BAB III

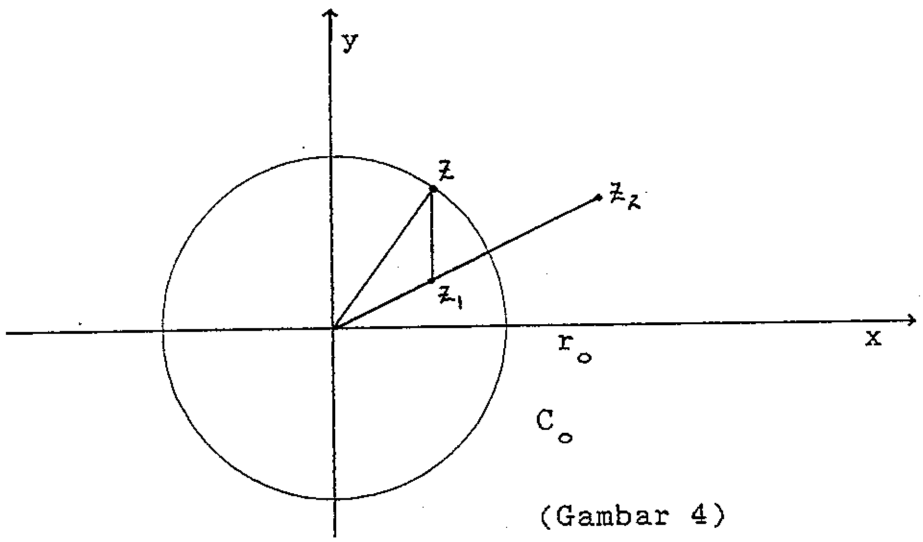
FORMULA INTEGRAL POISSON

Dalam bab ini akan dibahas mengenai formula-formula integral poisson dengan domain yang dibatasi oleh lingkaran dan domain yang berbentuk setengah bidang.

Definisi 14

Misalkan C_0 suatu lingkaran dengan persamaan $z = r_0 e^{i\phi}$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Dan $z_1 = re^{i\theta}$, dengan $0 < r < r_0$ adalah titik didalam lingkaran C_0. Titik z_1 dan z_2 dikatakan saling invers terhadap lingkaran C_0 jika dan hanya jika

1. $\arg z_1 = \arg z_2$
2. $|z_1|\ |z_2| = r_0^2$



(Gambar 4)

Dari definisi 14 jika sifat $|z_2| = \dfrac{r_0^2}{|z_1|}$ dipenuhi, maka diperoleh $z_2 = |z_2|\ e^{i\theta}$

$$z_2 = \frac{r_o^2}{r} e^{i\theta} = \frac{r_o^2}{re^{-i\theta}} = \frac{r_o^2}{\bar{z}_1} = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}_1}$$

Jadi $z_2 = \dfrac{z\bar{z}}{\bar{z}_1}$ ....(3.1)

Misalkan f(z) analitik didalam dan pada kontur C_o .Karena z_2 terletak diluar lingkaran C_o, maka harga

$$\frac{f'(z)\ (z-z_2) - f(z)}{(z-z_2)^2}$$

selalu ada untuk z didalam atau pada lingkaran C_o. Dengan demikian $\dfrac{f(z)}{z-z_2}$ analitik didalam dan pada kontur C_o. Sehingga menurut teorema II.6 (Cauchy-Goursat)

$$\oint_{C_o} \frac{f(z)}{z-z_2}\, dz = 0 \quad \text{.................(3.2)}$$

III.1 FORMULA INTEGRAL POISSON UNTUK LINGKARAN

Teorema III.1

1.Misalkan f(z) analitik didalam dan pada lingkaran C_o, dengan persamaan $z = r_o e^{i\emptyset}$, $0 \le \emptyset \le 2\pi$. Jika $z_1 = re^{i\theta}$, yaitu suatu titik didalam lingkaran C_o, maka :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2r_o r \cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, f(r_o e^{i\emptyset})\, d\emptyset$$

2.Jika $U(r,\theta)$ dan $V(r,\theta)$ masing-masing adalah bagian real dan bagian imaginer dari $f(re^{i\theta})$, maka :

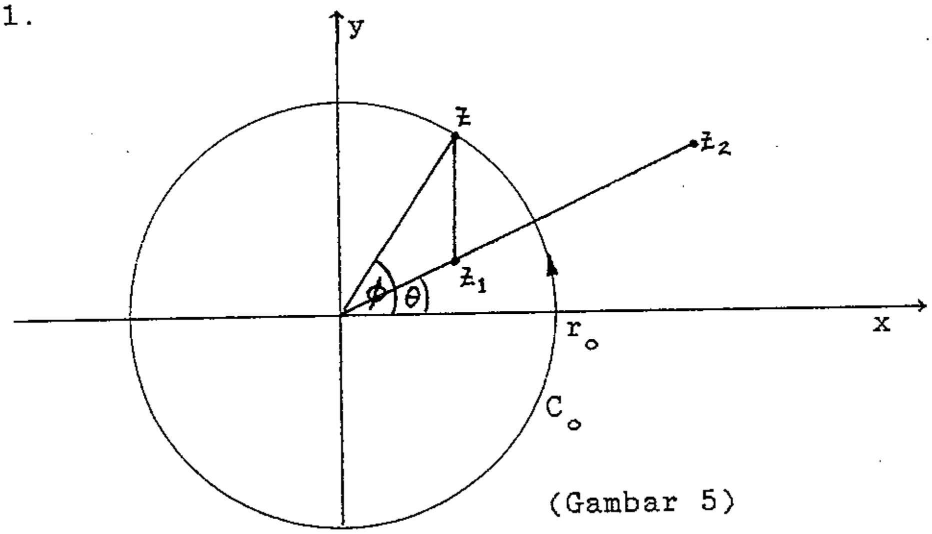
$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2r_o r \cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, U(r_o,\emptyset)\, d\emptyset$$

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2} V(r_o,\emptyset)\, d\emptyset$$

Dan hasil-hasil ini disebut formula integral poisson untuk lingkaran.

Bukti:

1.



(Gambar 5)

Karena f(z) analitik didalam dan pada kontur tertutup C_o, maka menurut integral Cauchy $f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_o}\frac{f(z)}{z-z_1}\,dz.$

Jika persamaan ini dikurangi persamaan (3.2) maka :

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_o}\frac{f(z)}{z-z_1}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_o}\frac{f(z)}{z-z_2}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_o}\left[\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right] f(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_o^{2\pi}\left[\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right] f(r_o e^{i\emptyset})\, i r_o e^{i\emptyset}\, d\emptyset$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{z}{z-z_1} - \frac{z}{z-z_2}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{z}{z-z_1} - \frac{z}{z-z\bar{z}/\bar{z}_1}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{z}{z-z_1} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1-\bar{z}}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{z}{z-z_1} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_1}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{z(\bar{z}-\bar{z}_1) + \bar{z}_1(z-z_1)}{(z-z_1)\,(\bar{z}-\bar{z}_1)}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{z\bar{z} - z_1\bar{z}_1}{(z-z_1)\,\overline{(z-z_1)}}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{|z|^2 - |z_1|^2}{|z-z_1|^2}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{r_o^2 - r^2}{|z-z_1|^2}\right) f(r_o e^{i\varnothing})\, d\varnothing \quad \text{.......(3.3)}$$

$$(0<r<r_o)$$

Besaran $|z-z_1|$ adalah jarak antara titik z dan z_1, dan menurut dalil cosinus, maka :

$$\begin{aligned} |z-z_1|^2 &= |z|^2 - 2|z||z_1| \cos(\varnothing - \theta) + |z_1|^2 \\ &= r_o^2 - 2r_o r \cos(\varnothing - \theta) + r^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, f(r_o e^{i\emptyset})\, d\emptyset$$

$(r < r_o)$

.........(3.4)

2. Karena $f(re^{i\theta}) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$ dan $f(r_o e^{i\emptyset}) = U(r_o,\emptyset) + iV(r_o,\emptyset)$,dari teorema III.1.1 maka :

$$U(r,\theta) + iV(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_o^2 - r^2)(\, U(r_o,\emptyset) + iV(r_o,\emptyset)\,)}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, d\emptyset$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_o^2 - r^2)\, U(r_o,\emptyset)}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, d\emptyset$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_o^2 - r^2)\, V(r_o,\emptyset)}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, d\emptyset$$

atau

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_o^2 - r^2)\, U(r_o,\emptyset)}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, d\emptyset \quad ...(3.5)$$

$(r < r_o)$

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_o^2 - r^2)\, V(r_o,\emptyset)}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2}\, d\emptyset \quad ...(3.6)$$

$(r < r_o)$

Persamaan (3.5) dan (3.6) merupakan formula integral poisson untuk fungsi harmonis $U(r,\theta)$ dan $V(r,\theta)$ dalam lingkaran $r=r_o$

$$\text{Fungsi } P(r_o,r,\emptyset-\theta) = \frac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \theta) + r^2} \quad ....(3.7)$$

dikenal sebagai "**Kernel Poisson**" dari suatu transformasi integral dari $f(r_o e^{i\emptyset})$ dan merupakan fungsi berharga real, yang mempunyai periode 2π dan bila $r=0$ maka $P(r_o,r,\emptyset-\theta) = 1$. Fungsi $P(r_o,r,\emptyset-\theta)$ adalah fungsi harmonis dari r dan θ dalam C_o dan selalu bernilai positif.

Karena $\frac{z_1}{z-z_1}$ dan komplex konyugate $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_1}$ mempunyai bagian real yang sama, maka :

$$
\begin{aligned}
P(r_o,r,\emptyset-\theta) &= \mathrm{Re}\left[\frac{z}{z-z_1} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_1}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{z}{z-z_1}\right] + \mathrm{Re}\left[\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}-\bar{z}_1}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{z}{z-z_1}\right] + \mathrm{Re}\left[\frac{z_1}{z-z_1}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{z}{z-z_1} + \frac{z_1}{z-z_1}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{z+z_1}{z-z_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.8)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya formula integral poisson untuk lingkaran dapat ditulis sebagai

$$
\left.
\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_o,r,\emptyset-\theta)\, f(r_o e^{i\emptyset})\, d\emptyset \\
U(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_o,r,\emptyset-\theta)\, U(r_o,\emptyset)\, d\emptyset \\
&\qquad\qquad (r < r_o) \\
V(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_o,r,\emptyset-\theta)\, V(r_o,\emptyset)\, d\emptyset \\
&\qquad\qquad (r < r_o)
\end{aligned}
\right\} \ldots.(3.9)
$$

Fungsi $P(r_o,r,\emptyset-\theta)$ adalah harmonis dapat ditunjukkan dengan dipenuhinya persamaan differensial laplace dalam koordinat polar, atau :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \Theta^2} = 0$$

Dari $P(r_o, r, \emptyset-\Theta) = \dfrac{r_o^2 - r^2}{r_o^2 - 2r_o r\cos(\emptyset - \Theta) + r^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{-2r(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2) - (r_o^2-r^2)(-2r_o\cos(\emptyset-\Theta)+2r)}{(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)^2}$$

$$= \frac{-4rr_o^2 + 2r_o r^2\cos(\emptyset-\Theta) + 2r_o^3\cos(\emptyset-\Theta)}{(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{\begin{array}{l}(-4r_o^2+4r_o r\cos(\emptyset-\Theta))\,(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)^2 \\ -(-4rr_o^2 + 2r_o r^2\cos(\emptyset-\Theta) + 2r_o^3\cos(\emptyset-\Theta)) \\ *\ 2(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)\,(-2r_o\cos(\emptyset-\Theta)+2r)\end{array}}{(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)^4}$$

$$= \frac{(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)\,(A-B)}{(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)^4}$$

$$\begin{aligned} A &= (-4r_o^2+4r_o r\cos(\emptyset-\Theta))\,(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2) \\ &= -4r_o^4 - 4r_o^2r^2 + 4(3r_o^3r+r_or^3)\cos(\emptyset-\Theta) - 8r_o^2r^2\cos^2(\emptyset-\Theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-4rr_o^2+ 2r_o r^2\cos(\emptyset-\Theta) + 2r_o^3\cos(\emptyset-\Theta)\ ) \\ &\quad *\ 2(-2r_o\cos(\emptyset-\Theta) + 2r) \\ &= 8(3r_o^3r+r_or^3)\cos(\emptyset-\Theta) - (8r_o^2r^2+8r_o^4)\cos^2(\emptyset-\Theta) - 16r_o^2r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= -4r_o^4 - 4r^2r_o^2 + 4(3r_o^3r+r_or^3)\cos(\emptyset-\Theta) - 8r_o^2r^2\cos^2(\emptyset-\Theta) \\ &\quad -8(3r_o^3+r_or^3)\cos(\emptyset-\Theta) + (8r_o^2r^2+8r_o^4)\cos^2(\emptyset-\Theta) + 16r^2r_o^2 \\ &= -4r_o^4 + 12r_o^2r^2 - 4(3r_o^3r+r_or^3)\cos(\emptyset-\Theta) + 8r_o^4\cos^2(\emptyset-\Theta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{-4r_o^4 + 12r_o^2r^2 - 4(3r_o^3r+r_or^3)\cos(\emptyset-\Theta) + 8r_o^4\cos^2(\emptyset-\Theta)}{(r_o^2-2r_o r\cos(\emptyset-\Theta)+r^2)^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{(r_o^2-r^2)\ 2r_or\ \sin(\emptyset-\theta)}{(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\begin{array}{c}-(r_o^2-r^2)\ 2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^2 + (r_o^2-r^2) \\ 2r_or\ \sin(\emptyset-\theta)\ 2\ (r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)\ 2r_or\ \sin(\emptyset-\theta)\end{array}}{(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^4}$$

$$= \frac{(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)\ (-C+D)}{(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^4}$$

$$\begin{aligned} C &= (r_o^2-r^2)2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)\ (r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2) \\ &= (r_o^2-r^2)\ (2r_o^3r\ \cos(\emptyset-\theta)-4r_o^2r^2\ \cos^2(\emptyset-\theta)+2r_or^3\ \cos(\emptyset-\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (r_o^2-r^2)2r_or\ \sin(\emptyset-\theta)4r_or\ \sin(\emptyset-\theta) \\ &= (r_o^2-r^2)8r_o^2r^2\sin^2(\emptyset-\theta) \\ &= (r_o^2-r^2)8r_o^2r^2(1-\cos^2(\emptyset-\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -C+D= {} & (r_o^2-r^2)(\ -2r_o^3r\ \cos(\emptyset-\theta)-4r_o^2r^2\ \cos^2(\emptyset-\theta) \\ & -2r_or^3\ \cos(\emptyset-\theta)+8r_o^2r^2\ ). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\begin{array}{l}(r_o^2-r^2)(\ -2r_o^3r\ \cos(\emptyset-\theta)-4r_o^2r^2\ \cos^2(\emptyset-\theta) \\ -2r_or^3\ \cos(\emptyset-\theta)+8r_o^2r^2\ )\end{array}}{(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\begin{array}{l}-2r_o^5r\ \cos(\emptyset-\theta)-4r_o^4r^2\ \cos^2(\emptyset-\theta)-2r_o^3r^3\ \cos(\emptyset-\theta)+8r_o^4r^2 \\ +r^2(\ 2r_o^3r\ \cos(\emptyset-\theta)+4r_o^2r^2\ \cos^2(\emptyset-\theta) \\ +2r_or^3\ \cos(\emptyset-\theta)-8r_o^2r^2\ )\end{array}}{(r_o^2-2r_or\ \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} = \frac{\begin{array}{l} -2r_o^5 \cos(\emptyset-\theta)/r - 4r_o^4 \cos^2(\emptyset-\theta) - 2r_o^3 r^3 \cos(\emptyset-\theta) \\ +8r_o^4 + 2r_o^3 r \cos(\emptyset-\theta) + 4r_o^2 r^2 \cos^2(\emptyset-\theta) \\ +2r_o r^3 \cos(\emptyset-\theta) - 8r_o^2 r^2 \end{array}}{(r_o^2-2r_o r \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{T}{(r_o^2-2r_o r \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^3}$$

$$\begin{aligned} T &= (-4rr_o^2+2r_o r^2 \cos(\emptyset-\theta)+2r_o^3 \cos(\emptyset-\theta)) \\ &\quad * (r_o^2-2r_o r \cos(\emptyset-\theta)+r^2) \\ &= r(-4r_o^4+(12r_o^3 r+2r_o r^3) \cos(\emptyset-\theta)-(4r_o^2 r^2+4r_o^4) \cos^2(\emptyset-\theta) \\ &\quad -4r_o^2 r^2) + 2r_o^5 \cos(\emptyset-\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\begin{array}{l} -4r_o^4+(12r_o^3 r+2r_o r^3) \cos(\emptyset-\theta)-(4r_o^2 r^2+4r_o^4) \cos^2(\emptyset-\theta) \\ -4r_o^2 r^2 + 2r_o^5 \cos(\emptyset-\theta) / r \end{array}}{(r_o^2-2r_o r \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^3}$$

Jadi : $\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}$

$$= \frac{\begin{array}{l} -4r_o^4 + 12r_o^2 r^2 - 4(3r_o^3 r+r_o r^3) \cos(\emptyset-\theta) + 8r_o^4 \cos^2(\emptyset-\theta) \\ -4r_o^4+(12r_o^3 r+2r_o r^3) \cos(\emptyset-\theta)-(4r_o^2 r^2+4r_o^4) \cos^2(\emptyset-\theta) \\ -4r_o^2 r^2 + 2r_o^5 \cos(\emptyset-\theta) / r - 2r_o^5 \cos(\emptyset-\theta) / r \\ - 4r_o^4 \cos^2(\emptyset-\theta) - 2r_o^3 r^3 \cos(\emptyset-\theta)+8r_o^4 + 2r_o^3 r \cos(\emptyset-\theta) \\ + 4r_o^2 r^2 \cos^2(\emptyset-\theta)+2r_o r^3 \cos(\emptyset-\theta) - 8r_o^2 r^2 \end{array}}{(r_o^2-2r_o r \cos(\emptyset-\theta)+r^2)^3}$$

$$= 0$$

III. FORMULA INTEGRAL POISSON UNTUK SETENGAH BIDANG

Teorema III.2

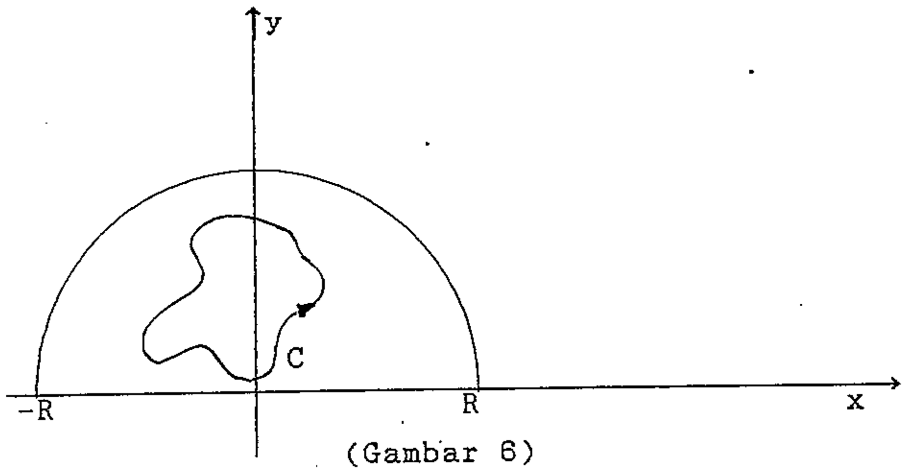
Bila fungsi f(z) analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C, yang terletak didalam bidang Im $z \geq 0$, maka terdapat konstanta positif a dan M sedemikian hingga f(z) memenuhi sifat :

$$|z^{a}f(z)| < M \quad .....(3.10)$$

dengan z merupakan titik didalam atau pada kontur tertutup sederhana C.

Bukti :

Fungsi f(z) analitik di dalam dan pada kontur tertutup C, maka fungsi f(z) kontinu di dalam dan pada kontur tertutup C. Jadi berdasarkan teorema modulus maximum, maka $|f(z)|$ mencapai atau mempunyai nilai maximum pada kontur C. Apabila harga maximum dari f(z) adalah M_1, maka untuk suatu bilangan real positif M_2 dengan sifat $M_1<M_2$ akan berlaku $|f(z)|<M_2$ untuk setiap z di dalam dan pada kontur C. Misalkan setengah lingkaran atas dengan jari-jari R, menutupi seluruh kontur C,



(Gambar 6)

(setengah lingkaran atas dengan pusat pada titik asal dan melingkungi atau menutupi seluruh kontur C seperti diatas selalu dapat dibentuk), sehingga untuk setiap z di dalam dan pada kontur C akan berlaku $|z|<R$.

Dan dari peryataan tersebut :

1. Untuk setiap konstanta positif a, maka :

$$\begin{aligned} |z^{\alpha}f(z)| &= |z^{\alpha}||f(z)| \\ &= |z|^{\alpha}|f(z)| \\ &< R^{\alpha}M_2 \end{aligned}$$

dengan demikian apabila diambil $M = R^{\alpha}M_2$, berarti terdapat pula M dengan sifat $|z^{\alpha}f(z)|<M$.

2. $$\begin{aligned} |z^{\alpha}f(z)| &= |z^{\alpha}||f(z)| \\ &= |z|^{\alpha}|f(z)| \\ &< |z|^{\alpha}M_2 \end{aligned}$$

Bila ada M, yaitu terdapat bilangan real $p>0$ sedemikian sehingga $M=R^{p}M_2$, dan karena $|z|<R$, maka $|z|^{\alpha}M_2<R^{p}M_2$ atau $|z|^{\alpha}<R^{p}$ selalu dapat dipenuhi untuk $0<a\leq p$, yang berarti terdapat konstanta positif a sedemikian sehingga $|z^{\alpha}f(z)|<M$

Theorema III.3

1. Misalkan f(z) analitik di dalam bidang $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ dan misalkan z=x+iy adalah suatu titik pada bidang $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ maka

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Yf(t)}{(t-x)^2+Y^2}\, dt$$

(t real)

2. Jika U(x,y) dan V(x,y) masing-masing bagian real dan bagian imaginer dari f(z), maka

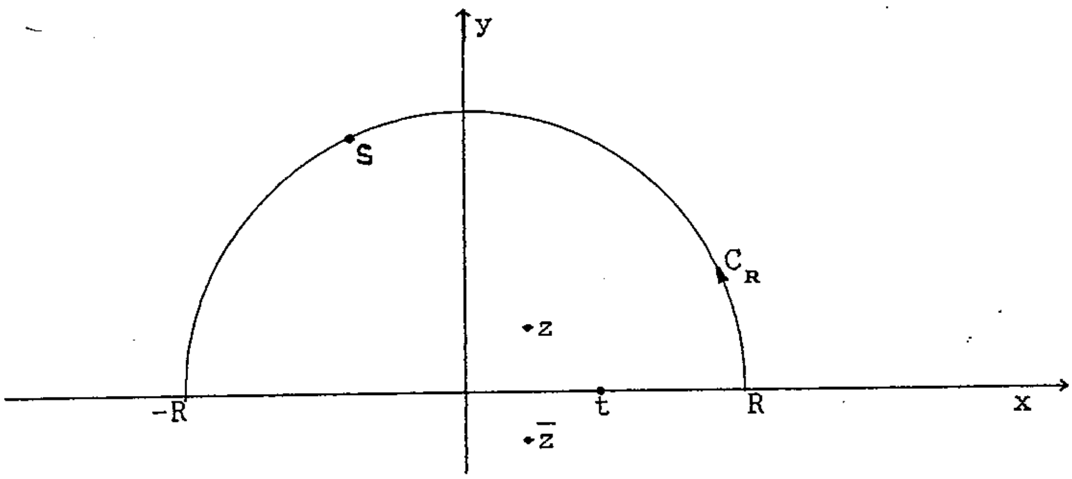
$$U(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y\, U(t,0)}{(t-x)^2+Y^2}\, dt$$

(t real)

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y\, V(t,0)}{(t-x)^2+Y^2}\, dt$$

(t real)

Bukti :



(Gambar 7)

1. Misalkan kontur C_R, menyatakan setengah lingkaran berjari-jari R, berpusat pada titik asal, yang berorientasi positif dan terletak pada bidang Im z≥0. Titik z terletak di

atas sumbu real, dengan $|z|<R$ dan t pada sumbu real, serta s pada C_R. Menurut teorema II.7, maka

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z}\, ds \;......(3.11)$$

dimana kontur tertutup C terdiri dari sumbu real dari -R sampai R dan kontur C_R(setengah lingkaran). Sehingga

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s-z}\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

Karena $\bar{z}$ berada di luar kontur C, maka $f(s)/(s-\bar{z})$ analitik di dalam dan pada kontur C. Sehingga menurut teorema II.6 (Cauchy Gourzat), maka

$$\int_C \frac{f(s)}{s-\bar{z}}\, ds = 0$$

atau

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-\bar{z}}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s-\bar{z}}\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-\bar{z}}\, dt$$

$$= 0 \;........\; (3.12)$$

Bila persamaan (3.11) dikurangi dengan persamaan (3.12), maka :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-\bar{z}}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s-z}\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-z}\, dt -$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{s-\bar{z}}\, ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-\bar{z}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left(\frac{f(s)}{s-z} - \frac{f(s)}{s-\bar{z}}\right) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \left(\frac{f(t)}{t-z} - \frac{f(t)}{t-\bar{z}}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{s-\bar{z}-s+z}{(s-z)(s-\bar{z})}\, f(s)ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{t-\bar{z}-t+z}{(t-z)(t-\bar{z})}\, f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{z-\bar{z}}{(s-z)(s-\bar{z})} f(s)ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{z-\bar{z}}{(t-z)(t-\bar{z})} f(t)dt \qquad ....(3.13)$$

Apabila

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{z-\bar{z}}{(s-z)(s-\bar{z})} f(s)ds$$

yaitu suku pertama dari ruas kanan dari persamaan (3.13), maka p(z) dapat ditulis sebagai

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{1}{(s-z)} f(s)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{1}{(s-\bar{z})} f(s)ds$$

karena f(z) analitik didalam bidang $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, maka otomatis f(z) analitik didalam dan pada kontur tertutup C. Sehingga berdasarkan teorema III.2 terdapat konstanta positif a dan M sedemikian sehingga:

$$|s^{\alpha}f(s)|<M \text{ atau } |f(s)|<\frac{M}{R^{\alpha}}$$

Karena $|s-z|$ dan $|s-\bar{z}|$ selalu positif, maka dapat ditemukan bilangan real positif m_1 dan m_2 sedemikian hingga $|s-z|>m_1R$ dan $|s-\bar{z}|>m_2R$. Misalkan $s=Re^{i\emptyset}$, maka $ds=iRe^{i\emptyset}d\emptyset$. Dengan demikian

$$|p(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{1}{(s-z)} f(s)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{1}{(s-\bar{z})} f(s)ds \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\pi} \frac{f(s)iRe^{i\emptyset}}{(s-z)} d\emptyset - \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\pi} \frac{f(s)iRe^{i\emptyset}}{(s-\bar{z})} d\emptyset \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{0}^{\pi} \frac{f(s)Re^{i\emptyset}}{(s-z)} d\emptyset\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{0}^{\pi} \frac{f(s)Re^{i\emptyset}}{(s-\bar{z})} d\emptyset\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|f(s)||Re^{i\emptyset}|}{|s-z|} d\emptyset + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|f(s)||Re^{i\emptyset}|}{|s-\bar{z}|} d\emptyset$$

$$< \frac{1}{2\pi} \frac{MR}{R^{\alpha} m_1 R} \int_0^{\pi} d\emptyset + \frac{1}{2\pi} \frac{MR}{R^{\alpha} m_2 R} \int_0^{\pi} d\emptyset$$

$$= \frac{M}{2m_1 R^{\alpha}} + \frac{M}{2m_2 R^{\alpha}}$$

$$= \frac{M\,(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2 R^{\alpha}}$$

Untuk $R \longrightarrow \infty$, maka $|p(z)|=0$. Jadi untuk $R \longrightarrow \infty$,

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{z-\bar{z}}{(s-z)(s-\bar{z})} f(s)ds = 0$$

sehingga persamman (3.13 berubah menjadi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z-\bar{z}}{(t-z)(t-\bar{z})} f(t)dt, \text{ Im } z\geq 0$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+iy)-(x-iy)}{|t-(x+iy)|^2} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iy}{(t-x)^2+y^2} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} f(t)dt, \quad .....(3.14)$$

$$(y>0)$$

2. Jika fungsi-fungsi harmonis $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ digambarkan pada bidang Im $z\geq 0$ dan jika diberikan nilai -nilai batas dari $U(x,y)$ dan $V(x,y)$, maka

$$f(z)= f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$$

$$f(t) = U(t,0) + iV(t,0), \text{ t real}$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(U(t,0) + iV(t,0))}{(t-x)^2+y^2} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yU(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yV(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt$$

atau

$$\left.\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yU(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \\ V(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yV(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(3.15)$$

Persamaan (3.15) disebut formula integral poisson untuk fungsi harmonis U(x,y) dan V(x,y) dengan domain yang berbentuk setengah bidang.