BAB II

TEORI PENUNJANG

II.1 Persamaan Diferensial Linear homogen

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan biasa dari satu perubah tak bebas terhadap satu perubah bebas. Semua bentuk persamaan diferensial yang dibahas dalam skripsi ini merupakan persamaan diferensial biasa.

Persamaan diferensial linear adalah persamaan diferensial yang perubah tak bebas dan seluruh turunannya berpangkat satu.
Bentuk umum dari persamaan diferensial linear adalah sebagai berikut :

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots +$$

$$a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y = r(x) \qquad \text{(II.1.1)}$$

dimana y merupakan suatu fungsi dalam x.
y disebut perubah tak bebas, sedangkan x disebut perubah bebas. Jika a_0, a_1, a_2, ...,dan a_n konstan maka (II.1.1) disebut Persamaan Diferensial Linear dengan koefisien konstan. Jika $r(x) = 0$ maka persamaan (II.1.1) disebut persamaan diferensial linear homogen. Jika $r(x) \neq 0$, persamaan (II.1.1) disebut persamaan diferensial linear non homogen.

Orde adalah turunan tertinggi dari persamaan diferensial. Persamaan diferensial linear homogen

Orde adalah turunan tertinggi dari persamaan diferensial. Persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstanta mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\,\frac{dy}{dx} + q\,y(x) = 0$$

atau $\quad y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0 \quad \ldots(\text{II}.1.2)$

dimana p dan q merupakan konstanta

II.1.1 Linearitas Operator Diferensial L

Lema 1.1 Didefenisikan

$$L[y(x)] := y''(x) + py'(x) + qy(x)$$

dimana p dan q merupakan konstanta

Jika y_1 dan y_2 adalah dua fungsi yang mempunyai turunan kedua dalam interval I dan jika c adalah konstan , maka :

a) $L[y_1(x)+y_2(x)] = L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$

b) $L\,[cy_1(x)] = c\,L[y_1(x)]$

Bukti

a) $L[\,y_1(x)+y_2(x)] = (y_1(x)+y_2(x))'' + p\,[y_1(x)+y_2(x)]' + q[y_1(x)+y_2(x)]$

$= [y_1''(x)+ py_1'(x) +qy_1(x)] + [y_2''(x) + py_2'(x)+ qy_2(x)]$

$= L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$

b) $L[cy_1(x)]= cy_1''(x)+ cy_1'(x)+ cy_1(x)$

$= c\,(y_1''(x) + y_1'(x) + y_1(x)$

$= c\,L[y_1(x)]$

II.1.2 Kombinasi Linear Suatu Penyelesaian

Defenisi 2.1.1

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (II.1.2) maka kombinasi dari $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah $c_1\ y_1(x) + c_2\ y_2(x)$ dimana c_1 dan c_2 konstanta.

Teorema 2.1.1

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (II.1.2) maka kombinasi dari $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ juga merupakan penyelesaian dari (II.1.2)

Bukti

Didefenisikan

$L[y] = y''(x) + py'(x) + qy(x)$, dimana p dan q konstan dan y merupakan fungsi dalam x.

Karena $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$ ...(II.1.2)

maka $L[y(x)] = 0$. Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan penyelesaian dari (II.1.2) maka $L[y_1(x)] = 0$ dan $L[y_2] = 0$.

Menurut lema 1.1 :

$$L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = L[c_1y_1(x)] + L[c_2y_2(x)]$$
$$= c_1L[y_1(x)] + c_2L[y_2(x)]$$

Substitusi nilai $L[y_1(x)]$ dan $L[y_2(x)]$ sehingga $L[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)] = c_1.0 + c_2.0 = 0$

Jadi $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ juga memenuhi persamaan $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$.

II.1.3 Fungsi Tergantung Linear dan Fungsi Bebas Linear

Defenisi 2.1.3

Dua fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dikatakan tergantung linear pada interval I jika terdapat konstanta "k" sedemikian sehingga fungsi yang satu merupakan hasil kali "k" dengan fungsi yang lainnya. Ditulis :

$y_1(x) = k\ y_2(x)$ atau $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ dimana c_1 dan c_2 tidak kedua - duanya sama dengan nol.

Defenisi 2.1.4

Dua fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ dikatakan bebas linear linear pada interval I jika $c_1\ y_1(x) + c_2\ y_2(x) = 0$ untuk semua x pada interval I dimana c_1 dan c_2 sama dengan nol.

Teorema 2.1.5 (Reduksi Orde)

Jika $f(x)$ merupakan penyelesaian nontrivial dari persamaan $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$ maka penyelesaian kedua yang bebas linear dengan $f(x)$ adalah $y(x) = v(x)\ f(x)$ dimana

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{[f(x)]^2}\,dx$$

Bukti

Diasumsikan $y(x) = v(x)\ .\ f(x)$ merupakan penyelesaian kedua yang bebas linear dengan

$f(x)$. Turunan pertama dari $y(x)$ adalah :

$$y'(x) = v(x)\, f'(x) + v'(x)\, f(x)$$

Sedangkan turunan kedua dari $y(x)$ adalah :

$$y''(x) = v(x)\, f''(x) + v'(x)\, f'(x) + v''(x)\, f(x) + v'(x)\, f'(x)$$

Substitusi $y(x)$, $y'(x)$, dan $y''(x)$ ke persamaan (II.1.2) sehingga didapatkan

$$[\, f''(x) + p\, f'(x) + q\, f(x)\,]\, v(x) + [2f'(x) + p\, f(x)\,]\, v'(x) + f(x)\, v''(x) = 0$$

Karena $f(x)$ merupakan penyelesaian dari (II.1.2) maka $f''(x) + p\, f'(x) + q\, f(x) = 0$.

Sehingga hasil substitusi menjadi :

$$f(x)\, v''(x) + [\, 2f'(x) + p\, f(x)\,]\, v'(x) = 0 \qquad \text{....(II.1.3)}$$

Misalkan $w(x) = v'(x)$ dan $w'(x) = v''(x)$ maka persamaan (II.1.3) dapat ditulis menjadi

$$f(x)\, w'(x) + [2f'(x) + p\, f(x)]\, w(x) = 0$$

atau $f(x)\, w'(x) = -[2f'(x) + pf(x)]\, w(x)$

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = - \frac{[2f'(x) + p\, f(x)]}{f(x)}$$

$$\int \frac{dw}{w(x)} = - \int \frac{[2f'(x) + p\, f(x)]}{f(x)}\, dx$$

$$\ln w(x) = -2 \ln f(x) - \int p\, dx$$

$$\ln w(x) = \ln f(x)^{-2} + \ln e^{-\int p\, dx}$$

$$w(x) = f(x)^{-2}\, e^{-\int p\, dx} \qquad \text{atau}$$

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p\, dx}}{[f(x)]^2}\, dx$$

Contoh 2.1.1

Jika $f(x) = A\, e^{\lambda x}$ merupakan penyelesaian dari $y''(x) - 2\sqrt{q}\; y'(x) + q\, y(x) = 0$ maka dapat dicari penyelesaian kedua yang bebas linear dengan $A\, e^{\lambda x}$, dimana $\lambda = \sqrt{q}$; menggunakan metoda reduksi orde.

$$y_2(x) = Ae^{\lambda x} \int \frac{e^{-\int -2\sqrt{q}\, dx}}{[Ae^{\sqrt{q}\, x}]^2}\, dx$$

$$y_2(x) = Ae^{\lambda x} \int \frac{e^{2\sqrt{q}\, x}}{A^2\, e^{2\sqrt{q}\, x}}\, dx$$

Misalkan $(1/A) = A_1$

$$y_2(x) = A_1 e^{\lambda x} \int dx = A_1 e^{\lambda x}(x + c)$$

$$y_2(x) = A_1\, x\, e^{\lambda x} + cA_1\, e^{\lambda x}$$

Jika $cA_1 = A_2$

maka $y_2(x) = A_1\, x\, e^{\lambda x} + A_2\, e^{\lambda x}$.

Lema 2.2

Jika $z(x) = u(x) + i\, v(x)$ merupakan penyelesaian dari $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$ dimana p dan q bilangan real maka u(x) dan v(x) merupakan penyelesaian real dari

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \qquad \ldots.(\text{II}.1.2)$$

Bukti

Jika $z(x) = u(x) + i\, v(x)$ merupakan penyelesaian dari (II.1.2) maka akan dipenuhi

$$z''(x) + pz'(x) + qz(x) = 0 \qquad \ldots.(\text{II}.1.6)$$

Turunan pertama dan kedua dari

$z(x) = u(x) + iv(x)$ adalah $z'(x) = u'(x) + iv'(x)$

dan $z''(x) = u''(x) + i\,v''(x)$.

Substitusi fungsi $z(x)$ dan turunan-turunannya ke persamaan (II.1.6)

$$[u''(x) + iv''(x)] + p\,[u'(x) + iv'(x)] +$$
$$q\,[u(x) + v(x)] = 0$$

atau $[u''(x) + p\,u'(x) + q\,u(x)] +$

$$i\,[v''(x) + p\,v'(x) + q\,v(x)] = 0$$

Bilangan kompleks sama dengan nol jika bagian real dan imajinernya sama dengan nol

Sehingga $u''(x) + p\,u'(x) + q\,u(x) = 0$

dan $v''(x) + p\,v'(x) + q\,v(x) = 0$

Jadi $z(x) = u(x) + i\,v(x)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (II.1.2) jika $u(x)$ dan $v(x)$ juga merupakan penyelesaian dari persamaan (II.1.2).

II.2 Persamaan Karakteristik

Persamaan diferensial Linear dengan koefisien konstan dengan orde n mempunyai bentuk

$$a_n\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1\,y(x)' + a_0\,y(x) = 0 \qquad \ldots.(II.2.1)$$

dimana setiap koefisien a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ merupakan konstanta dan $a_n \neq 0$.

Jika $n = 1$ maka persamaan (II.3.1) berbentuk

$$a_1\,y'(x) + a_0\,y(x) = 0 \quad \text{atau}$$

$$y'(x) + \frac{a_0}{a_1}\,y(x) = 0 \qquad \ldots.\ (II.2.2)$$

Diasumsikan $\frac{a_0}{a_1} = \alpha$ sehingga persamaan (II.2.2) menjadi $y'(x) + \alpha\, y(x) = 0$ .... (II.2.3)

atau $\frac{dy(x)}{dx} + \alpha\, y(x) = 0$ Jika kedua ruas dikalikan dengan Faktor Integral $e^{\alpha x}$ didapat persamaan

$$e^{\alpha x}\{ \frac{dy(x)}{y(x)} + \alpha\, y(x)\} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{d}{dx}\{ e^{\alpha x}\, y \} = 0$$

Hasilnya integralnya adal a h $y(x) = A\, e^{-\alpha x + c}$.

Bila konstanta $-\alpha = \lambda$ maka dapat diasumsikan $y = Ae^{\lambda x}$ sebagai penyelesaian dari (II.2.1) dimana A konstanta. Jika fungsi $y = Ae^{\lambda x}$ diturunkan sampai turunan ke n didapat :

$y'(x)= A\lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = A\lambda^2 e^{\lambda x}$, $y'''(x) = A\lambda^3 e^{\lambda x}, \ldots,$

$y^{(n-1)}(x) = A\lambda^{(n-1)}(x)$, $y^{(n)}(x)$

Jika fungsi $y(x)$ dan turunan - turunannya disubstitusikan ke dalam persamaan (II.2.1) maka

$$a_n \lambda^n Ae^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} Ae^{\lambda x} + \ldots + a_1 A\lambda e^{\lambda x} + a_0 Ae^{\lambda x} = 0$$

atau

$$Ae^{\lambda x}(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0) = 0 \quad \ldots (II.2.4)$$

Nilai $e^{\lambda x}$ tidak pernah berharga nol. Sehingga agar benar $y = A\, e^{\lambda x}$ merupakan penyelesaian dari persamaan (II.2.1) dimana $A \neq 0$ maka λ harus merupakan akar-akar dari persamaan polinom

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad ..(II.2.5)$$

Defenisi 2.2.1

Persamaan polinom (II.2.5) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (II.2.1)

Defenisi 2.2.2

Akar-akar dari persamaan (II.2.5) disebut akar-akar karakteristik dari (II.2.1).

Contoh 2.2.1

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstanta

$$y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0 \qquad \text{...(II.1.2)}$$

mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0 \qquad \text{...(II.2.6)}$$

dimana p dan q merupakan konstanta.

II.3.Sistem Diferensial Linear

Defenisi 2.3.1

Sistem diferensial linear n dimensi adalah n persamaan diferensial linear dengan n perubah tak bebas dimana $n \geq 2$. Dinotasikan

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j(t) + f_i \qquad \text{...(II.3.1)}$$

$$i = 1,2, ,...,n \qquad j = 1,2,3,...,n$$

a_{ij} dan f_i dapat berupa konstanta maupun fungsi .

Jika $f_i = 0$, maka sistem (II.3.1) disebut sistem diferensial linear homogen. Jika $f_i \neq 0$, sistem (II.3.1) disebut sistem linear non homogen.

Defenisi 2.3.1

Sistem Otonomus adalah sistem diferensial dengan bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots , x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots , x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots , x_n)$$

dimana $f_i(x_1, x_2, \dots , x_n)$ $i = 1, 2, \dots ,n$ merupakan fungsi yang secara eksplisit tidak tergantung pada "t".

Diberikan sistem Otonomus Dua Dimensi dengan bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y) \qquad \dots(\text{II}.3.2)$$

Penyelesaian dari sistem (II.3.2) adalah fungsi x(t) dan y(t) dimana nilai x(t) dan y(t) bergerak mengikuti pertambahan nilai "t".

Teorema 2.3.1

Jika x(t) dan y(t) merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.2) maka x(t+c) dan y(t+c) juga merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.2) dimana c merupakan konstanta.

Bukti

Diasumsikan $X(t) = x(t+c)$ dan $Y(t) = y(t+c)$ merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.2) dimana c konstanta. Akan dibuktikan x(t) dan y(t) memenuhi sistem (II.3.2).

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t+c) = f(x(t+c),\ y(t+c))$$
$$= f(X(t),\ Y(t))$$
$$\frac{dY}{dt}(t) = \frac{dy}{dt}(t+c) = g(x(t+c),\ y(t+c))$$
$$= g(X(t),\ Y(t))$$

Terbukti bahwa X(t) dan Y(t) memenuhi sistem (II.3.2).

Sistem Otonomus Linear Dua dimensi mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = ax + b\,y$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \qquad \text{....(II.3.3)}$$

dimana a, b, c, dan d merupakan konstanta.

Teorema 2.3.2

Jika sistem (II.3.3) mempunyai dua penyelesaian $\begin{vmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{vmatrix}$ dan $\begin{vmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{vmatrix}$ ...(II.3.4)

pada interval [a,b] maka :

$$x = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$$
$$y = c_1\,y_1(t) + c_2\,y_2(t)$$

juga merupakan penyelesaian pada [a,b] dimana c_1 dan c_2 konstanta.

Bukti

Sistem (II.3.3) dapat ditulis sebagai

$$(D-a)x + by = 0$$

$$cx + (D-d)y = 0$$

dimana $D = \frac{d}{dt}$.

Dengan eliminasi didapat dua persamaan yaitu :

$$[D^2 - (a+d)D + (ad-bc)](x) = 0$$

$$[D^2 - (a+d)D + (ad-bc)](y) = 0$$

atau

$$x''(t) - (a+d)x'(t) + (ad-bc)x = 0 \quad ..(II.3.5)$$

$$y''(t) - (a+d)y'(t) + (ad-bc)y = 0 \quad ..(II.3.6)$$

Persamaan (II.3.5) mempunyai penyelesaian

$x_1 = x_1(t)$ dan $x_2 = x_2(t)$

Menurut teorema 2.1.1 maka

$x = c_1 \; x_1(t) + c_2 \; x_2(t)$ juga merupakan penyelesaian.

Persamaan (II.3.6) mempunyai penyelesaian

$y = y_1(t)$ dan $y_2 = y_2(t)$

Menurut teorema 2.1.1 maka

$y = c_1 \; y_1(t) + c_2 \; y_2(t)$ juga merupakan penyelesaian.

Jadi
$$\begin{aligned} x &= c_1 \, x_1(t) + c_2 \, x_2(t) \\ y &= c_1 \, y_1(t) + c_2 \, y_2(t) \end{aligned} \quad ...(II.3.7)$$

juga merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.3)

Defenisi 2.3.2

Jika $\begin{matrix} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{matrix}$

merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.3) maka Wronskian dari x dan y adalah :

$$W[x,y](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}$$

Teorema 2.3.4

Jika (II.3.7) merupakan penyelesaian umum dari sistem (II.3.3) maka Wronskiannya tidak sama dengan nol.

Bukti

Menurut teorema 2.3.2

Jika $\begin{matrix} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{matrix}$ dan $\begin{matrix} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{matrix}$

merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.3) maka (II.3.7) juga merupakan penyelesaian dari sistem (II.3.3).

(II.3.7) merupakan penyelesaian umum jika dapat diambil konstanta sembarang c_1 dan c_2 sedemikian sehingga untuk setiap "t" berlaku

$$c_1\ x_1(t) + c_2\ x_2(t) = x(t)$$

$$c_1\ y_1(t) + c_2\ y_2(t) = y(t)$$

Hal ini dipenuhi apabila :

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

atau $W[x,y](t) \neq 0$

II.4 Penyelesaian Umum Sistem otonomus Linear .

Teorema 2.4.1

Sistem otonomus linear (II.3.3) mempunyai penyelesaian $x(t) = Ae^{\lambda t}$ dan $y(t) = Be^{\lambda t}$ dimana $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$

dan $(a-\lambda)A + b\,B = 0$

$c\,A + (d-\lambda)B = 0$ ... (II.4.1)

Bukti

Menggunakan operator $D = \frac{d}{dt}$

dimana $\frac{dx}{dt} = D(t)$ dan $\frac{dy}{dt} = D(y)$

Sehingga sistem (II.3.3) dapat ditulis sebagai $(D - a)(x) - b\,y = 0$ ....(II.4.2)

$c\,x - (D - d)\,y = 0$ ....(II.4.3)

Nilai x(t) dapat dicari dengan mengeliminir y dari kedua persamaan (II.4.2) dan (II.4.3). Sehingga didapat persamaan

$(D-a)(D-d)(x) - bcx = 0$ atau

$[D^2 - (a + d)\,D + (ad - bc)](x) = 0$..(II.4.4)

Nilai y(t) dapat dicari dengan mengeliminir x dari persamaan (II.4.2) dan (II.4.3). Sehingga didapat persamaan

$(D - a)(D - d)(x) - bcy = 0$ atau

$[D^2 - (a + d)D + (ad - bc)](y) = 0$ .. (II.4.5)

Dapat dilihat bahwa (II.4.4) dan (II.4.5) membentuk persamaan diferensial linear dengan persamaan karakteristik

$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ ..(II.4.6)

Menurut II.2 maka persamaan (II.4.4) mempunyai penyelesaian $x(t) = A\ e^{\lambda t}$ dan persamaan (II.4.5) mempunyai penyelesaian $y = B\ e^{\lambda t}$. Jadi sistem (II.4.1) mempunyai penyelesaian $x(t) = A\ e^{\lambda t}$ dan $y(t) = B\ e^{\lambda t}$ Substitusi $x(t) = A\ e^{\lambda t}$ dan $B = e^{\lambda t}$ ke sistem (II.3.3) dimana A dan B konstanta. didapat $(a-\lambda)A + b\ B = 0$

$c\ A + (d-\lambda)B = 0$

Defenisi 2.4.1

Persamaan polinom

$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ ...(II.4.6)

disebut persamaan karakteristik dari sistem (II.3.3).

Defenisi 2.4.2

Akar-akar dari (II.4.6) disebut akar-akar karakteristik dari sistem (II.3.3).

Teorema 2.4.2

Jika akar-akar karakteristik dari sistem (II.3.3) merupakan bilangan real dan berlainan λ_1 dan λ_2 maka sistem (II.3.3) mempunyai penyelesaian

$$x(t) = c_1A_1\ e^{\lambda_1 t} + c_2A_2\ e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = c_1B_1\ e^{\lambda_1 t} + c_2B_2\ e^{\lambda_2 t}$$

dimana A_1, A_2, B_1, dan B_2 konstanta tertentu sedangkan c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Bukti

Jika akar-akar karakteristik dari sistem (II.3.3) real dan berlainan

a) persamaan (II.4.4) mempunyai penyelesaian

$$x_1(t) = A_1\, e^{\lambda_1 t} \quad \text{dan} \quad x_2(t) = A_2\, e^{\lambda_2 t}$$

b) persamaan (II.4.5) mempunyai penyelesaian

$$y_1(t) = B_1\, e^{\lambda_1 t} \quad \text{dan} \quad y_2(t) = B_2\, e^{\lambda_2 t}$$

Substitusi $x = x_1 = A_1\, e^{\lambda_1 t}$

$y = y_1 = B_1\, e^{\lambda_1 t}$

ke sistem (II.3.3) dimana $x = x_1$, $y = y_1$, $A = A_1$, dan $B = B_1$ sehingga didapat persamaan

$$(a-\lambda_1)A_1 + b\, B_1 = 0$$
$$c\, A_1 + (d-\lambda_1)B_1 = 0$$

Jadi $B_1 = \dfrac{\lambda_1 - a}{b} A_1$

Jika $\dfrac{\lambda_1 - a}{b} = k$ maka $B_1 = k\, A_1$

Substitusi $x = x_2 = A_2\, e^{\lambda_2 t}$

$y = y_2 = B_2\, e^{\lambda_2 t}$

ke sistem (II.3.3) dimana $x = x_2$, $y = y_2$, $A = A_2$, dan $B = B_2$ sehingga didapat persamaan

$$(a-\lambda_2)A_2 + b\, B_2 = 0$$
$$c\, A_2 + (d-\lambda_2)B_2 = 0$$

Jadi $B_2 = \dfrac{\lambda_2 - a}{b} A_2$

Jika $\dfrac{\lambda_2 - a}{b} = 1$ maka $B_2 = 1\, A_2$

Wronskian dari x dan y adalah :

$$W[x, y](t) = \begin{vmatrix} A_1\, e^{\lambda_1 t} & A_2\, e^{\lambda_2 t} \\ B_1\, e^{\lambda_1 t} & B_2\, e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix}$$

$$W[x, y](t) = A_1\, A_2\, (1-k)\, e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Karena A_1 dan A_2 tidak sama dengan nol; dan $1 \neq k$ maka $W[x,y](t) \neq 0$.

Sehingga penyelesaian umum dari sistem (II.3.3) adalah :

$$x(t) = c_1\, A_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, A_2\, e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = c_1\, B_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, B_2\, e^{\lambda_2 t}$$

c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Teorema 2.4.3

Jika persamaan karakteristik dari sistem (II.3.3) mempunyai akar kembar $\lambda_{1,2} = \lambda$ maka sistem (II.3.3) mempunyai penyelesaian

$$x(t) = c_1 A\, e^{\lambda t} + c_2(A_1 t + A_2)\, e^{\lambda t}$$

$$y(t) = c_1 B\, e^{\lambda t} + c_2(B_1 t + B_2)\, e^{\lambda t}$$

dimana A, A_1, A_2, B, B_1, dan B_2 konstanta tertentu sedangkan c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Bukti

Jika akar-akar karakteristik dari sistem (II.3.3) merupakan akar kembar, dari contoh

2.1.4 didapat penyelesaian kedua dari persamaan diferensial yang bebas linear dengan $y = A\ e^{\lambda x}$ adalah $y = (A_1 t + A_2)e^{\lambda t}$. Maka :

a) persamaan (II.4.4) mempunyai penyelesaian

$x_1(t) = c_1 A\ e^{\lambda t}$

$x_2(t) = c_2(A_1\ t + A_2)e^{\lambda t}$

b) persamaan (II.4.5) mempunyai penyelesaian

$y(t) = c_1 B\ e^{\lambda t}$

$y(t) = c_2(B_1\ t + B_2)e^{\lambda t}$

Substitusi $x = x_1 = A\ e^{\lambda t}$

$y = y_1 = B\ e^{\lambda t}$

ke sistem (II.3.3) dimana $x = x_1$, $y = y_1$,

sehingga didapat persamaan $(a-\lambda)A + b\ B = 0$

$c\ A + (d-\lambda)B = 0$

Jadi $B = \frac{\lambda - a}{b} A$

Jika $\frac{\lambda - a}{b} = k$ maka $B = k\ A$

Substitusi $x = x_2 = (A_1 t + A_2)\ e^{\lambda t}$

$y = y_2 = (B_1 t + B_2)\ e^{\lambda t}$

ke sistem (II.3.3) dimana $x = x_2$, $y = y_2$,

$A = A_1 t + A_2$, dan $B = B_1 t + B_2$ sehingga didapat persamaan

$[(a-\lambda)A_1 + bB_1]t + [(a-\lambda)A_2 + b\ B_2 - A_1] = 0$

$[cA_1 + (d-\lambda)B_1]t + [cA_2 + (d-\lambda_2)B_2 - B_1] = 0$

Jadi $[(a-\lambda)A_1 + bB_1] = 0$

$[cA_1 + (d-\lambda)B_1] = 0$

dan $(a-\lambda)A_2 + b\ B_2 - A_1 = 0$

$$cA_2 + (d-\lambda_2)B_2 - B_1 = 0$$

Jika $\dfrac{\lambda-a}{b} = k$ maka $B_1 = k\ A_1$

jadi $\dfrac{B}{A} = \dfrac{B_1}{A_1}$ dan $B_2 = \dfrac{A_1}{b} + k\ A_2$

Wronskian dari x dan y adalah :

$$W[x, y](t) = \begin{vmatrix} A\ e^{\lambda t} & (A_1 t + A_2)\ e^{\lambda t} \\ B\ e^{\lambda t} & (B_1 t + B_2)\ e^{\lambda t} \end{vmatrix}$$

$$W[x, y](t) = \frac{A\ A_1}{b}\ e^{2\lambda t} \neq 0$$

Maka penyelesaian umum dari sistem (II.3.3)

$$x(t) = c_1 A\ e^{\lambda t} + c_2(A_1 t + A_2)e^{\lambda t}$$

$$y(t) = c_1 B\ e^{\lambda t} + c_2(B_1\ t + B_2)e^{\lambda t}$$

c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Teorema 2.4.4

Jika persamaan karakteristik dari sistem (II.3.3) mempunyai akar kompleks $\alpha + i\beta$ dan konjugatnya $\alpha - i\beta$ maka penyelesaian umum dari sistem (II.3.3) adalah

$$x(t) = e^{\alpha t}\ A(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

$$y(t) = e^{\alpha t}\ c_1(B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t\ )$$
$$e^{\alpha t}\ c_2(B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$$

dimana A, B_1, dan B_2 konstanta tertentu, sedangkan c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Bukti

Jika akar-akar karakteristik dari sistem (II.3.3) mempunyai akar-akar bilangan kompleks dan konjugatnya maka :

a) persamaan (II.4.4) mempunyai penyelesaian

$x_1(t) = A\ e^{(\alpha+i\beta)t}$

$x_2(t) = A\ e^{(\alpha-i\beta)t}$

b) persamaan (II.4.5) mempunyai penyelesaian

$y_1(t) = B\ e^{(\alpha+i\beta)t}$

$y_2(t) = B\ e^{(\alpha-i\beta)t}$

Substitusi $x = x_1 = A\ e^{(\alpha+i\beta)t}$

$y = y_1 = B\ e^{(\alpha+i\beta)t}$

ke sistem (II.3.3) dimana $x = x_1$, $y = y_1$,

dan $\lambda = \alpha + i\beta$ sehingga didapat persamaan

$(a-\alpha - i\ \beta)A + b\ B = 0$

$c\ A + (d-\alpha-i\beta)B = 0$

Jadi $B = \frac{\alpha-a}{b} A + i\ \frac{\beta}{b} A$

Jika $B = B_1 + i\ B_2$ maka

Jika $B_1 = \frac{\alpha-a}{b}\ A$ dan $B_2 = \frac{\beta}{b}\ A$

Sehingga $x = x_1 = A\ e^{(\alpha+i\beta)t}$

$y = y_1 = (B_1 + i\ B_2)\ e^{(\alpha+i\beta)t}$

Atau $x_1(t) = A\ e^{\alpha t} \cos \beta t + i\ A\ e^{\alpha t} \sin \beta t$

$y_1(t) = e^{\alpha t}(B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t) +$

$i\ e^{\alpha t}(B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$

Menurut lemma 2.2 maka :

$x_1^* = A\ e^{\alpha t} \cos \beta t$ dan $x_2^* = A\ e^{\alpha t} \sin \beta t$

juga merupakan penyelesaian dari persamaan (II.4.4)

$y_1^* = e^{\alpha t}(B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t)$ dan

$y_2^* = e^{\alpha t}(B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$

juga merupakan penyelesaian dari persamaan (II.4.5)

Untuk $x_2(t) = A\ e^{(\alpha-i\beta)t}$ juga didapat dua penyelesaian yang sama dengan x_1^* dan x_2^*

Untuk $y_2(t) = B\ e^{(\alpha-i\beta)t}$ juga didapat dua penyelesaian yang sama dengan y_1^* dan y_2^*

Wronskian dari x dan y adalah :

$$\begin{vmatrix} A\ e^{\lambda t}\cos \beta t & A\ e^{\lambda t}\sin \beta t \\ e^{\lambda t}(B_1\cos \beta t - B_2 \sin^{\lambda t} \beta t) & e^{\lambda t}(B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t) \end{vmatrix}$$

$$W[x,y](t) = A^2 \frac{\beta}{b}\ e^{\alpha t} \neq 0$$

Maka penyelesaian umum sistem (II.3.3) adalah :

$$x(t) = e^{\alpha t} A\ (\ c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t\ )$$

$$y(t) = e^{\alpha t}\ c_1(\ B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t\ ) + e^{\alpha t}\ c_2(\ B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t\ )$$

dimana $B = B_1 + i\ B_2$

c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Teorema 2.4.5

Jika persamaan karakteristik sistem (II.3.3) mempunyai akar-akar bilangan imajiner murni $\lambda_1 = i\beta$ dan $\lambda_2 = -i\beta$ maka penyelesaian umum dari sistem (II.3.3) adalah :

$$x(t) = A\ (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) +$$

$$y(t) = c_1(B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t) + c_2(B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$$

dimana A, B_1, dan B_2 konstanta tertentu sedangkan c_1 dan c_2 merupakan konstanta sembarang.

Bukti

Jika akar-akar karakteristik dari sistem (II.3.3) merupakan bilangan imajiner murni

a) persamaan (II.4.4) mempunyai penyelesaian

$x_1(t) = A\ e^{(i\beta)t}$ $\qquad$ $x_2(t) = A\ e^{(-i\beta)t}$

b) persamaan (II.4.5) mempunyai penyelesaian

$y_1(t) = B\ e^{(i\beta)t}$ $\qquad$ $y_2(t) = B\ e^{(-i\beta)t}$

Substitusi $x = x_1 = A\ e^{(i\beta)t}$

$y = y_1 = B\ e^{(i\beta)t}$

ke sistem (II.3.3) dimana $x = x_1$, $y = y_1$,

dan $\lambda = i\beta$ sehingga didapat persamaan

$(a- i\ \beta)A + b\ B = 0$

$c\ A + (d-i\beta)B = 0$

Jadi $B = \frac{-a}{b} A + i \frac{\beta}{b} A$

Jika $B = B_1 + i\ B_2$ maka

Jika $B_1 = \frac{-a}{b} A$ dan $B_2 = \frac{\beta}{b} A$

Sehingga $x = x_1 = A\ e^{(i\beta)t}$

$y = y_1 = (B_1 + i\ B_2)\ e^{(i\beta)t}$

Atau $x_1(t) = A\ \cos \beta t + i\ A\ \sin \beta t$

$y_1(t) = (B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t) +$

$i\ (B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$

Menurut lemma 2.2 maka

$x_1^* = A\ \cos \beta t$ dan $x_2^* = A\ \sin \beta t$

juga merupakan penyelesaian dari sistem (II.4.4)

$y_1^* = (B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t)$ dan

$y_2^* = (B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$

juga merupakan penyelesaian dari sistem (II.4.5)

Untuk $x_2(t)=A\ e^{(-i\beta)t}$ juga didapat dua penyelesaian yang sama dengan x_1^* dan x_2^*

Untuk $y_2(t) = B\ e^{(-i\beta)t}$ juga didapat dua penyelesaian yang sama dengan y_1^* dan y_2^*

Wronskian dari x dan y adalah :

$$\begin{vmatrix} A \cos \beta t & A \sin \beta t \\ (B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t) & (B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t) \end{vmatrix}$$

$$W[x,y](t) = A^2 \frac{\beta}{b} \neq 0$$

Maka penyelesaian umumnya adalah :

$$x(t) = A\ (\ c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t\ )$$

$$y(t) = c_1(\ B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t\ ) + c_2(\ B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t\ )$$

c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Teorema 2.4.6

Jika sistem mempunyai bentuk sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{dy}{dt} = by$$

maka penyelesaian umumnya adalah

$x(t) = c_1 e^{at}$ dan $y(t) = c_2 e^{bt}$

dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta.

Bukti

Menurut II.2,

$\frac{dx}{dt}$ = at mempunyai penyelesaian $x(t) = A\ e^{at}$

$\frac{dy}{dt}$ = by mempunyai penyelesaian $y(t) = B\ e^{bt}$

Misal $A = c_1$ dan $B = c_2$ maka

$x(t) = c_1 e^{at}$ dan $y(t) = c_2 e^{bt}$

merupakan penyelesaian dimana c_1 dan c_2 kostanta. Wronskian dari x dan y adalah

$$W[x,y](t) = \begin{vmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(a+b)t} \neq 0$$