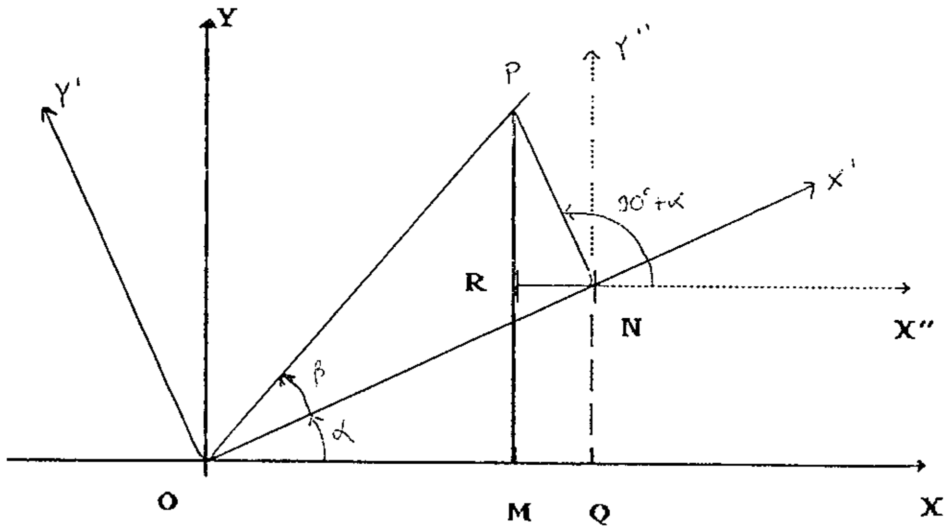
BAB II

MATERI DASAR

2.1. Fungsi Trigonometri

Ambil dua buah sudut α dan β. Sudut α dibentuk dengan salah satu kakinya berimpit dengan sumbu X sehingga X'OX adalah sudut α. Sudut β dibentuk dengan salah satu kakinya berimpit dengan OX' sehingga POX' adalah sudut β (lihat gambar 1). Dari P, digambar PN tegak lurus pada akhir dari sudut α dan PM tegak lurus pada awal dari sudut α. Melalui N digambar garis paralel dengan sumbu y dan sumbu x, garis pertama berpotongan dengan OX pada Q dan garis kedua berpotongan dengan MP pada R.



Gambar 1.

Anggaplah ON sebagai sumbu x positif baru dan OY' sebagai sumbu y positif baru. Juga anggaplah QNY" sebagai sumbu y positif baru dan NX" sebagai sumbu x positif baru.

Dari gambar, kita mendapatkan

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{MP}{OP} = \frac{MR + RP}{OP} = \frac{MR}{OP} + \frac{RP}{OP} = \frac{QN}{OP} + \frac{RP}{OP}$$

Jika kita mengalikan kedua pembilang dan penyebut dari pecahan pertama dengan ON, dan pecahan kedua dengan NP, kita mendapatkan

$$\frac{MP}{OP} = \frac{QN}{ON}\,\frac{ON}{OP} + \frac{RP}{NP}\,\frac{NP}{OP}$$

atau $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin(90°+\alpha)\sin\beta$.

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OQ - MQ}{OP} = \frac{OQ + QM}{OP} = \frac{OQ}{OP} + \frac{QM}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP} = \frac{OQ}{ON}\,\frac{ON}{OP} + \frac{NR}{NP}\,\frac{NP}{OP}$$

atau $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \cos(90°+\alpha)\sin\beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Karena persamaan (1) dan (2) berlaku untuk semua harga sudut, kita dapat menurunkan rumus untuk sinus dan cosinus dari $\alpha-\beta$, yaitu

(1) $\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)]$

$$= \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \qquad (3)$$

(2) $\cos (\alpha-\beta) = \cos [\alpha+(-\beta)]$

$$= \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \qquad (4)$$

Dari (1) dan (3) kita mendapatkan :

(1) $\sin (\alpha+\beta) + \sin (\alpha-\beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

(2) $\sin (\alpha+\beta) - \sin (\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

Dari (2) dan (4) :

(3) $\cos (\alpha+\beta) + \cos (\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

(4) $\cos (\alpha+\beta) - \cos (\alpha-\beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

2.2 Persamaan Differensial linier order dua homogen dengan koefisien konstan

Bentuk umum : $F (x, y', y'') = 0$

atau $P_o \dfrac{d^2y}{dx^2} + P_1 \dfrac{dy}{dx} + P_2 \, y = 0$

dengan P_o, P_1, P_2 berupa konstanta

Misal $D = \dfrac{d}{dx}$

$[P_o D^2 + P_1 D + P_2] \, y = 0$

$P_o D^2 + P_1 D + P_2 = 0$

$P_o (D-m_1)(D-m_2) = 0$

a. Jika $m_1 \neq m_2$ maka solusinya adalah

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

b. Jika $m_1 = m_2$ maka solusinya adalah

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$

c. Jika koefisien PD riil dan $m_1 = a + bi$ dan

$m_2 = a - bi$

maka penyelesaiannya adalah

$$y = e^{ax} [A \cos bx + B \sin bx]$$

2.3. DERET MACLAURIN

Suatu fungsi f(x) dapat dideretkan sebagai barisan polinomial $f_n(x)$ sebagai berikut

$$f_n(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots$$

dengan syarat $f_n(x)$ konvergen ke f(x) untuk $n \to \infty$

2.4 GERAKAN HARMONIK SEDERHANA

2.4.1. Gerakan Harmonik Sederhana.

Definisi 1.

Gerakan harmonik/periodik adalah gerakan partikel yang berulang dalam selang waktu yang sama yang dapat dinyatakan dalam fungsi sinus atau cosinus.

Definisi 2.

Gerakan osilasi atau gerakan getaran adalah gerakan periodik dari partikel yang bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama.

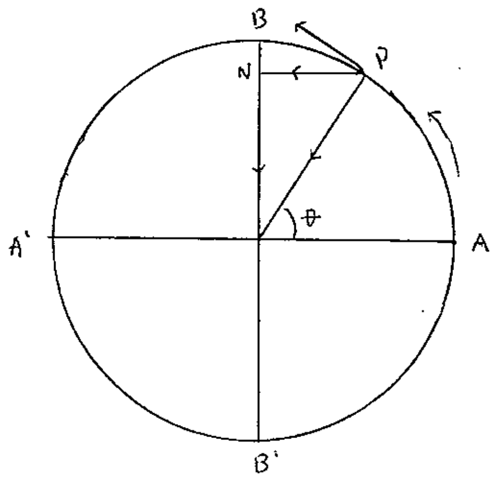
Definisi 3.

Gerakan harmonik sederhana adalah gerakan harmonik yang batas osilasinya berjarak sama terhadap titik setimbang.

Definisi 4.

Gerakan harmonik teredam adalah gerakan benda yang berosilasi yang gerak bolak-baliknya tidak tepat sama karena gaya gesekan melesapkan tenaga geraknya.

Ambil suatu partike P bergerak dengan kecepatan tetap, v, mengelilingi suatu lingkaran (Gambar 2) dan ambil N merupakan titik dari P tegaklurus pada diameter BB'. Sekarang perhatikan gerakan dari N yang disebabkan P bergerak satu putaran pada lingkaran dalam arah berlawanan jarum jam yang dimulai dari A. Pada saat P berada pada A, N berada pada pusat O; ketika P mencapai B, N bergerak sepanjang OB bertepatan dengan B. Karena P bergerak sepanjang bundaran dari B ke B', N berjalan dari B ke B′ sepanjang diameter dan karena P akhirnya kembali ke A mengakhiri satu putaran, N kembali ke O telah melintasi diameter BB′ dua kali. Gerakan osilasi N ini disekitar pusat O adalah 'gerakan harmonik sederhana'. Hal ini dapat dipandang sebagai proyeksi dari gerakan melingkar seragam pada diameter lingkaran



Gambar 2 : Gerakan Harmonik Sederhana

yang ditunjukkan sebagai lingkaran referensi dan titik P disebut titik referensi.

Definisi 5.

Periode suatu gerak harmonik adalah waktu yang dibutuhkan untuk menempuh satu lintasan lengkap dari geraknya, yaitu satu getaran penuh atau satu putaran.

Definisi 6.

Frekwensi adalah banyaknya getaran (atau putaran) tiap satuan waktu.

Definisi 7.

Posisi seimbang adalah posisi pada saat tidak ada gaya netto yang bekerja pada partikel yang berosilasi.

Definisi 8.

Perpindahan adalah jarak partikel yang berosilasi dari posisi setimbangnya pada sembarang saat.

Definisi 9.

Amplitudo gerakan harmonik sederhana adalah besarnya perpindahan maksimum dan selalu diambil harga positifnya.

Definisi 10.

Gaya pulih adalah gaya yang mempercepat partikel ke arah titik setimbangnya.

Ambil a sebagai jari-jari lingkaran dan θ sudut pada tiap saat yang dibuat oleh vektor putar OP dengan OA. Kecepatan sudut ω dari P adalah v/a dan perpindahan N dari O diberikan oleh

$$y = a \sin \theta$$

Jika t detik adalah waktu dimana OP menggambarkan sudut θ, dan ω adalah kecepatan angular, maka $\theta = \omega t$ dan dapat kita tuliskan

$$y = a \sin \omega t \tag{1}$$

Jari - jari a dari lingkaran referensi atau perpindahan maksimum dari N pada kedua sisi dari O disebut amplitudo.

'Periode waktu' dari gerakan sama dengan waktu yang digunakan oleh P bergerak satu putaran , pada lingkaran. Karena kecepatan angular adalah ω, maka periode waktunya $T=2\pi/\omega$ dan frekwensi yaitu jumlah getaran per detik diberikan oleh

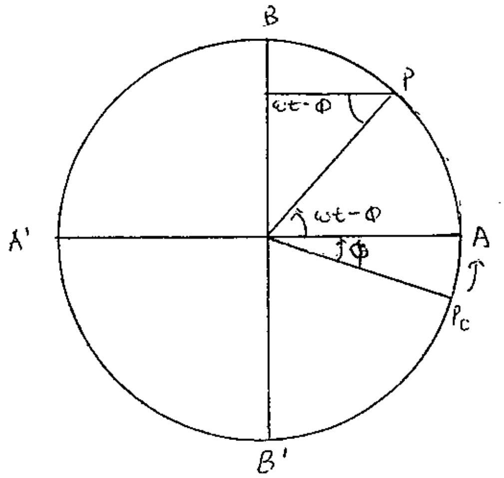
$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2}$$

Persamaan (1) menyatakan perpindahan dari partikel dapat ditulis sebagai

$$y = a \sin 2\pi t/T = a \sin 2\pi nt \tag{3}$$

2.4.2. *Fasa dan Jangka Waktu*

Kita telah melihat diatas bahwa perpindahan dari N adalah $y = a \sin \omega t$, dengan asumsi bahwa kita mulai menghitung waktu ketika P melintasi absis x. Jika pengukuran waktu dari saat khusus, hal ini diukur dari saat berhenti jika P pada P_o dimana $\angle AOP_o = \phi$, perpindahan ON diberikan oleh $y = a \sin (\omega t-\phi)$ karena



Gambar 3 : Fasa dan Jangka Waktu

$\angle AOP = (\omega t-\phi)$. Sudut $(\omega t-\phi)$ disebut fasa getaran. Harga fasa itu jika t=0, yaitu $-\phi$ disebut 'Jangka Waktu' atau fasa awal.

Jika kita mulai menghitung waktu pada saat P telah melintasi absis x dan posisi awalnya pada sisi lain dari A, kemudian menyebut sudut awal ini ϕ seperti sebelumnya, perpindahan setelah waktu t diberikan dengan $y = a \sin (\omega t+\phi)$, karena $(\omega t+\phi)$ adalah fasa getaran.

2.4.3. Persamaan Differensial Gerakan Harmonik Sederhana.

Dengan dengan mendifferensialkan persamaan (1) terhadap dengan waktu kita mendapat kecepatan dari N,

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \cos \omega t.$$

Mendefferensialkan lagi, kita mendapatkan akselerasi N,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - a\omega^2 \sin \omega t$$

$$= - \omega^2 y, \qquad (4)$$

atau

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,} \qquad (5)$$

dimana ω^2 adalah konstanta.

Persamaan (5) dinamakan "Persamaan Differensial" dari Gerakan Harmonik Sederhana.

Ambil $v = \dfrac{dy}{dt}$, sehingga $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)$

$$= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

Persamaan (4) kemudian menjadi

$$v \frac{dv}{dy} = - \omega^2 y,$$

atau $\quad v\, dv = - \omega^2 y\, dy,$

Dengan mengintegralkannya kita memperoleh

$$\int v\, dv = \int - \omega^2 y\, dy = - \omega^2 \int y\, dy,$$

atau $$\frac{v^2}{2} = -\frac{\omega^2}{2} y^2 + C,$$

dimana C adalah konstanta dari pengintegralan dan ditentukan oleh kondisi dari patikel pada pertimbangan sesaat.

Untuk perpindahan ekstreem, amplitudonya maksimum sehingga :

$$y = a \text{ atau } y = -a \qquad \text{dan } v = 0,$$

Jadi $$0 = -\frac{\omega^2 a^2}{2} + C \text{ atau } C = \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

Dengan demikian $$\frac{v^2}{2} = \frac{\omega^2 a^2}{2} - \frac{\omega^2 y^2}{2},$$

atau $$v^2 = \omega^2 (a^2 - y^2),$$

atau $$v = \omega \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Ini menyatakan kecepatan dari partikel pada tiap saat.

Dengan menuliskan $\frac{dy}{dt}$ untuk v, kita mendapat

$$\frac{dy}{dt} = \omega \sqrt{a^2 - y^2},$$

atau $$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \omega \, dt.$$

Dengan mengintegralkan itu, kita mendapatkan

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \int \omega\ dt,$$

atau $$\sin^{-1}\frac{y}{a} = \omega t + \phi\ ,$$

ϕ adalah suatu konstanta integrasi yang ditentukan oleh syarat awal.

Dapat ditulis sebagai

$$y = a \sin (\omega t + \phi). \qquad (6)$$

Dengan memperluas persamaan itu, kita mendapatkan

$$y = a \cos \phi \sin \omega t + a \sin \phi \cos \omega t,$$

dimana a cos ϕ dan a sin ϕ adalah konstanta baru. Kita menyatakannya sebagai A dan B.

Jelasnya persamaan itu dapat kita nyatakan dengan rumus

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \qquad (7)$$

dan dalam kejadian khusus baik A atau B dapat berharga nol.

Periode dari getaran dapat dengan mudah disimpulkan. Jika kita mulai menghitung waktu ketika perpindahan mencapai maksimum, yaitu, t=0 ketika y = a, kita mendapatkan dari persamaan (6),

$\sin \phi = 1$ atau $\phi = \pi/2$ dan

$$y = a \sin(\omega t + \pi/2) = a \cos \omega t.$$

Setiap saat ωt meningkat sebesar 2π, perpindahan berulang dengan sendirinya karena $\cos(\omega t+2\pi) = \cos \omega t$.

Dengan menulis $a \cos(\omega t+2\pi) = a \cos \omega(t+2\pi/\omega)$, kita mendapatkan bahwa y berulang dengan sendirinya pada interval $2\pi/\omega$. Dengan demikian periode waktu T sama dengan $2\pi/\omega$.

2.4.4. *Elastisitas dan Getaran Harmonik Sederhana.*

Bilamana suatu sistim dari gaya diterapkan untuk mengubah volume atau bentuk dari suatu benda, kita melihat bahwa sesudah perpindahan dari gaya yang mempengaruhi, benda itu kembali pada volume atau bentuk asalnya karena sifat dari gaya reaksi dalam yang diberikannya. Sifat seperti ini dari suatu benda dinamakan Elastisitas. Tidak ada obyek yang elastis sempurna dan pengukuran dari sifat ini bervariasi dengan sifat dasar dari obyek. Suatu gaya lawan yang diberikannya dinamakan *Stress*, dan perubahan bentuk dalam suatu benda yang disebabkan karena perpindahan relatif dari partikelnya disebut *Strain*.

Strain simpel terdiri dari tiga macam :

(a) Perubahan dari panjang Strain,

(b) Perubahan volume strain, dan

(c) Perubahan bentuk strain.

Robert Hooke (1635-1703) menemukan hukum dasar yang ada antara gaya lawan dan akibat perubahan bentuk dari suatu benda elastik. Sesuai dengan hukum ini "Stress selalu sebanding dengan strain", apapun tipe dari strain; yaitu, perbandingan stress/strain adalah konstan. Harga dari konstanta ini untuk beberapa bahan diambil sebagai ukuran dari "*Elastisitas*" nya. Hukumnya benar untuk perpindahan yang kecil dan memegang pada *batas elastisitas. (Dalam suatu hal benda padat terdapat batas lebih dimana perubahan bentuk tidak dapat hilang jika benda itu akan menemukan bentuk asalnya. Sebagai contoh, jika gaya melebihi harga tertentu, maka benda itu memperoleh suatu perubahan bentuk yang permanen. Hal ini kemudian dikatakan, perubahan bentuk melebihi "batas elastisitas")*.

Kebanyakan getaran suara disebabkan oleh sifat dari elastisitas ini yang dimiliki oleh benda. Getaran dari gigi garpu tala, gerakan dari senar suatu biola dan udara dalam seruling, adalah semua disebabkan oleh sifat ini. Bila suatu benda dirubah bentuknya, hal ini membutuhkan energi potensial yang sama dengan jumlah untuk mengembalikan perubahan bentuk itu. Pada pembebasan itu, gaya yang menyebabkan elastisitas mulai untuk mengembalikan pada posisi setimbang dengan meningkatkan kecepatan dan suatu perpindahan dari energi potensial ke energi kinetik mulai terjadi. Ketika benda itu mencapai posisi tengahnya, seluruh energi potensialnya diubah menjadi energi kinetik, dan saat itu tidak ada perubahan bentuk dan tidak ada gaya elastik. Tetapi karena memiliki daya gerak, benda berayun pada tiap sisi dan suatu perubahan dari energi kinetik menjadi energi potensial terjadi sampai pada ekstreem akhir dari ayunan keseluruhan dari energi adalah potensial lagi. Benda segera berhenti dan kemudian meloncat kembali. Jika tidak ada kehilangan energi, benda itu akan meneruskan untuk bergetar mondar mandir tanpa mengurangi amplitudo. Tetapi dalam kejadian nyata energi hilang dalam berbagai cara; sebagian energi dari getaran berpindah ke udara dalam bentuk gelombang, sebagian dipakai dalam mengatasi gesekan dalam dan dikonversikan menjadi panas dan lain sebagainya. Sebagai akibat dari kehilangan ini getaran secara bertahap hilang sampai keseluruhan energi hilang dan akhirnya benda menjadi berhenti.

Hal ini jelas dari hukum Hooke bahwa gaya yang dibawa tiap partikel kembali pada posisi tengahnya sebanding dengan perpindahannya dari posisi tengahnya. Dengan demikian getaran dilakukan oleh suatu benda dibawah aksi dari gaya elastisitas memenuhi sifat dari suatu gerakan Harmonik Sederhana yang digambarkan diatas dan karena itulah pentingnya dari getaran elastis dalam teori suara.