$\pi(5)$ = min [~,3+7] = 10

$\pi(6)$ = min [~,3+4) = 7

b. y=4, S = {1,2,4}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {5}

$\pi(5)$ = min [10,5+1] = 6

b. y=5, S = {1,2,4,5}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {6}

$\pi(6)$ = min [7,6+2] = 7

b. y=6, S = {1,2,4,5,6}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {3}

$\pi(3) = \min [9,7+3] = 9$

b. y=3, S = {1,2,3,4,5,6}, stop.

2. Chain terpendek dari titik 2 ke titik lain.

a. S = {2}

$\pi(2)=0$, $\pi(1)=3$, $\pi(3)=6$, $\pi(6)=4$, $\pi(5)=7$, $\pi(4)=2$

b. y=4, S = {2,4}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {5}

$\pi(5) = \min [7,2+1] = 3$

b. y=5, S = {2,4,5}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {6}

$\pi(6) = \min [4,3+2] = 4$

b. y=6, S = {2,4,5,6}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {3}

$\pi(3) = \min [6,4+3] = 6$

b. y=3, S ={2,3,4,5,6}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {1}

$\pi(1) = \min [3,6+10] = 3$

b. y=1, S = {1,2,3,4,5,6}

Stop.

3. Chain terpendek dari titik 3 ke titik lain.

a. S = {3}, $\pi(3)=0$

$\pi(1)=10$, $\pi(2)=6$, $\pi(6)=3$, $\pi(4)=\pi(5)=\sim$

b. y=6, S ={3,6}

c. Ty $\cap$ $\bar{S}$ = {2,5}

$\pi(2) = \min [6,3+4] = 6$

$\pi(5) = \min [\sim,3+2] = 5$

b. y=5, S = {3,5,6}

c. Ty $\cap$ $\overline{S}$ = {2,4}

$\pi(2)$ = min [6,5+7] = 6

$\pi(4)$ = min [~,5+1] = 6

b.y=2,4. S = {2,3,4,5,6}

c.Ty $\cap$ $\overline{S}$ = {1}

$\pi(1)$ = min [10,6+3] = 9

b. y=1, S = {1,2,3,4,5,6}

Stop.

4. Chain terpendek dari titik 4 ke titik lain.

a. S = {4}

$\pi(4)=0$, $\pi(2)=2$, $\pi(5)=1$, $\pi(1)=\pi(3)=\pi(6)=$~

b. y=5, S = {4,5}

c. Ty $\cap$ $\overline{S}$ = {2,6}

$\pi(2)$ = min [2,1+7] = 2

$\pi(6)$ = min [~,1+2] = 3

b. y=2, S = {2,4,5}

c. Ty $\cap$ $\overline{S}$ = {1,3,6}

$\pi(1)$ = min [~,2+3] = 5

$\pi(3)$ = min [~,2+6] = 8

$\pi(6)$ = min [3,2+4] = 3

b. y=6, S = {2,4,5,6}

c. Ty $\cap$ $\overline{S}$ = {3}

$\pi(3)$ = min [8,3+3] = 6

b. y=3, S = {2,3,4,5,6}

c. Ty $\cap$ $\overline{S}$ = {1}

$\pi(1)$ = min [5,6+10] = 5

b. y=1, S = {1,2,3,4,5,6}

Stop.

5. Chain terpendek dari titik 5 ke titik lain.

a. $S = \{5\}$

$\pi(5)=0$, $\pi(4)=1$, $\pi(6)=2$, $\pi(1)=\pi(2)=\pi(3)=\sim$

b. $y=4$, $S = \{4,5\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{2\}$

$\pi(2) = \min [\sim,1+2] = 3$

b. $y=2$, $S = \{2,4,5\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{1,3,6\}$

$\pi(1) = \min [\sim,3+3] = 6$

$\pi(3) = \min [\sim,3+6] = 9$

$\pi(6) = \min [2,3+4] = 2$

b. $y=6$, $S = \{2,4,5,6\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{3\}$

$\pi(3) = \min [9,2+3] = 5$

b. $y=3$, $S = \{2,3,4,5,6\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{1\}$

$\pi(1) = \min [6,5+10] = 6$

b. $y=1$, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Stop.

6. Chain terpendek dari titik 6 ke titik lain.

a. $S = \{6\}$

$\pi(6)=0$, $\pi(2)=4$, $\pi(5)=2$, $\pi3)=3$, $\pi(1)=\pi(4)=\sim$

b. $y=5$, $S = \{5,6\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{2,4\}$

$\pi(2) = \min [4,2+7] = 4$

$\pi(4) = \min [\sim,2+1] = 3$

b. $y=4$, $S = \{4,5,6\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{2\}$

$\pi(2) = \min [4,3+2] = 4$

b. $y=2$, $S = \{2,4,5,6\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{1,3\}$

$\pi(1) = \min [\sim,4+3] = 7$

$\pi(3) = \min [3,4+6] = 3$

b. $y=3$, $S = \{2,3,4,5,6\}$

c. $Ty \cap \bar{S} = \{1\}$

$\pi(1) = \min [7,3+10] = 7$

b. $y=1$, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Stop

Dengan pengulangan untuk semua titik diperoleh matrik untuk chain terpendek antara dua titik dalam graph G sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Matrik untuk chain terpendek antara dua titik dalam graph G merupakan matrik simetris.

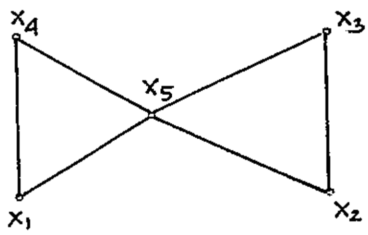
2.5. Chain Dan Circuit Euler

2.5.1. Pengertian Dasar

Definisi 2.5.1 :

Suatu chain atau circuit Euler dalam undirected graph $G=(X,U)$ adalah chain atau circuit yang melalui garis dari G hanya satu kali.

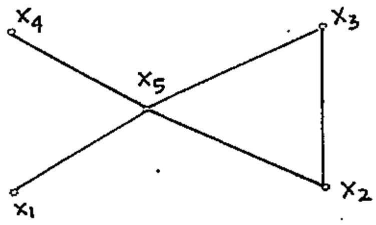
Contoh :



Gb.3.2

Lintasan $\{x_1, x_5, x_3, x_2, x_5, x_4, x_1\}$ adalah circuit Euler.

Lintasan $\{x_1, x_5, x_3, x_2, x_5, x_4\}$ adalah chain Euler.



Gb.3.3

Untuk chain Euler, mempunyai degree genap kecuali dua titik akhir yaitu x_1 dan x_4.

Teorema 3 :

Sebuah undirected connected graph $G=(X,U)$ mempunyai chain Euler jika $d(x)$ adalah genap untuk semua x dalam G, kecuali dua titik akhir s dan f. G mempunyai circuit Euler jika $d(x)$ adalah genap untuk semua x dalam G.

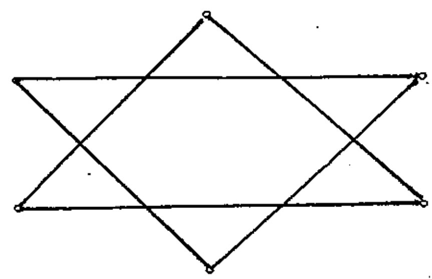
Bukti :

Diambil $G=(X,U)$ suatu graph dengan m garis dimana keadaan dari teorema diperhatikan. Jika G mempunyai dua titik dengan degree ganjil, diambil dua titik ini s dan f (jika semua titik dari G mempunyai degree genap maka s=f).

Diambil L, sebuah chain dengan permulaan s, ada larangan menggunakan garis yang sama dua kali. Jika pada momen yang diberikan sampai pada suatu titik $x \neq f$, maka akan terjadi pengulangan garis sampai diperoleh degree ganjil pada f. Jika semua garis telah dipergunakan, maka L adalah suatu chain Euler. Jika s=f maka L adalah suatu circuit Euler. Sehingga teorema benar untuk graph terhubung dengan sedikitnya m garis.

Graph dengan kondisi di atas disebut Eulerian.

Contoh :



Gb.3.4. Graph Eulerian

2.5.2. Algoritma Mencari Circuit Euler Dari Sebuah Matrik Adjacent Untuk Undirected Graph

Definisi 2.5.2 :

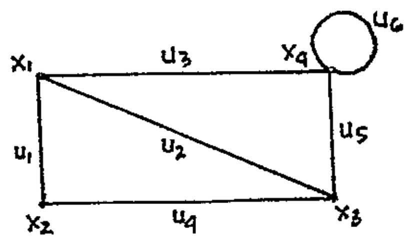
Suatu matrik A disebut matrik adjacent dari graph

$G = (X,U)$ jika :

1. baris dan kolom dari A berkorespondensi dengan titik dari $G = (X,U)$
2. $A_{ij} = 1$ jika garis $(x_i x_j) \in U$

   $= 0$ untuk yang lain.

Contoh :



$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}} \end{array}$$

Gb. 3.6

Algoritma :

Diambil A menjadi matrik adjacent dari graph $G = (X,U)$ tanpa loop.

Langkah 1 :

Jika untuk semua i, $\sum_j A_{ij}$ tidak genap, maka circuit Euler tidak ada. Stop. Jika tidak diambil bagian counter p=0, kemudian ke langkah 2.

Langkah 2 :

Menambah p dengan 1. Mengambil permulaan pada baris k yang tidak nol, untuk mendapatkan circuit mengikuti langkah berikut :

a. Membatasi $n = k$ dan circuit $C_p = C\{x_k \ldots\}$

b. Mendapatkan m sehingga $A_{nm} > 0$

c. Memasukkan titik x_m pada circuit C_p

   Mengurangi A_{mn} dan A_{nm} dengan 1

d. Membatasi n = m. Jika $n \neq k$ ke langkah 2b melengkapi circuit C_p dan jika n = k meneruskan ke langkah 3.

Langkah 3 :

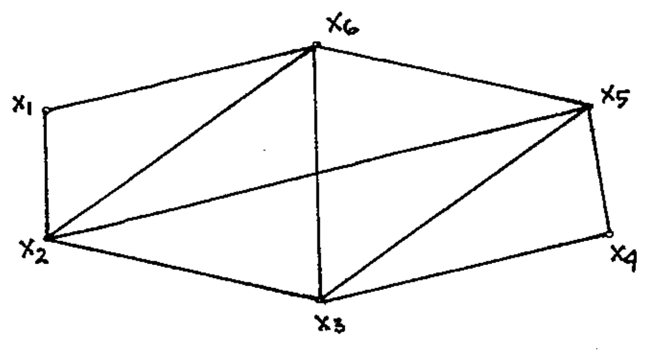
Jika semua elemen dari matrik A tidak nol, kembali ke langkah 2.

Langkah 4 :

Mendapatkan 2 circuit C_i dan C_j dimana mereka mempunyai sekurang-kurangnya satu titik x_k secara bersama-sama. Menghapus x_k dari C_i dan menggantikannya dengan C_j. Kemudian menghapus C_j dari circuit yang ada. Mengulang proses ini sampai ada satu circuit yang ditinggalkan. Sehingga memberikan circuit Euler yang dikehendaki.

Contoh :

Mendapatkan circuit Euler dari graph yang diberikan pada gambar 3.6.



Gb. 3.6

Penyelesaian :

Matrik adjacent A diberikan di bawah ini :

$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Langkah 1 :

Karena $\sum A_{ij}$ untuk semua i adalah genap, circuit Euler ada. Ambil p=0.

Langkah 2 : p=1

a. $n = 2$, $C_1 = C\ \{x_2, \ldots\ \}$

b. $m = 2$

c. $C_1 = C\ \{x_2, x_1, \ldots\ \}$, $A_{21}=0$, $A_{12}=0$

d. n=1, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2 :

b. $m = 6$

c. $C_1 = C\ \{x_2, x_1, x_6, \ldots\ \}$, $A_{16} = 0$, $A_{61} = 0$

d. $n = 6$, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2b :

b. $m = 2$

c. $C_1 = C\ \{x_2, x_1, x_6, x_2\}$, $A_{26} = 0$, $A_{62} = 0$

d. $n = 2$, sehingga $n = k$, terdapat sebuah circuit $C_1 = C\ \{x_2, x_1, x_6, x_2\}$.

Pada point ini matrik A menjadi :

$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Langkah 3 :

Kembali ke langkah 2, karena semua elemen dari A tidak nol.

Langkah 2 : p=2

a. $n = 3$, $C_2 = C\ \{x_3, \ldots.\}$

b. $m = 2$

c. $C_2 = C\ \{x_3, x_2, \ldots\ldots\}$, $A_{23} = 0$, $A_{32} = 0$

d. $n = 2$, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2 :

b. $m = 2$

c. $C_2 = C\ \{x_3, x_2, x_5, \ldots.\}$, $A_{25} = 0$, $A_{52} = 0$

d. $n = 5$, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2 :

b. $m = 3$

c. $C_2 = C\ \{x_3, x_2, x_5, x_3\}$, $A_{35} = 0$, $A_{53} = 0$

d. $n = 3$, sehingga $n = k$, terdapat sebuah circuit

$C_2 = C\ \{x_3, x_2, x_5, x_3\}$

Langkah 3 :

Kembali ke langkah 2, karena semua elemen dari A tidak nol.

$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Langkah 2 : p=3

a. $n = 3$, $C_3 = C\,\{x_3, \ldots\ldots\}$

b. $m = 4$

c. $C_3 = C\,\{x_3, x_4, \ldots\ldots\}$, $A_{34} = 0$, $A_{43} = 0$

$n = 4$, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2 :

b. $m = 5$

c. $C_3 = C\,\{x_3, x_4, x_5, \ldots\ldots\}$, $A_{45} = 0$, $A_{54} = 0$

d. $n = 5$, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2 :

b. $m = 6$

c. $C_3 = C\,\{x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots\}$, $A_{56} = 0$, $A_{65} = 0$

d. $n = 6$, kembali ke langkah 2b.

Langkah 2 :

b. $m = 3$

c. $C_3 = C\,\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_3\}$, $A_{63} = 0$, $A_{36} = 0$

d. $n = 3$, sehingga $n = k$, terdapat sebuah circuit

$C_3 = C\,\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_3\}$.

Langkah 3 :

Matrik A adalah nol. Aplikasi dari algoritma menghasilkan tiga circuit :

a. $C_1 = C\,\{x_2, x_1, x_6, x_2\}$

b. $C_2 = C \{x_3, x_2, x_5, x_3\}$

c. $C_3 = C \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_3\}$

Langkah 4 :

Untuk memperoleh circuit Euler, 3 circuit harus dikombinasikan. Circuit C_3 dan C_2 mempunyai titik x_3 secara bersama. Kombinasi keduanya memberikan $C_3 = C \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_3, x_2, x_5, x_3\}$ dan C_2 dihapus. Selanjutnya circuit C_1 ditambahkan pada C_3 menghasilkan circuit Euler yang dikehendaki :

$C = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_3, x_2, x_1, x_6, x_2, x_5, x_3\}$.