BAB II

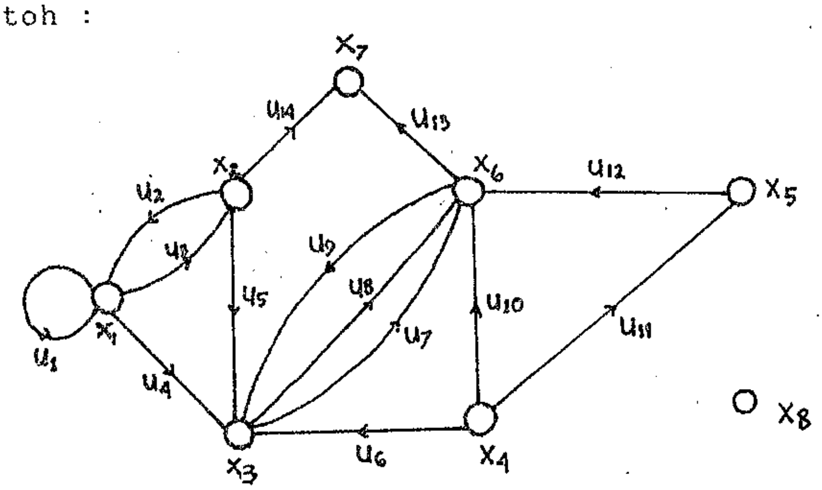
G R A P H

2.1. PENGERTIAN GRAPH

DEFINISI 2.1.1 :

Graph $G = (X,U)$ adalah himpunan tidak kosong yang memuat himpunan titik - titik (vertex) $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dan himpunan garis-garis (arcs) $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Contoh :



Gambar 2.1.1. Graph $G = (X,U)$ dengan 8 titik yaitu $X = \{x_1, \ldots, x_8\}$ dan 14 garis yaitu: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{14}\}$.

Notasi $U = (x,y)$ menyatakan garis u dengan x sebagai titik awal dan y sebagai titik akhir.

Misalnya : u_2 (x_2, x_1), $u_5 = (x_2, x_3)$, dan lain-lain.

Garis Graph yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut : loop. Misalnya : $u_1 = (x_1, x_1)$.

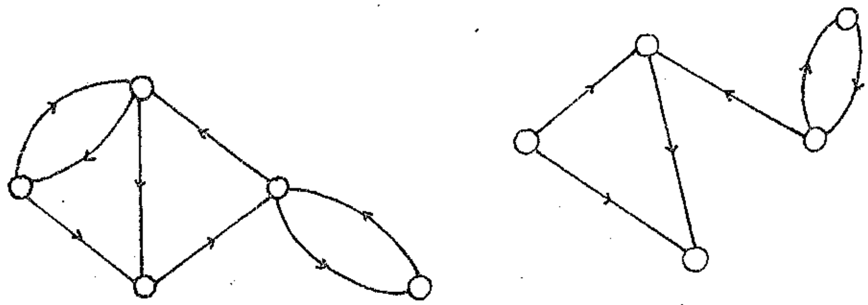
Banyaknya titik dalam suatu graph disebut order.

Dua buah titik yang dihubungkan langsung dengan suatu garis disebut adjacent, sebaliknya dua garis disebut adjacent jika kedua garis tersebut mempunyai paling sedikit satu titik persekutuan.

DEFINISI 2.1.2 :

Graph H = (X,V) disebut Partial graph dari graph G = (X,U) jika $V \subset U$ atau graph H adalah graph G tanpa garis-garis U-V.

Contoh :

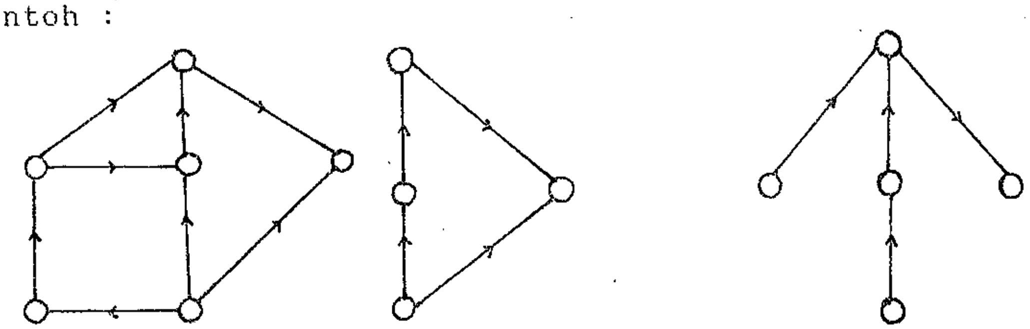


Graph G　　　　　　Partial Graph H

DEFINISI 2.1.3 :

Suatu graph H disebut Subgraph dari graph G jika setiap titik dari H adalah titik dari graph G demikian juga setiap garis dari graph H adalah garis dari G.

Contoh :



Graph G　　　　Subgraph H　　　　Subgraph H

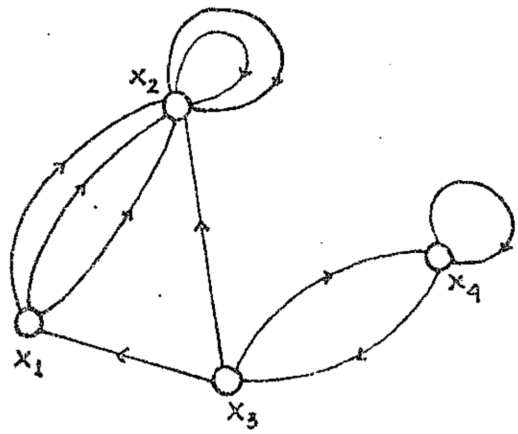
Gambar 2.2.3. Graph G dan 2 subgraphnya.

DEFINISI 2.1.4 :

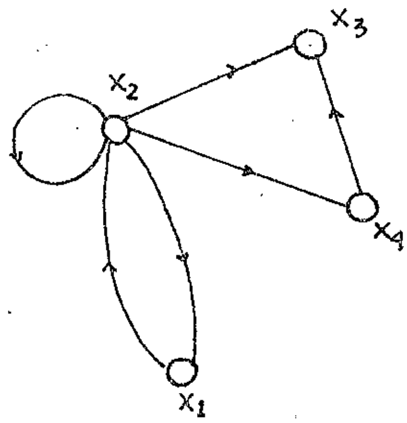
Suatu graph $G = (X,U)$ disebut p-graph jika untuk setiap $U(x,y)$ maksimal = p garis.

Graph dengan $p = 1$ disebut 1-graph, ditulis $G = (X,\Gamma)$.

Contoh :



3-graph p : $G = (X,U)$



1-graph p : $G = (X,\Gamma)$

DEFINISI 2.1.5 :

$U(x,y)$, y disebut Successor dari x.

$U(y,x)$, y disebut Predecessor dari x.

$\Gamma^+_G(x)$ = himpunan semua successor dari x.

$\Gamma^-_G(x)$ = himpunan semua predecessor dari x.

Himpunan semua tetangga-tetangga dari x dinotasikan :

$$\Gamma_G(x) = \Gamma^+_G(x) \cup \Gamma^-_G(x)$$

Jika $\Gamma_G(x) = \emptyset$, x disebut titik isolated (isolut).

Jika $\Gamma^+_G(x) \neq \emptyset$, $\Gamma^-_G(x) = \emptyset$ disebut titik transmiter.

Jika $\Gamma^+_G(x) = \emptyset$, $\Gamma^-_G(x) \neq \emptyset$ disebut titik Receiver.

Jika $\Gamma^+_G(x) = \emptyset$, $\Gamma^-_G(x) = 1$ disebut titik carier.

Contoh : Dari gambar 2.1.1.

$\Gamma^{+}_{G}(x_1) = \{x_1,x_2,x_3\}, \Gamma^{-}_{G}(x_1) = \{x_1,x_2,\}, \Gamma_{G}(x_1) = \{x_1,x_2,x_3\}$.

$\Gamma^{+}_{G}(x_2) = \{x_1,x_3,x_7\}, \Gamma^{-}_{G}(x_2) = \{x_1\}, \Gamma_{G}(x_2) = \{x_1,x_3,x_7\}$.

$\{x_8\}$ = titik isolated.

$\{x_4\}$ = titik transmiter.

$\{x_7\}$ = titik receiver.

$\{x_5\}$ = titik carier.

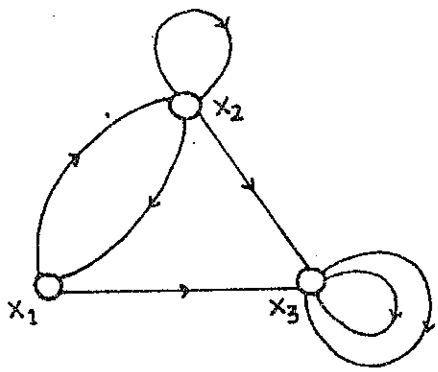
DEFINISI 2.1.6 :

Jika titik x adalah titik awal dari garis U yang bukan merupakan Loop maka garis U disebut insident keluar dari titik x. Didalam graph G, banyaknya garis yang insident keluar dari titik x di tambah dengan banyaknya loop pada titik x di sebut Outer demi-degree dari x dan di tulis $d^{+}_{G}(x)$. Sebaliknya garis yang insident kedalam titik x di tambah dengan banyaknya loop pada titik x di sebut Inner demi-degree dan ditulis $d^{-}_{G}(x)$.

Sehingga banyaknya garis yang insident kedalam dan insident keluar titik x di sebut degree dan di tulis :

$$d_G(x) = d^{+}_{G}(x) + d^{-}_{G}(x).$$

Contoh :



Gambar 2.1.6 : Graph dengan degree masing-masing

$d_G\ (x_1) = 3$

$d_G\ (x_2) = 5$

$d_G\ (x_3) = 6.$

DEFINISI 2.1.7 :

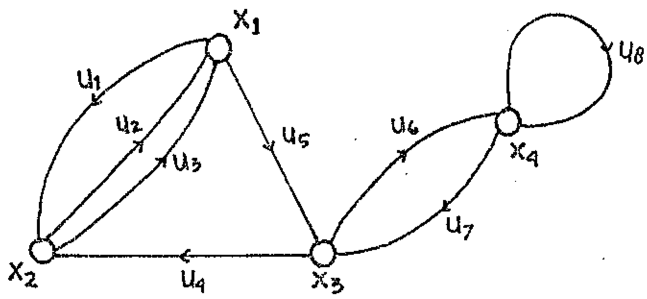
$m^+_G\ (x,y)$ adalah multiplikasi pasangan titik-titik (x,y) yaitu banyaknya garis dengan x adalah titik awal dan y adalah titik akhir. Dapat juga ditulis $m^-_G\ (y,x)$, sehingga :

$$m^+_G\ (x,y) = m^-_G\ (y,x)$$

$$m_G\ (x,y) = m^+_G\ (x,y) + m^-_G\ (x,y)$$

= Banyaknya garis yang menghubungkan x dan y.

Contoh :



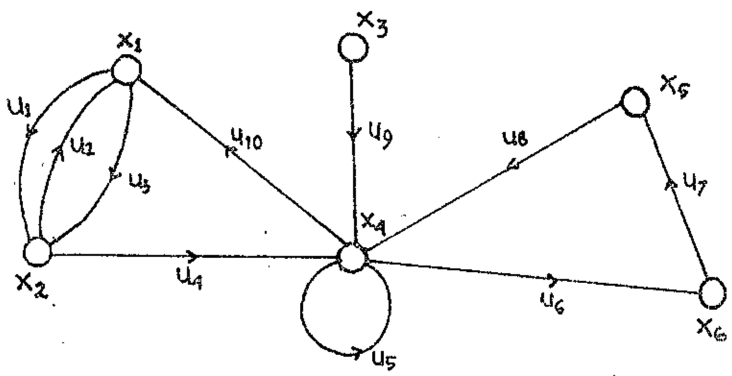
Gambar 2.1.7 graph G = (X,U)
$m^+_G\ (x_1,x_2) = 1$, $m^-_G\ (x_1,x_2) = 2$, $m_G\ (x_1,x_2) = 3$, dst.

DEFINISI 2.1.8 :

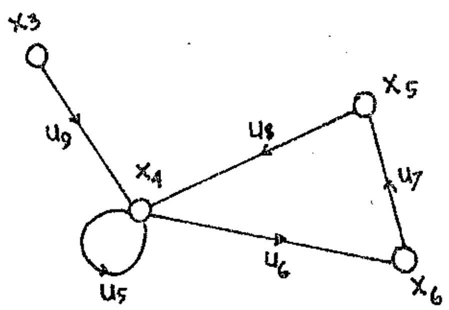
Suatu lintasan yang titik dan garisnya boleh diulang disebut : Chain. Chain dengan lintasan tertutup (titik awal = titik akhir) disebut sirkuit.

Sedang Path adalah suatu lintasan dimana titik maupun garisnya tidak boleh diulang. Part dengan lintasan lintasan tertutup disebut Cycle.

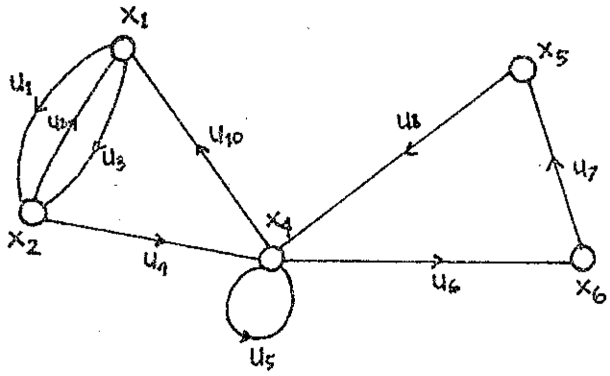
Contoh :



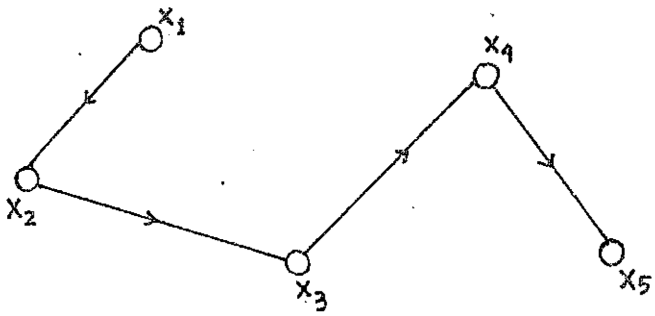
Gambar 2.1.8 : Graph G = (X,U) dengan $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ dan $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{10}\}$.



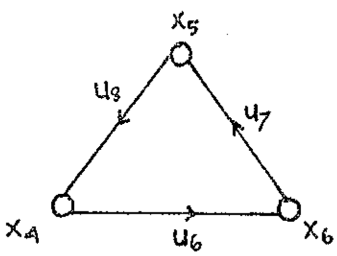
Gambar 2.1.8 (a) : Chain dengan lintasan : u_9, u_5, u_6, u_7, u_8, u_5 dan titik-titik : x_3, x_4, x_6, x_5, x_4.



Gambar 2.1.8 (b) : Sirkuit dengan lintasan :
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_5, u_{10}$
dan titik-titik :
x_1, x_2, x_4, x_6, x_5, x_4, x_1.



Gambar 2.1.8 (c) : Path dengan lintasan :
u_1, u_4, u_6, u_7 dan titik-titik : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.



Gambar 2.1.8 (d) : Cycle dengan lintasan :
u_6, u_7, u_8 dan titik-titik :
x_4, x_6, x_5.

DEFINISI 2.1.9 :

Panjang lintasan dari x ke y adalah banyaknya garis yang terdapat pada lintasan tersebut, ditulis d (x,y).

Contoh : Dari gambar 2.1.8.

$d\ (x_1,x_5) = u_1,\ u_4,\ u_6,\ u_7 = 4$

$= u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6,\ u_7 = 7$

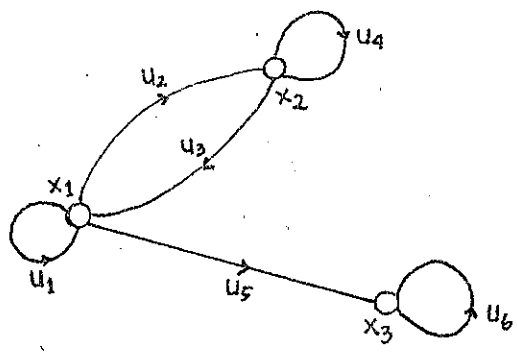
$= u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_6,\ u_7 = 6.$

2.2. JENIS-JENIS GRAPH

2.1.1. REFLEKSIF, SIMETRIS DAN TRANSITIF

- Suatu graph G = (X,U) disebut refleksif jika semua titik memuat loop atau $(\forall\ x \in X)(\ \exists\ u \in U),\ u = (x,x)$.

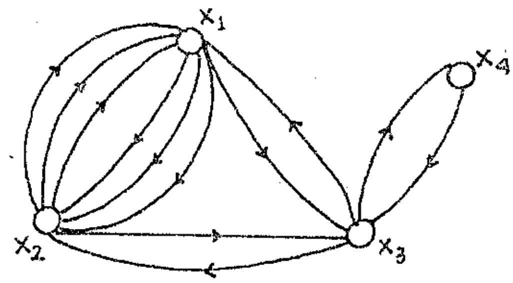
Contoh :



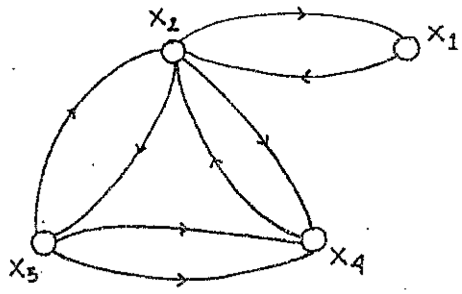
Gambar 2.1.1.1 : Refleksif graph

- Suatu graph G = (X,U) disebut simetris jika memenuhi $m^+_G(x,y) = m^-_G(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$. Sedangkan 1-graph G = (X,Γ) disebut simetris jika dan hanya jika : $m^+_G(x,y) = m^-_G(x,y) = 1,\ \forall\ x,y \in X$.

Contoh :



Simetris graph pada 3-graph p.

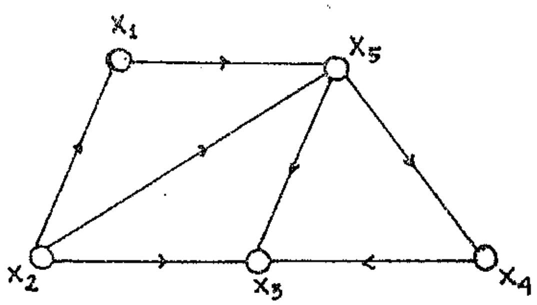


Simetris graph pada 1-graph p.

Gambar 2.1.9 (b) : 2 buah simetris graph

- Suatu graph $G = (X,U)$ disebut transitif jika untuk setiap $x,y,z \in X$ memenuhi : $(x,y) \in U$, $(y,z) \in U \Longrightarrow (x,z) \in U$.

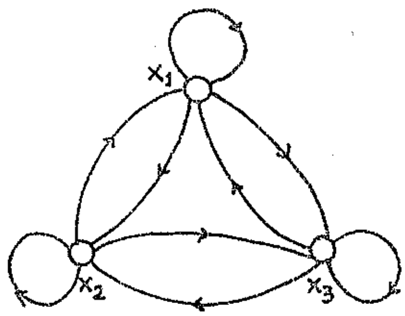
Contoh :



Gambar 2.1.1.2 : Transitif 1-graph $G = (X,\Gamma)$

- Graph yang mempunyai sifat reflektif, simetris dan transitif disebut ekivalen graph.

Contoh :



Gambar 2.1.1.3 : Ekivalen graph

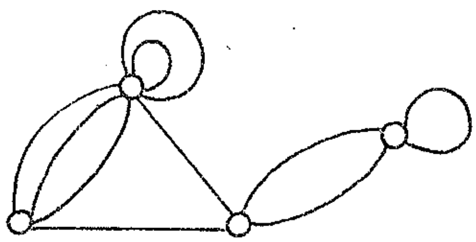
2.2.2. MULTIGRAPH

Graph G = (X,E) disebut multigraph (undirected graph) jika garis-garis graph dari G tidak mempunyai arah. Garis-garis graph dengan sifat demikian disebut Edge.

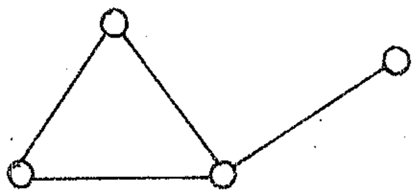
Multigraph disebut simple graph jika memenuhi :

1. Tidak mempunyai loop.
2. Tidak lebih dari satu edge yang menghubungkan 2 titik di dalam G.

Contoh :



Gambar 2.2.2 (a) : Multigraph



Gambar 2.2.2 (b) : Simple Graph

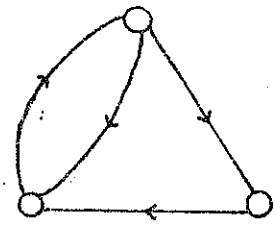
2.2.3. KOMPLIT GRAPH

Suatu graph $G = (X,U)$ disebut komplit graph jika memenuhi : $m_G(x,y) = m^+_G(x,y) + m^-_G(x,y) \geq 1, \forall x,y \in X$ dimana $x \neq y$.

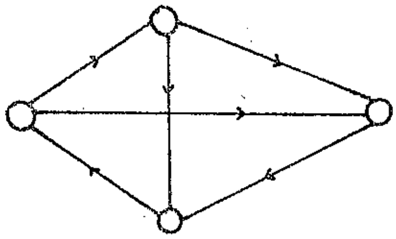
Sedangkan 1-graph $G = (X,\Gamma)$ disebut komplit graph jika ada hanya jika : $u\ (x,y) \notin U \implies u\ (y,x) \in U$.

Komplit graph ditulis dengan notasi K_n, untuk graph dengan n titik.

Contoh :



Gambar 2.2.3 (a) : K_3 adalah komplit graph dari graph $G = (X,U)$

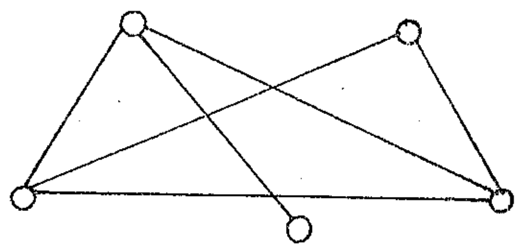


Gambar 2.2.3 (b) : K_4 adalah komplit graph dari 1-graph $G = (X,\Gamma)$

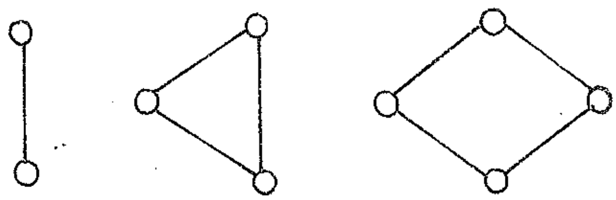
2.2.4. CONNECTED GRAPH

Suatu graph $G = (X,U)$ disebut connected jika dan hanya jika setiap 2 titik dihubungkan dengan paling sedikit satu chain dan jika tidak disebut disconnected graph. Komponen connected adalah : Maximal connected subgraph.

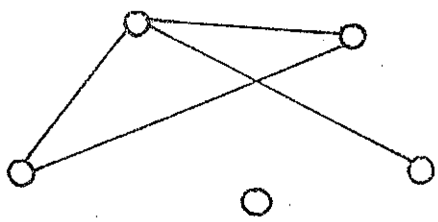
Contoh :



Gambar 2.2.4 (a) : Connected graph



Gambar 2.2.4 (b) : 3 Komponen connected graph

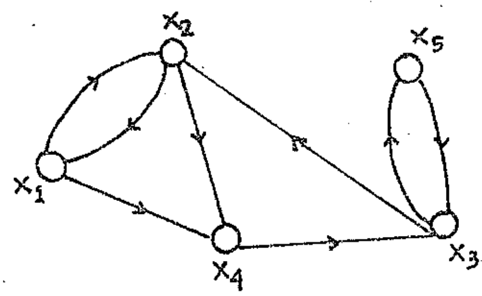


Gambar 2.2.4 (c) : Disconnected graph.

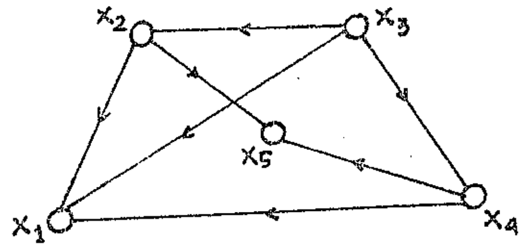
2.2.5. <u>CONNECTED KUAT DAN CONNECTED LEMAH</u>

Suatu graph G = (X,U) disebut connected kuat jika dan hanya jika setiap 2 titik dihubungkan dengan paling sedikit satu path dan jika ada 2 buah titik yang tidak dihubungkan dengan suatu path disebut connected lemah.

Contoh :



Gambar 2.2.5 (a) : Connected kuat



Gambar 2.2.5 (b) : Connected lemah

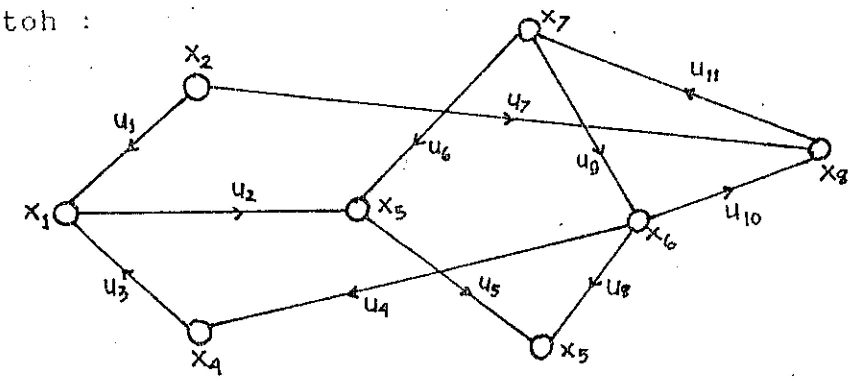
2.2.6. COVERING

DEFINISI 2.2.6 :

Jika setiap dua buah garis dalam graph G dihubungkan dengan sebuah titik maka himpunan titik-titik diatas disebut Point Cover dan jika sebaliknya maka himpunan garis-garisnya disebut : Line Cover.

Jumlah anggota terkecil dari keluarga himpunan-himpunan point cover/line cover disebut : Point covering number (α (G))/ Line covering number (δ (G)).

Contoh :



Gambar 2.2.6 : Graph G = (X,U), X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_8)$
dan U = $\{u_1, u_2, \ldots, u_{11}\}$.

α (G) = Min | $\{x_1, x_3, x_6, x_8\}, \{x_4, x_3, x_2, x_7, x_8\}$ |

= 4.

Jadi Point covering number dari graph G adalah 4.

δ (G) = Min | $\{u_1, u_4, u_5, u_{11}\}, \{u_3, u_5, u_7, u_8\}$ |

= 4.

Jadi line covering number dari graph G adalah 4.