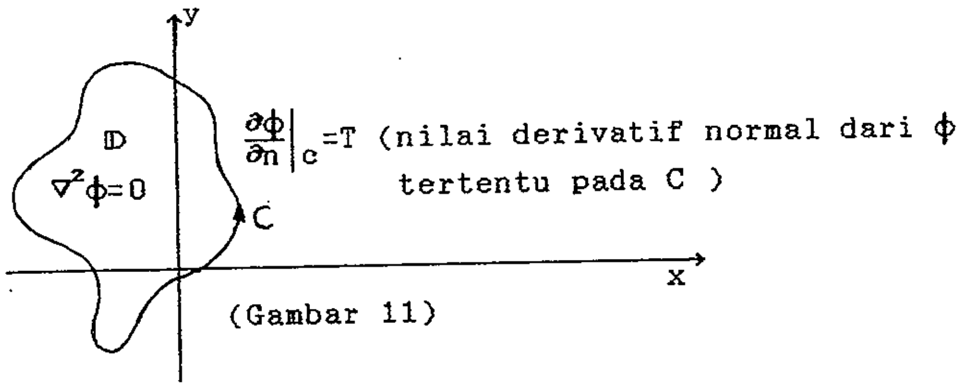
BAB V

PERSOALAN NEUMANN

Suatu persoalan nilai batas yang penting lainnya setelah persoalan Dirichlet, yang akan dibahas dalam bab ini adalah nilai batas jenis kedua (the boundary value problem of the second kind) atau disebut persoalan Neumann.

V.1 PERSOALAN NEUMANN

Persoalan Neumann adalah persoalan mencari suatu fungsi ϕ yang harmonis dalam domain D dan memenuhi syarat :
nilai derivatif normal dari ϕ tertentu pada kontur C.



(Gambar 11)

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot \bar{N}$$

$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ = derivatif normal dari ϕ

$\nabla\phi$ = normal dari ϕ

$\bar{N}$ = normal satuan dari kontur C

Definisi 14

Fungsi f(z) disebut cabang dari fungsi berharga banyak F(z) apabilaf(z) merupakan fungsi beharga satu yang analitik didalam suatu domain, dan disetiap titik didalam domain itu harga dari f(z) adalah salah satu dari harga-harga F(z).

V.2 PERSOALAN NEUMANN UNTUK LINGKARAN

Persoalan Neumann untuk lingkaran adalah persoalan Neumann dengan domain yang berupa daerah didalam lingkaran.

Teorema V.1

Apabila $s=r_oe^{i\Theta}$ dan $z=re^{i\Theta}$, dimana $r<r_o$, maka fungsi :

$$Q(r_o,r,\emptyset-\Theta) = -2r_o\log|s-z|$$
$$= -r_o\log(r_o^2-2r_or\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)$$

harmonis terhadap variabel r dan Θ didalam lingkaran $|z|=r_o$.

Bukti :

$$\text{Fungsi } F(z) = -2r_o\log(s-z)$$
$$= -2r_o\log(|s-z|e^{i(\arg(s-z)+2n\pi)})$$
$$= -2r_o\log|s-z| - i2r_o(\arg(s-z)+2n\pi)$$
$$n = 0,\pm1,\pm2,...$$

adalah fungsi berharga banyak. Apabila diambil

$$f(z) = -2r_o\log|s-z| - i2r_o\arg(s-z)$$

maka f(z) merupakan harga utama dari F(z) yang juga merupakan cabang dari F(z). Dengan demikian f(z) merupakan fungsi analitik. Dan karena $-2r_o\log|s-z|$ merupakan komponen real dari f(z), maka $Q(r_o,r,\emptyset-\Theta) = -2r_o\log|s-z|$ harmonis terhadap variabel r dan Θ di dalam lingkaran $|z|=r_o$

Teorema V.2

Apabila G suatu fungsi yang kontinu bagian demi bagian dari θ, untuk $0\leq\theta\leq2\pi$ dan

$$\int_0^{2\pi} G(\emptyset)d\emptyset = 0$$

maka

$$U(r,\theta)=-\frac{r_o}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\theta)+r^2)G(\emptyset)d\emptyset + U_o \quad ..(5.1)$$

$$(r<r_o)$$

(dimana U_o adalah suatu konstanta), harmonis didalam lingkaran $|z|=r_o$ dan memenuhi syarat batas:

$$\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} U_r(r,\theta) = G(\theta) \quad ....(5.2)$$

$\forall\theta$, dimana $G(\theta)$ kontinu

<u>Bukti</u> :

$$U(r,\theta)=-\frac{r_o}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\theta)+r^2)G(\emptyset)d\emptyset + U_o$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset + U_o$$

$$\nabla^2 U = \nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset + U_o\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\emptyset).\nabla^2 Q(r_o,r,\emptyset-\theta)d\emptyset + 0$$

Karena $Q(r_o,r,\emptyset-\theta)$ harmonis, maka $\nabla^2 Q(r_o,r,\emptyset-\theta)=0$, sehingga

$$\nabla^2 U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\emptyset).0.d\emptyset$$

$$= 0$$

Jadi $U(r,\theta)$ harmonis didalam lingkaran $|z|=r_o$.

$$U_r(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{r_o}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\theta)+r^2)G(\emptyset)d\emptyset + U_o\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial Q(r_o,r,\emptyset-\theta)}{\partial r}G(\emptyset)d\emptyset$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-r_o \log(r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2)\right)$$

$$= \frac{-r_o(-2r_o\cos(\varnothing-\theta)+2r)}{r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2}$$

$$= \frac{-r_o}{r}\left(\frac{r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2}{r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2} - \frac{r_o-r^2}{r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2}\right)$$

$$= \frac{r_o}{r}\,(P(r_o,r,\varnothing-\theta) - 1)$$

$$U_r(r,\theta) = \frac{r_o}{2\pi r_o}\int_0^{2\pi} (P(r_o,r,\varnothing-\theta) - 1)G(\varnothing)d\varnothing$$

Karena $\int_0^{2\pi} G(\varnothing)d\varnothing = 0$, maka

$$U_r(r,\theta) = \frac{r_o}{r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_o,r,\varnothing-\theta)G(\varnothing)d\varnothing$$

$$\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} U_r(r,\theta) = \lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} \frac{r_o}{r}\cdot\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_o,r,\varnothing-\theta)G(\varnothing)d\varnothing$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dan (4.2) dalam teorema IV.1

$$\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_o,r,\varnothing-\theta)G(\varnothing)d\varnothing = G(\theta)$$

Jadi

$$\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} U_r(r,\theta) = 1.G(\theta) = G(\theta)$$

Jika $r=0$, maka $Q(r_o,r,\varnothing-\theta)=-r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2)$
$=-r_o\log r_o^2$

Karena $Q(r_o,r,\varnothing-\theta)$ berharga konstan pada $r=0$, maka U_o merupakan harga dari $U(r,\theta)$ pada pusat lingkaran $|z|=r_o$. $U_r(r,\theta)$ merupakan turunan normal terhadap lingkaran $|z|=r_o$ dan bernilai $G(\theta)$ pada $r=r_o$.

$$U(r,\theta)=-\frac{r_o}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(r_o^2-2r_o r\cos(\varnothing-\theta)+r^2)G(\varnothing)d\varnothing + U_o$$

$$(r<r_o)$$

merupakan solusi dari persoalan Neumann untuk domain yang berupa daerah didalam lingkaran $|z|=r_o$ yang memenuhi syarat batas:

$$\lim_{\substack{r \to r_o \\ r < r_o}} U_r(r,\theta) = G(\theta)$$

Teorema V.3

Bila fungsi $G(\theta)$ dalam teorema V.2 mempunyai sifat $G(2\pi-\theta)=-G(\theta)$, maka

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q(r_o,r,\emptyset-\theta) - Q(r_o,r,\emptyset+\theta))G(\emptyset)d\emptyset + U_o \quad \ldots(5.3)$$

harmonis didalam setengah lingkaran atas $r<r_o$, $0<\theta<\pi$ dan memenuhi syarat batas :

$$\left.\begin{array}{l} U(r,0) = U(r,\pi) = U_o \\ \lim\limits_{\substack{R \to r_o \\ R < r_o}} U_r(r,\theta) = G(\theta) \quad \forall\theta,\ \text{dimana } G(\theta) \text{ kontinu} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(5.4)$$

(U_o= konstanta)

Bukti :

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset + U_o$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset + U_o$$

Untuk $\pi<\emptyset<2\pi$ diadakan substitusi $\emptyset=2\pi-\lambda$

$$\emptyset = \pi \longrightarrow \lambda = \pi$$

$$\emptyset = 2\pi \longrightarrow \lambda = 0$$

$$G(\emptyset) = G(2\pi-\lambda) = -G(\lambda)$$

$$d\emptyset = -d\lambda$$

$$Q(r_o,r,\emptyset-\theta) = -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\theta)+r^2)$$

$$= -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos(2\pi-(\lambda+\theta))+r^2)$$

$$= -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos(\lambda+\theta)+r^2)$$

$$= Q(r_o,r,\lambda+\theta)$$

Sehingga

$$U(r,\theta)-U_o=\frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{o} Q(r_o,r,\lambda+\theta)G(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset - \frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi} Q(r_o,r,\lambda+\theta)G(\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi} Q(r_o,r,\emptyset-\theta)G(\emptyset)d\emptyset - \frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi} Q(r_o,r,\emptyset+\theta)G(\emptyset)d\emptyset$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi}\left[Q(r_o,r,\emptyset-\theta) - Q(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset$$

Karena fungsi $Q(r_o,r,\emptyset-\theta)$ dan $Q(r_o,r,\emptyset+\theta)$ harmonis didalam lingkaran $|z|=r_o$, maka fungsi $U(r,\theta)$ juga harmonis didalam lingkaran $|z|=r_o$.Dengan demikian $U(r,\theta)$ harmonis didalam daerah setengah lingkaran atas $r<r_o$, $0<\theta<\pi$.

Untuk $\theta=0$

$$Q(r_o,r,\emptyset+\theta) = -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos\emptyset+r^2)$$

$$Q(r_o,r,\emptyset-\theta) = -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos\emptyset+r^2)$$

$$= Q(r_o,r,\emptyset+\theta)$$

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{\pi}\left[Q(r_o,r,\emptyset-\theta) - Q(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset + U_o$$

$$= U_o$$

atau $U(r,0)=U_o$

Untuk $\theta=\pi$

$$Q(r_o,r,\emptyset+\theta) = -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset+\pi)+r^2)$$
$$= -r_o\log(r_o^2+2r_o r\cos\emptyset+r^2)$$
$$Q(r_o,r,\emptyset-\theta) = -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\pi)+r^2)$$
$$= -r_o\log(r_o^2-2r_o r\cos\emptyset+r^2)$$
$$= Q(r_o,r,\emptyset+\theta)$$

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Q(r_o,r,\emptyset-\theta) - Q(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset + U_o$$

$$= U_o$$

atau $U(r,\pi) = U_o$

$$U_r(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Q(r_o,r,\emptyset-\theta) - Q(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset+U_o\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left[Q(r_o,r,\emptyset-\theta) - Q(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset$$

$$= \frac{r_o}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[P(r_o,r,\emptyset-\theta)-1-(P(r_o,r,\emptyset+\theta)-1)\right]G(\emptyset)d\emptyset$$

$$= \frac{r_o}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[P(r_o,r,\emptyset-\theta) - P(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset$$

$$\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} U_r(r,\theta) =$$

$$\lim_{r\to r_o}\frac{r_o}{r} + \lim_{r\to r_o}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[P(r_o,r,\emptyset-\theta) - P(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset$$

Berdasarkan persamaan (4.7) dan (4.8) dalam teorema IV.2,

maka $\displaystyle\lim_{r\to r_o}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[P(r_o,r,\emptyset-\theta) - P(r_o,r,\emptyset+\theta)\right]G(\emptyset)d\emptyset = G(\theta)$

Sehingga

$$\lim_{\substack{r\to r_o\\ r<r_o}} U_r(r,\theta) = 1.G(\theta) = G(\theta)$$

$\forall\theta, 0<\theta<\pi$ dimana $G(\theta)$ kontinu

V.3 PERSOALAN NEUMANN UNTUK SETENGAH BIDANG

Persoalan Neumann untuk setengah bidang adalah persoalan Neumann dengan domain yang berbentuk daerah setengah bidang. Domain ini dibatasi oleh sumbu koordinat (sumbu real x) sebagai konturnya.

Teorema V.4

Misalkan G(x) fungsi yang kontinu bagian demi bagian untuk setiap bilangan real x, kecuali untuk sejumlah hingga x dimana G(x) diskontinu, maka ∀t real

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o \quad . . . (5.5)$$

$$(y>0)$$

dimana U_o adalah suatu konstanta real, adalah harmonis dalam bidang Im z>0 dan memenuhi syarat

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} U_y(x,y) = G(x) \quad . . . . . . (5.6)$$

$$\forall x, \text{ dimana } G(x) \text{ kontinu}$$

<u>Bukti</u> :

Fungsi F(z) = log(z-t)

$= \log |z-t|+i(\arg(z-t)+2n\pi),(n=0,\pm1,\pm2,...)$

adalah fungsi berharga banyak.

Karena fungsi $f(z) = \log|z-t|+i(\arg(z-t)$ merupakan cabang dari fungsi berharga banyak F(z), maka f(z) analitik didalam daerah Im z>0. Oleh karena $\log|z-t| = \log((t-x)^2+y^2)$ adalah komponen real dari f(z), maka $\log((t-x)^2+y^2)$ akan harmonis didalam daerah Im z>0 atau $\nabla^2\log((t-x)^2+y^2)=0$

$$\nabla^2 U(x,y) = \nabla^2\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2(\log((t-x)^2+y^2))G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 0.G(t)dt$$

$$= 0$$

Jadi $U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o$ harmonis dalam domain Im z>0.

$$U_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\, G(t)dt$$

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} U_y(x,y) = \lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\, G(t)dt$$

menurut persamaan (4.14) dan (4.15) dalam teorema IV. 4, maka

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\, G(t)dt = G(x)$$

sehingga

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} U_y(x,y) = G(x) \qquad \forall x, \text{ dimana } G(x) \text{ kontinu}$$

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o$$

adalah penyelesaian dari persoalan Neumann untuk domain yang berbentuk setengah bidang y>0, yang memenuhi syarat batas

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} U_y(x,y) = G(x) \qquad \forall x, \text{ dimana } G(x) \text{ kontinu}$$

$U_y(x,y)$ merupakan turunan normal dari U(x,y), yang mempunyai nilai G(x) pada batas bidang Im z>0 atau pada y=0.

Teorema V.5

Misalkan fungsi G(x) kontinu bagian demi bagian untuk setiap bilangan real x, kecuali untuk sejumlah hingga x dimana G(x) diskontinu dan G(x) merupakan fungsi ganjil maka

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \log\left\{\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right\}G(t)dt \quad . . . (5.7)$$

harmonis dalam kuadran pertama (x>0,y>0),dan memenuhi syarat batas :

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U_y(x,y) = G(x) \quad \forall x, \text{ dimana } G(x) \text{ kontinu} \qquad \text{dan } U(0,y)=0$$

<u>Bukti</u> :

Dari teorema V.4 tanpa menuliskan U_o

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt$$

untuk $-\infty<t<0$

disubstitusikan $t=-\alpha$

$$t=-\infty \longrightarrow \alpha=\infty$$

$$t=0 \longrightarrow \alpha=0$$

$$G(t) = G(-\alpha) = -G(\alpha)$$

$$dt = -d\alpha$$

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0} \log((-\alpha-x)^2+y^2)(-(G(\alpha))(-d\alpha)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\log((t-x)^2+y^2)G(t)dt - \log((\alpha+x)^2+y^2)G(\alpha)d\alpha\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\log((t-x)^2+y^2) - \log((t+x)^2+y^2)\right\}G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \log\left\{\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right\}G(t)dt$$

Karena $\log((t-x)^2+y^2)$ dan $\log((t+x)^2+y^2)$ harmonis dalam daerah kuadran pertama $(x>0,\ y>0)$, maka $\nabla^2\log((t-x)^2+y^2)=0$ dan $\nabla^2\log((t+x)^2+y^2)=0$ sehingga

$$\nabla^2 U(x,y) = \nabla^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \log\left\{\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right\}G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left\{\nabla^2\log((t-x)^2+y^2) - \nabla^2\log((t+x)^2+y^2)\right\}G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 0.G(t)dt$$

$$= 0$$

Dengan demikian $U(x,y)$ harmonis dalam kuadran pertama $(x>0,y>0)$.

$$U(0,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \log\left\{\frac{t^2+\ y^2}{t^2+\ y^2}\right\}G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \log\ 1\ .G(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 0.G(t)dt$$

$$= 0$$

$$U_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\log\left\{\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right\}G(t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\log\left\{\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}\right\}\right\}G(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{y}{(t-x)^2+y^2} - \frac{y}{(t+x)^2+y^2}\right\}G(t)dt$$

Dari persamaan (4.18) dan (4.20) dalam teorema IV.5, maka

$$\lim_{\substack{y \to o \\ y > o}} U_y(x,y) = G(x) \qquad \forall x, \text{ dimana } G(x) \text{ kontinu}$$

V.4 CONTOH - CONTOH

Contoh 1 :

Tentukan fungsi harmonis $U(x,y)$ didalam bidang Im $z>0$ $(y>0)$ yang memenuhi syarat batas :

nilai turunan normal pada sumbu x diberikan oleh

$$\lim_{y \to 0} U_y(x,y) = G(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

Jawab :

Untuk menentukan solusi dari persoalan ini dapat digunakan integral poisson untuk setengah bidang. Dalam teorema V.4 $U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o$ mempunyai turunan normal $U_y(x,y)$ pada sumbu x, yaitu:

$$U_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,G(t)dt$$

$$U_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t-x}{y}\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t-x}{y}\Big|_0^b$$

$$=- \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{-x}{y} + \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a-x}{y} -$$

$$+ \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b-x}{y} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{-x}{y}$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} .$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

$$U(x,y) = \int U_y(x,y)dy + U_o$$

$$= \frac{2}{\pi}\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}dy + U_o$$

$$= \frac{2}{\pi}y \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} - \frac{2}{\pi}\int y\, d(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}) + U_o$$

$$= \frac{2}{\pi}y \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} + \frac{2x}{\pi}\int \frac{y}{x^2+y^2}dy + U_o$$

$$= \frac{2}{\pi}y \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} + \frac{x}{\pi}\log(x^2+y^2) + U_o$$

Jadi fungsi harmonis tersebut adalah

$$U(x,y) = \frac{2}{\pi}y \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} + \frac{x}{\pi}\log(x^2+y^2) + U_o$$

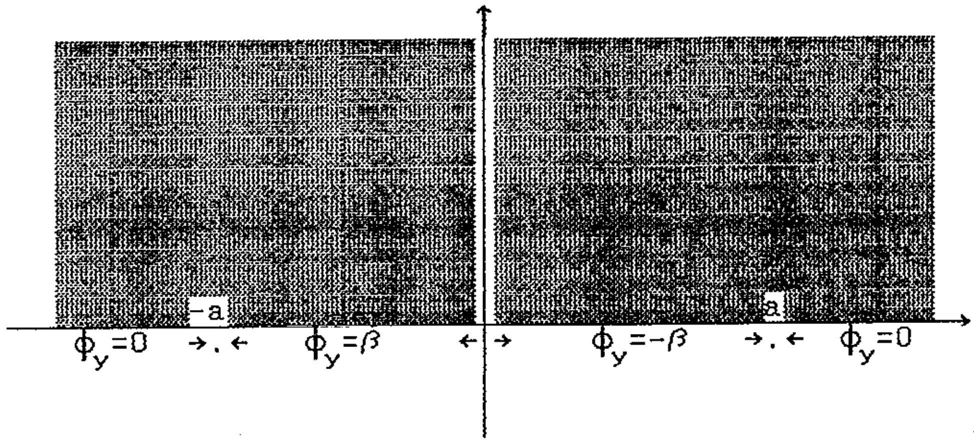
dengan U_o adalah konstanta real sebarang.

Contoh 2 :

Selesaikan persoalan Neumann $\phi_{xx}(x,y)+\phi_{yy}(x,y)=0 \ (y>0)$ yang memenuhi syarat batas sebagai berikut :

$$\phi_y(x,y) = \begin{cases} 0 \ ; \ x<-a \\ \beta \ ; -a<x<0 \\ -\beta \ ; \ 0<x<a \\ 0 \ ; \ x>a \end{cases}$$

Jawab



Permasalahannya adalah persoalan Neumann dalam setengah bidang

Cara 1.

Menggunakan turunan normal yang berbentuk integral poisson dalam setengah bidang.

$$\phi_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\ G(t)dt$$

$$= \frac{\beta}{\pi}\int_{-a}^{o} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt + \frac{-\beta}{\pi}\int_{o}^{a} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$= \frac{\beta}{\pi}\left[\text{arc tg } \frac{t-x}{y}\ \right|_{-a}^{o} - \frac{\beta}{\pi}\left[\text{arc tg } \frac{t-x}{y}\ \right|_{o}^{a}$$

$$= \frac{\beta}{\pi}\left[\text{arc tg } \frac{-x}{y} - \text{arc tg } \frac{-a-x}{y}\right]$$

$$- \frac{\beta}{\pi}\left[\text{arc tg } \frac{a-x}{y} - \text{arc tg } \frac{-x}{y}\right]$$

$$= -\frac{2\beta}{\pi} \text{ arc tg } \frac{x}{y}$$

$$+ \frac{\beta}{\pi} \left[\text{arc tg } \frac{a+x}{y} - \text{arc tg } \frac{a-x}{y}\right]$$

$$\phi(x,y) = \int \phi_y(x,y)\, dy + U_o$$

$$= -\frac{2\beta}{\pi}\left[y \text{ arc tg } \frac{x}{y} + \frac{x}{2} \log(x^2+y^2)\right]$$

$$+ \frac{\beta}{\pi}\left[y \text{ arc tg } \frac{a+x}{y} + \frac{a+x}{2} \log((a+x)^2+y^2)\right]$$

$$- \frac{\beta}{\pi}\left[y \text{ arc tg } \frac{a-x}{y} + \frac{a-x}{2} \log((a-x)^2+y^2)\right]$$

$$= -\frac{\beta}{\pi} x \log(x^2+y^2) - \frac{2\beta}{\pi} y \text{ arctg } \frac{x}{y}$$

$$+ \frac{\beta}{\pi} y \left[\text{arc tg } \frac{a+x}{y} - \text{arc tg } \frac{a-x}{y}\right]$$

$$+ \frac{\beta}{2\pi} y\left[(a+x)\log((a+x)^2+y^2)-(a-x)\log((a-x)^2+y^2)\right]+U_o$$

Cara 2.

Langsung menggunakan formula

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log((t-x)^2+y^2)G(t)dt + U_o$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\int_{-a}^{o} \log((t-x)^2+y^2)dt - \frac{\beta}{2\pi}\int_{o}^{a} \log((t-x)^2+y^2)dt$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\left[(t-x)\log((t-x)^2+y^2)+2y \text{ arctg } \frac{t-x}{y} - 2t\right]_{-a}^{o}$$

$$- \frac{\beta}{2\pi}\left[(t-x)\log((t-x)^2+y^2)+2y \text{ arctg } \frac{t-x}{y} - 2t\right]_{o}^{a}$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\left[-x\log(x^2+y^2)-(-a-x)\log((-a-x)^2+y^2)\right.$$

$$\left.+2y\left[\text{arc tg}\ \frac{-x}{y}-\text{arc tg}\ \frac{-a-x}{y}\right]-2(0-(-a))\right]$$

$$-\frac{\beta}{2\pi}\left[(a-x)\log((a-x)^2+y^2)-(-x)\log((-x)^2+y^2)\right.$$

$$\left.+2y\left[\text{arc tg}\ \frac{a-x}{y}-\text{arc tg}\ \frac{-x}{y}\right]-2(a-0)\right]$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\left[(a+x)\log((a+x)^2+y^2)-x\log(x^2+y^2)\right.$$

$$\left.+2y\left[\text{arc tg}\ \frac{a+x}{y}-\text{arc tg}\ \frac{x}{y}\right]-2a\right]$$

$$-\frac{\beta}{2\pi}\left[(a-x)\log((a-x)^2+y^2)+x\log(x^2+y^2)\right.$$

$$\left.+2y\left[\text{arc tg}\ \frac{a-x}{y}+\text{arc tg}\ \frac{x}{y}\right]-2a\right]$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\,y\left[(a+x)\log((a+x)^2+y^2)-(a-x)\log((a-x)^2+y^2)\right]$$

$$-\frac{\beta}{\pi}\,x\,\log(x^2+y^2)-\frac{2\beta}{\pi}\,y\ \text{arctg}\ \frac{x}{y}$$

$$+\frac{\beta}{\pi}\,y\left[\text{arc tg}\ \frac{a+x}{y}-\text{arc tg}\ \frac{a-x}{y}\right]$$

Contoh 3

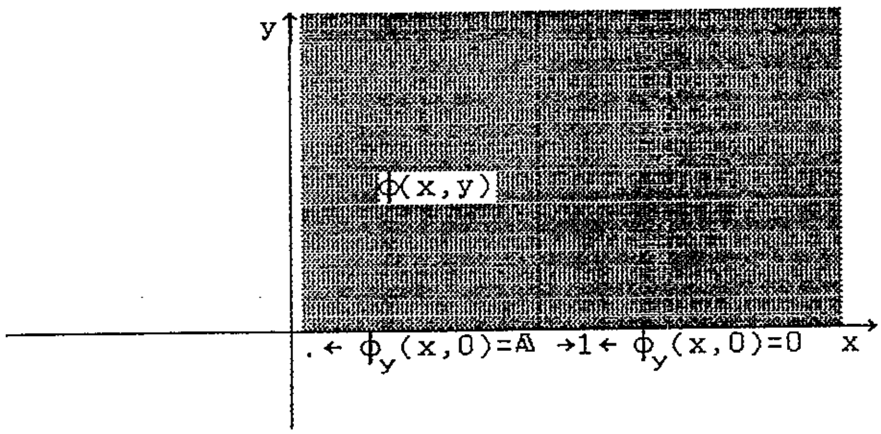
Selesaikan persoalan syarat batas dalam kuadran pertama $(x>0, y>0)$ sebagai berikut :

$$\phi_{xx}(x,y)+\phi_{yy}(x,y)=0$$

$$\phi(0,y)=0$$

$$\lim_{y \to 0} \phi_y(x,y) = \begin{cases} A & ; \ 0<x<1 \\ 0 & ; \ x>1 \end{cases}$$

Jawab



Dari teorema V.5 $\quad \phi(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \log\left\{ \dfrac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2} \right\} G(t)dt$

$$\phi_y(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \frac{y}{(t-x)^2+y^2} - \frac{y}{(t+x)^2+y^2} \right\} G(t)dt$$

$$= \frac{A}{\pi}\int_0^{1} \left\{ \frac{y}{(t-x)^2+y^2} - \frac{y}{(t+x)^2+y^2} \right\} G(t)dt$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{t-x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{t+x}{y} \right]_0^1$$

$$= \frac{A}{\pi}\left\{ \operatorname{arctg}\frac{1-x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{1+x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{-x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \right\}$$

$$= \frac{A}{\pi}\left\{ \operatorname{arctg}\frac{1-x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{1+x}{y} + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} \right\}$$

$$\phi(x,y) = \int \phi_y(x,y)dy$$

$$= \int \frac{A}{\pi} \left\{ \text{arctg} \frac{1-x}{y} - \text{arctg} \frac{1+x}{y} + 2\ \text{arctg} \frac{x}{y} \right\} dy$$

$$= \frac{A}{\pi} \left\{ \int \text{arctg} \frac{1-x}{y} dy - \int \text{arctg} \frac{1+x}{y} dy + 2 \int \text{arctg} \frac{x}{y} dy \right\}$$

$$I_1 = \int \text{arctg} \frac{1-x}{y} dy$$

$$= y\ \text{arctg} \frac{1-x}{y} + \int \frac{y(1-x)}{(1-x)^2+y^2}\ dy$$

$$= y\ \text{arctg} \frac{1-x}{y} + \frac{1-x}{2} \log((1-x)^2+y^2)$$

demikian pula untuk

$$I_2 = \int \text{arctg} \frac{1+x}{y} dy$$

$$= y\ \text{arctg} \frac{1+x}{y} + \frac{1+x}{2} \log((1+x)^2+y^2)$$

dan untuk

$$I_3 = 2 \int \text{arctg} \frac{x}{y} dy$$

$$= 2y\ \text{arctg} \frac{x}{y} + x\log(x^2+y^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{A}{\pi} (I_1 - I_2 + I_3)$$

$$= \frac{A}{\pi} \left\{ y\ \text{arctg} \frac{1-x}{y} + \frac{1-x}{2} \log((1-x)^2+y^2) \right.$$

$$- y\ \text{arctg} \frac{1+x}{y} + \frac{1+x}{2} \log((1+x)^2+y^2)$$

$$\left. + 2y\ \text{arctg} \frac{x}{y} + x\log(x^2+y^2) \right\}$$

$$= \frac{A}{\pi} y \left\{ \text{arctg} \frac{1-x}{y} - \text{arctg} \frac{1+x}{y} \right\} + \frac{2Ay}{\pi} \text{arctg} \frac{x}{y}$$

$$+ \frac{A}{2\pi} \left\{ \log((1-x)^2+y^2) - \log((1+x)^2+y^2) \right\}$$

$$- \frac{Ax}{2\pi} \left\{ \log((1-x)^2+y^2) + \log((1+x)^2+y^2) \right\}$$

$$+ \frac{\mathbb{A}x}{\pi} \log(x^2+y^2)$$

$$= -\frac{\mathbb{A}y}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2xy}{y^2-x^2+1} + \frac{2\mathbb{A}y}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} +$$

$$\frac{\mathbb{A}}{2\pi} \log \frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2} - \frac{\mathbb{A}x}{2\pi} \log\left\{((1-x)^2+y^2)((1+x)^2+y^2)\right\}$$

$$+ \frac{\mathbb{A}x}{\pi} \log(x^2+y^2)$$