BAB II

MATERI DASAR PENUNJANG

II.1 BILANGAN KOMPLEX

Definisi 1.

Bilangan komplex z didefinisikan sebagai suatu pasangan berurutan dari bilangan-bilangan riil, dan ditulis (x,y) dimana x dan y riil. Atau z dapat dinyatakan dengan $z = x+iy$, dimana $i = \sqrt{-1}$.

Definisi 2.

Harga mutlak atau modulus dari bilangan komplex $z=x+iy$ adalah bilangan riil non-negatif $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Untuk menyatakan harga mutlak dari z kita tulis $|z|$.

Jadi $|z| = \sqrt{(x^2+y^2)}$.

Definisi 3.

Bilangan komplex sekawan dari bilangan komplex $z = x+iy$ yang dinyatakan dengan $\bar{z}$ dimaksud bilangan komplex $\bar{z}=x-iy$. Untuk bilangan riil x dan y dalam bilangan komplex $z = x+iy$ biasa ditulis : $x = R(z)$ dan $y = Im(z)$ yaitu singkatan dari komponen riil dan komponen imaginer dari bilangan komplex z.

Teorema II.1

Untuk sembarang bilangan komplex z_1 dan z_2 berlaku :

1. $|z_1 . z_2| = |z_1|\ |z_2|$
2. $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
3. $|z_1-z_2| \geq |\ |z_1| - |z_2|\ |$

bukti :

1. $$\begin{aligned} |z_1 . z_2|^2 &= |\ (x_1+iy_1).(x_2+iy_2)\ |^2 \\ &= |\ (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\ |^2 \\ &= x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2 \\ &= (\ x_1^2 + y_1^2\ )(\ x_2^2 + y_2^2\ ) \\ &= |z_1|^2|z_2|^2 \end{aligned}$$

Jadi $|z_1 . z_2| = |z_1||z_2|$

2. $$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\ \overline{(z_1+z_2)} \\ &= (z_1+z_2)\ (\overline{z}_1+\overline{z}_2) \\ &= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2R(z_1\overline{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (\ |z_1|+|z_2|\ )^2 \end{aligned}$$

Jadi $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

3. $$\begin{aligned} |z_1| &= |(z_1-z_2) + z_2| \\ &\leq |z_1-z_2| + |z_2| \end{aligned}$$

atau $|z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$ ....(*)

$$\begin{aligned} |z_2| &= |(z_2-z_1) + z_1| \\ &\leq |z_2-z_1| + |z_1| \end{aligned}$$

atau $|z_1|-|z_2| \geq -|z_1-z_2|$ ....(**)

dari ...(*) dan ...(**) berarti $|z_1-z_2| \geq \left|\,|z_1| - |z_2|\,\right|$

II.2 DAERAH-DAERAH DI BIDANG KOMPLEX

Definisi 4.

1. Untuk suatu bilangan komplex z_o dan r positif yang dimaksud dengan **sekitar** dari titik z_o dengan radius r adalah himpunan titik z dengan sifat $|z-z_o| < r$; jadi himpunan $N_r(z_o) = \{ z | \; |z-z_o| < r \}$
2. Titik z_o dinamakan **titik limit** dari suatu himpunan di dalam bidang komplex z, apabila setiap sekitar dari z_o memuat titik-titik dari himpunan itu yang bukan titik z_o(selain z_o).
3. Titik z_o disebut **titik interior** dari himpunan S, apabila terdapat suatu sekitar N dari z_o sedemikian hingga N merupakan himpunan bagian dari S.
4. Jika titik limit dari himpunan S, bukan titik interior dari S, jadi setiap sekitarnya memuat baik titik dari S maupun bukan titik dari S, titik limit itu disebut **titik batas** dari S.
5. Suatu himpunan yang semua anggotanya adalah titik interior dari himpunan itu, disebut **himpunan terbuka**.
6. Suatu himpunan yang memuat semua titik limitnya disebut **himpunan tertutup.**
7. Himpunan S disebut **terbatas** jika terdapat bilangan riil positif q sedemikian hingga S didalam lingkaran $|z|=q$.

Jadi untuk semua z didalam S maka $|z|<q$.

8. Himpunan S disebut **terhubung** jika setiap dua titik dari S dapat dihubungkan dengan rantai kontinu yang terdiri dari penggal garis yang seluruhnya terletak didalam S.
9. Suatu himpunan yang terbuka dan terhubung disebut suatu **domain**.

Contoh :

Pandang himpunan $A = \{ z|\ |z| < 1 \}$

Semua titik-titik didalam dan pada lingkaran $|z|=1$ adalah titik limit dari A. Himpunan A adalah himpunan terbuka, sebab semua anggota dari A adalah titik interior dari A. Titik-titik pada lingkaran $|z|=1$ adalah titik batas dari A, dari sebab titik itu merupakan titik limit tetapi bukan anggota dari A. Karena ada titik limit dari A yang tidak termasuk didalam A, maka A tidak tertutup.

II.3 FUNGSI PERUBAH KOMPLEX

Jika z menyatakan sembarang anggota dari suatu himpunan bilangan-bilangan komplex, maka z disebut perubah komplex. Jika S dan T himpunan-himpunan bilangan komplex dan untuk setiap $z \in S$ terdapat cara mengawankan secara tunggal f dengan bilangan $w \in T$, maka f disebut fungsi dari himpunan S kedalam himpunan T. Secara umum w ditulis f(z) sehingga $w = f(z)$, dan S adalah domain dan disebut daerah definisi dari f. Himpunan R dari harga-harga f(z) untuk semua $z \in S$ disebut daerah jangkau dari f. Jika U dan V sembarang dua fungsi berharga riil dari dua perubah riil x dan y, maka

U+iV adalah fungsi dari perubah komplex z. Sebaliknya setiap fungsi f(z) selalu dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

dimana U dan V fungsi-fungsi berharga riil dari x dan y.

II.4 LIMIT DAN KONTINUITAS

II.4.1 LIMIT FUNGSI DARI DUA PERUBAH RIIL

Definisi 5.

Bilangan L disebut limit fungsi U(x,y) untuk (x,y) mendekati (x_o,y_o) dan ditulis $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} U(x,y) = L$ apabila pada setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$, sedemikian sehingga untuk semua (x,y) yang memenuhi $0<(x-x_o)^2+(y-y_o)^2<\delta^2$ berlaku $|\ U(x,y)-L\ | < \varepsilon$

Contoh :

Pandang $f(x,y) = 2x + y^2$

$|\ 2x + y^2 - 4\ | \le 2|x| + |y+2||y-2|$

Apabila diambil $|x| = \frac{\varepsilon}{4}$ dan $|y+2||y-2| = \frac{\varepsilon}{2}$,serta diberikan batasan untuk y sedemikian sehingga $|y-2| < \frac{\varepsilon}{4}$,maka :

$0 < (x-0) + (y-2) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Dengan demikian untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat suatu bilangan $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, sedemikian sehingga untuk semua (x,y) yang memenuhi $0 < (x-0)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$ berlaku $|\ f(x,y)-4\ | < \varepsilon$ atau $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2\ )} f(x,y) = 4$

Definisi 6.

Fungsi $U(x,y)$ dikatakan kontinu di (x_o,y_o), apabila $U(x_o,y_o)$ ada dan pada setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan terdapat $\delta>0$, sedemikian sehingga untuk semua (x,y) dimana :

$0<(x-x_o)^2+(y-y_o)^2<\delta^2$ berlaku ketidaksamaan :

$|\ U(x,y)-U(x_o,y_o)\ | < \varepsilon$

Definisi 7.

Fungsi $U(x,y)$ dikatakan kontinu di titik (x_o,y_o), apabila $U(x_o,y_o)$ ada dan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} U(x,y) = U(x_o,y_o)$

Contoh :

Tunjukkan bahwa $f(x,y) = 2x+y^2$ kontinu di $(x,y) = (0,2)$.

$f(0,2) = 2(0)+(2)^2 = 4$, dan $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = 4$,

Sehingga $f(0,2) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y)$. Jadi $f(x,y) = 2x+y^2$ kontinu di titik $(0,2)$

Definisi 8.

Fungsi $U(x_o,y_o)$ dikatakan mempunyai derivatif parsial terhadap x dititik (x_o,y_o) apabila $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{U(x,y_o)-U(x_o,y_o)}{x-x_o}$ ada atau $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{U(x_o+\Delta x,y_o) - U(x_o,y_o)}{\Delta x}$ ada. Harga limit ini disebut derivatif parsial dari fungsi $U(x,y)$ terhadap x dititik (x_o,y_o) dan diberi notasi $\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)_o$ yaitu harga dari $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ dititik (x_o,y_o) atau $U_x(x_o,y_o)$.

Harga derivatif parsial tingkat tinggi disuatu titik tidak tergantung urutan mendefferensialkannya, asal saja fungsi - fungsi derivatif itu kontinu dititik tersebut.

Jadi $\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x}$ disetiap titik dimana kedua fungsi derivatif parsial tingkat kedua dari (x,y) ini kontinu.

II.4.2 LIMIT FUNGSI DARI PERUBAH KOMPLEX

Definisi 9.

Bilangan L disebut limit fungsi f(z) untuk z mendekati z_o, dan ditulis $\lim_{z \to z_o} f(z) = L$;apabila pada setiap $\varepsilon>0$ yang ditentukan ,terdapat $\delta>0$ sedemikian hingga untuk semua z, dimana $0 < |z-z_o| < \delta$ berlaku $| f(z)-L | < \varepsilon$. Jadi untuk harga-harga z disekitar z_o dengan jari-jari δ kecuali di z_o itu sendiri, harga f(z) ada disekitar L dengan jari-jari ε.

Contoh :

Pandang $f(z) = \frac{iz}{2}$,tunjukkan bahwa $\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2}$

$$
\begin{aligned}
| f(z) - \tfrac{i}{2} | &= \left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| \\
&= \frac{|z-1|}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan terdapat $\delta = 2\varepsilon > 0$ sedemikian hingga untuk semua z,dimana :

$0 < |z-1| < \delta$ berlaku $|f(z)-1|<\varepsilon$, atau $\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2}$.

Definisi 10.

Fungsi f dikatakan kontinu di z_o, jika pada setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan terdapat $\delta>0$, sedemikian hingga untuk semua z, dimana $0<|z-z_o|<\delta$ berlaku $|f(z)-f(z_o)|<\varepsilon$.

Jadi jika f kontinu di z_o, maka haruslah dipenuhi semua syarat sebagai berikut :

1. $f(z_o)$ ada.
2. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)$ ada.
3. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$.

Fungsi f dikatakan kontinu pada suatu domain, apabila f kontinu disetiap titik dari domain itu.

Contoh :

Pandang $f(z) = \frac{iz}{2}$

$f(1) = \frac{i}{2} = \lim\limits_{z \to 1} f(z)$, jadi $f(z) = \frac{iz}{2}$ kontinu di $z = 1$

Teorema II.2

Jika $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ dan $z_o = x_o+iy_o$, maka :

$\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = a+ib$ bila dan hanya bila

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} U(x,y) = a$ dan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} V(x,y) = b$.

Bukti :

$(\Longrightarrow)$

Diketahui $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = a+ib$ dan diberikan sebarang $\varepsilon>0$, maka terdapatlah $\delta>0$ sedemikian hingga untuk $0 < |z-z_o| < \delta$ berlaku $|\, f(z)-(a+ib)\, | = |\, \{ U(x,y)-a \}+i\{ V(x,y)-b \}\, | < \varepsilon$,karena $|\, \{ U(x,y)-a \}\, | \le |\, \{ U(x,y)-a \}+i\{ V(x,y)-b \}\, |$

dan $\mid \{ V(x,y)-b \} \mid \le \mid \{ U(x,y)-a \}+i\{ V(x,y)-b \} \mid$

,maka untuk $0 < (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2$ berlaku :

$\mid U(x,y)-a \mid < \varepsilon$ dan $\mid V(x,y)-b \mid < \varepsilon$ yang berarti

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} U(x,y) = a$ dan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} V(x,y) = b.$

($\Longleftarrow$)

Sekarang diketahui $U(x,y)\to a$ dan $V(x,y)\to b$ untuk $(x,y)\to(x_o,y_o)$,jika diberikan $\varepsilon>0$, maka terdapatlah $\delta_1>0$ dan $\delta_2>0$ sehingga berlaku :

1. $\mid U(x,y)-a \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $0 < (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta_1^2$
2. $\mid V(x,y)-b \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $0 < (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta_2^2$

Bila diambil δ harga yang terkecil diantara δ_1 dan δ_2 maka untuk $0 < (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 < \delta^2$ akan berlaku :

$$\begin{aligned} \mid f(z)-(a+ib) \mid &= \mid \{ U(x,y)-a \}+i\{ V(x,y)-b \} \mid \\ &\le \mid U(x,y)-a \mid + \mid V(x,y)-b \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Hal ini berarti $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = a+ib.$

Akibat dari teorema II.2 adalah :

Fungsi $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ kontinu di $z_o = x_o+iy_o$ bila dan hanya bila $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ kontinu di (x_o,y_o).

Sifat-sifat limit :

Jika $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)=A$ dan $\lim\limits_{z \to z_o} g(z)=B$, maka :

1. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)+g(x) = A+B$

2. $\lim\limits_{z \to z_o} f(z).g(x) = A.B$

3. $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ untuk $B \neq 0$

Sebagai akibat dari sifat-sifat ini adalah jika sembarang dua fungsi kontinu, maka jumlah dan hasil kalinya kontinu, sedangkan hasil baginya juga kontinu kecuali untuk harga-harga z dimana pembagi menjadi nol.

II.5 DERIVATIF

Misalakan fungsi f didefinisikan pada suatu sekitar titik z_o, jika diketahui bahwa $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o}$ ada, harga limit itu disebut derivatif dari fungsi f di titik z_o dan diberi notasi $f'(z_o)$.

Jadi $f'(z_o) = \lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o}$ atau jika $\Delta z = z - z_o$, maka

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_o+\Delta z)-f(z_o)}{\Delta z}$$

Jika $f'(z_o)$ ada , maka

$$\lim_{z \to z_o} f(z)-f(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o} \cdot \lim_{z \to z_o} (z-z_o)$$

$$= f'(z_o) .0 = 0$$

Jadi $\lim\limits_{z \to z_o} f(z)=f(z_o)$, yang berarti bahwa fungsi f kontinue di z_o. Dengan demikian diperoleh bahwa :

syarat perlu untuk fungsi f agar mempunyai derivatif di z_o adalah f kontinu di z_o.

II.5.1 RUMUS-RUMUS DERIVATIF

Jika c suatu konstanta dan $f'(z)$ dan $g'(z)$ ada, maka :

1. $\frac{d}{dz}(c)=0,\quad \frac{d}{dz}(z)=1$

2. $\frac{d}{dz}(cf(z)) = cf'(z)$

3. $\frac{d}{dz}(f(z)+g(z)) = f'(z)+g'(z)$

4. $\frac{d}{dz}(f(z).g(z)) = f'(z).g(z) + f(z).g'(z)$

5. jika $g(z)\neq 0$, maka $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$

Jika $w=f(t)$ dan $t=g(z)$, sedangkan $f'(t)$ ada di $t=g(z)$ dan $g'(z)$ ada, maka

6. $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\,\frac{dt}{dz} = f'(t).g'(z)$

Untuk n positif bulat dan untuk setiap titik z berlaku

7. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

II.5.2 SYARAT-SYARAT CAUCHY-RIEMANN

Jika $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, maka yang dimaksud syarat-syarat Cauchy-Riemann adalah dipenuhinya persamaan

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Teorema II.3

Jika derivatif dari fungsi $f(z) = U(x,y)+iV(x,y)$ ada di $z_o=x_o+iy_o$, maka derivatif-derivatif parsiil tingkat pertama terhadap x dan y dari masing-masing komponen $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ ada di titik (x_o,y_o), dan di titik ini dipenuhi syarat-syarat Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \ldots\ldots (2.1)$$

Sedangkan $f'(z_o)$ dapat dinyatakan ke dalam derivatif-derivatif parsiil itu.

$$f'(z_o)=U_x(x_o,y_o)+iV_x(x_o,y_o)=V_y(x_o,y_o)-iU_y(x_o,y_o) \quad ..(2.2)$$

Bukti :

Andaikan $f'(z_o)=a+ib$.

$$\text{Jadi} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta U + i\Delta V}{\Delta x + i\Delta y} = a+ib$$

menurut theorema II.2 maka :

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y) \to (0,0)} R\left\{\frac{\Delta U + i\Delta V}{\Delta x + i\Delta y}\right\} = a \quad \text{dan}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y) \to (0,0)} I\left\{\frac{\Delta U + i\Delta V}{\Delta x + i\Delta y}\right\} = b$$

Khususnya jika diambil $\Delta y=0$, jadi $\Delta z=\Delta x$, kedua limit ini menjadi limit fungsi dari satu perubah riil Δx.

Untuk $\Delta x \longrightarrow 0$, sehingga akan diperoleh :

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{U(x_o+\Delta x,y_o)-U(x_o,y_o)}{\Delta x} = a$$

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{V(x_o+\Delta x,y_o)-V(x_o,y_o)}{\Delta x} = b$$

yang berarti bahwa $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v}{\partial x}$ ada di (x_o,y_o) dan harganya berturut-turut a dan b.

Atau $U_x(x_o,y_o) = a$ dan $V_x(x_o,y_o) = b$ . . . . .(1)

Demikian juga jika $\Delta x=0$, yaitu $\Delta z=i\Delta y$, akan diperoleh :

$$\lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{V(x_o,y_o+\Delta y)-V(x_o,y_o)}{\Delta y} = a$$

$$\lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{U(x_o,y_o+\Delta y)-U(x_o,y_o)}{-\Delta y} = b$$

sehingga derivatif-derivatif parsiil dari U dan V terhadap y ada di (x_o,y_o) dan

$U_y(x_o,y_o)=-b$ dan $V_y(x_o,y_o)=a$ . . . . .(2)

menurut (1) dan (2) persamaan-persamaan $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ berlaku di titik (x_o,y_o) dan

$$f'(z_o) = a+ib = U_x(x_o,y_o) + iV_x(x_o,y_o)$$

$$= V_y(x_o,y_o) - iU_y(x_o,y_o)$$

Akibat dari teorema ini adalah :

Apabila disuatu titik syarat-syarat Cauchy-Riemann tidak dipenuhi jelas bahwa fungsi tidak mempunyai derivatif di titik tersebut.

II.6 FUNGSI ANALITIK

Definisi 11.

Fungsi f dikatakan analitik di titik z_o, apabila terdapat suatu persekitaran dari z_o sedemikian sehingga $f'(z)$ ada untuk setiap titik z di dalam sekitar itu.

Suatu fungsi dikatakan analitik dalam suatu domain, jika fungsi tersebut analitik di setiap titik dalam domain tersebut. Fungsi yang analitik di seluruh bidang komplex, dinamakan **fungsi seluruh.** Jika suatu fungsi analitik di suatu titik di dalam setiap sekitar dari z_o kecuali di z_o itu sendiri, maka z_o dinamakan titik "singular" dari fungsi itu.

Contoh :

Fungsi $f(z) = \frac{1}{z-i}$ mempunyai derivatif $f'(z) = \frac{-1}{(z-i)^2}$ untuk $z \neq i$. Fungsi f analitik disetiap titik kecuali dititik $z=i$. Titik $z=i$ adalah titik singular.

II.6.1 SIFAT-SIFAT

Syarat perlu untuk suatu fungsi agar analitik pada domain D adalah bahwa fungsi kontinu di seluruh D. Syarat-syarat Cauchy-Riemann juga merupakan syarat perlu tetapi tidak cukup. Jumlah dan hasilkali dua fungsi yang analitik dalam domain D, juga analitik dalam D. Hasil baginya analitik dalam Dasalkan fungsi yang menjadi pembagi tidak menjadi nol di suatu titik dalam D.

Jika g analitik dalam domain D_1, dan R daerah jangkau dari g(z) untuk semua z dalam D_1, maka jika f analitik di dalam D_2 yang memuat R, fungsi f(g(z)) analitik dalam D_1. Jadi fungsi analitik dari suatu fungsi analitik adalah analitik.

II.6.2 FUNGSI HARMONIK

Diberikan fungsi $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ yang analitik dalam domain D. Menurut Cauchy- Riemann maka $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}$ dan $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$, sehingga

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \text{ dan } \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

yang berlaku untuk semua titik diseluruh D, maka di dalam D akan berlaku hubungan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

demikian juga dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

Persamaan differensial yang berbentuk

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0$$

disebut persamaan differensial Laplace dalam dua perubah x dan y. Fungsi yang mempunyai derivatif parsiil tingkat dua yang kontinu dan yang memenuhi persamaan differensial Laplace dinamakan "Fungsi Harmonik".

Jadi jika $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ analitik dalam suatu domain, maka U dan V keduanya adalah fungsi-fungsi harmonik dalam domain itu.

II.7 INTEGRAL KOMPLEX

II.7.1 Integral Tertentu

Apabila $F(t)=U(t)+iV(t)$ adalah suatu fungsi berharga komplex dari perubah riit t, dengan $a \leq t \leq b$, dimana U dan V fungsi-fungsi berharga riil yang kontinue sepotong-sepotong dari perubah riil t dalam interval tertutup [a,b]. Maka kedua integral tertentu $\int_a^b U(t)dt$ dan $\int_a^b V(t)dt$ ada, dan integral tertentu dari F(t) didefinisikan dengan menyatakan ke dalam kedua integral tertentu itu, yaitu

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

Dan berlakulah sifat-sifat :

1. $R\{\int_a^b F(t)dt\} = \int_a^b R\{F(t)\}dt$
2. $\int_a^b kF(t)dt = k\int_a^b F(t)dt$, untuk konstanta k sebarang
3. $|\int_a^b F(t)dt| \leq \int_a^b |F(t)|dt$, untuk $a \leq b$
4. $\int_a^b F(t)dt = -\int_b^a F(t)dt$

II.7.2 Integral Garis

Himpunan titik-titik (x,y) dimana berlaku $x=g(t)$ dan

$y=h(t)$ untuk $a \leq t \leq b$, membentuk suatu busur dibidang XOY. Jika g dan h fungsi-fungsi yang kontinu dari perubah riil t, maka busurnya dinamakan "**busur kontinu**". Jika tidak ada dua harga t yang berlainan yang berkorespondensi dengan titik yang sama (x,y), maka busur tersebut dinamakan "**busur Jordan**".

Tetapi jika $g(a)=g(b)$ dab $h(a)=h(b)$, dan tidak ada lagi dua harga t yang berkorespondensi dengan titik yang sama maka busur kontinu itu disebut "kurva tertutup sederhana" atau "kurva Jordan". Jika g dan h mempunyai derivatif-derivatif g' dan h' yang kontinu dan tidak bersama-sama menjadi nol pada harga t yang manapun dalam [a,b], maka busur jordan tersebut mempunyai perubahan arah garis singgung yang kontinu, dan busur Jordan dinamakan "**busur licin**".

Jika $f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$, maka integral garis dari fungsi f terhadap z sepanjang busur C dinyatakan dengan

$$\int_C f(z)dz = \int_C (U+iV)(dx+idy)$$

$$= \int_C Udx-Vdy + i\int_C Vdx+Udy \quad . \ . \ . \ . \ (2.3)$$

II.7.3 Integral Kontur

Definisi 12.

a. Kontur adalah suatu rangkaian kontinu dari sejumlah berhingga busur licin.

b. Suatu kontur disebut kontur tertutup sederhana bila nilai awal dan nilai akhir dari z(t) sama.

$$z(t) = x + iy$$
$$= g(t) + ih(t),\ a \le t \le b$$

z(t) adalah persamaan garis lengkung pada bidang komplex z.

Definisi 13

Pandang kontur C yang ditentukan oleh x=g(t) dan y=h(t), $a \le t \le b$. Selanjutnya diberikan fungsi f(z) = u(x,y) + iV(x,y) yang kontinu sepotong-potong pada C, dengan $z=\alpha$ pada t=a dan $z=\beta$ pada t=b, maka integral fungsi f sepanjang kontur C yang berarah dari titik α ke titik β dan ditulis

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz$$

yang didefinisikan

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(g(t)+ih(t)).(g'(t)+ih'(t))dt \quad \ldots.(2.4)$$

sifat-sifat integral kontur adalah

1. $\int_\alpha^\beta f(z)dz = -\int_\beta^\alpha f(z)dz$
2. $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, k konstanta
3. $\int_C \{f_1(z)dz+f_2(z)dz\}dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz$
4. $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

Jika C terdiri dari kontur C_1 dari α sampai γ dan kontur C_2 dari γ sampai β.

Teorema II.4

Jika fungsi f kontinue pada kontur C yang panjangnya L, dan $|f(z)| \le M$ untuk z pada C, maka

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML \quad ......(2.5)$$

Bukti :

Misalkan kontur C dengan persamaan $x=g(t)$, $y=h(t)$, untuk $a \le t \le b$, maka

$$\begin{aligned} \left|\int_C f(z)dz\right| &= \left| \int_a^b f(g(t)+ih(t)).(g'(t)+ih'(t))dt \right| \\ &\le \int_a^b |f(g(t)+ih(t)).(g'(t)+ih'(t))|dt \\ &\le M \int_a^b |g'(t)+ih'(t)|dt \\ &= M \int_a^b ((g'(t))^2+(h'(t))^2)^{1/2}\, dt \\ &= ML \end{aligned}$$

II.8 Integral Cauchy

Jika fungsi-fungsi P(x,y) dan Q(x,y) beserta derivatif-derivatif parsiilnya dari tingkat pertama, kontinu diseluruh daerah tertutup R yang dibatasi kontur tertutup C, maka

$$\oint_C (Pdx+Qdy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad ......(2.6)$$

yaitu berlaku teorema Green.

Teorema II.5 (Cauchy)

Jika fungsi f analitik dan f' kontinu di dalam dan pada kontur tertutup C maka

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

<u>Bukti</u> :

Misalkan $f(z) = U(x,y)+iV(x,y)$. Karena fungsi f analitik, maka pada daerah R, U dan V kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann. Dan karena $f'(z)$ kontinu, maka derivatif - derivatif parsiil U_x, U_y, V_x dan V_y kontinu pada R. Sehingga

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (Udx-Vdy) + i\oint_C (Vdx+Udy)$$

$$= \iint_R \left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= 0 .$$

Theorema II.6 (Cauchy Goursat)

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada kontur tertutup C, maka

$$\oint_C f(z)dz = 0 \;......(2.7)$$

Theorema ini hanya berlaku untuk domain tertutup terhubung sederhana, dan dapat diperluas untuk domain tertutup terhubung ganda.

<u>Bukti</u> :

Untuk membuktikan teorema ini terlebih dahulu akan dibuktikan suatu lemma.

Lemma :

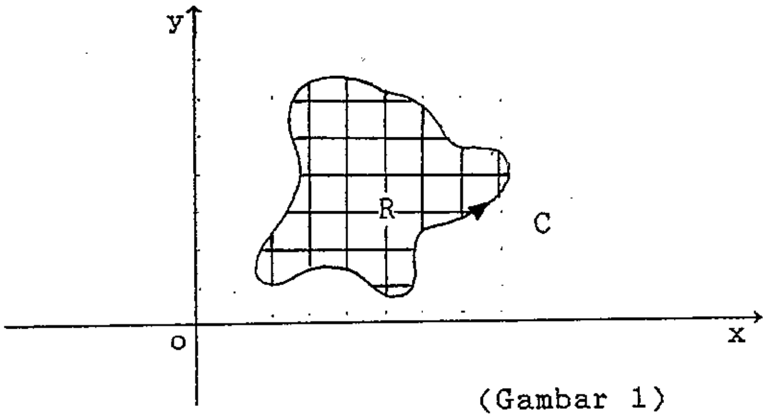
Jika fungsi f analitik pada daerah yang tertutup dan terbatas R, yang terdiri atas titik-titik pada daerah interior dari kontur tertutup C dan pada kontur tertutup C itu sendiri, dan jika diberika $\varepsilon>0$, maka selalu mungkin membagi R menjadi n bujursangkar dan bagian bujursangkar, yang dibatasi oleh C_j, sehingga terdapat suatu titik z_j didalam atau pada C_j dimana berlaku ketidaksamaan :

$$\left| \frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \text{ ....(\#)}$$

Untuk setiap titik $z \neq z_j$ didalam atau pada C_j, $(j=1,2,3,\ldots,n)$

Bukti (lemma):

Daerah R dapat ditutup dengan himpunan bujursangkar-bujursangkar yang sama besar, yang dapat dibuat dengan menarik garis-garis yang sejajar dengan sumbu koordinat. Bagian bujursangkar yang terletak diluar R dapat dihapus, sehingga R terbagi menjadi bujursangkar-bujursangkar dan bagian - bagian dari bujursangkar



(Gambar 1)

Andaikan untuk suatu $\varepsilon>0$ yang diberikan terdapat paling sedikit satu daerah bagian dimana tidak terdapat titik z_j sedemikian hingga ketidaksamaan (#) berlaku untuk semua titik z didalam daerah bagian itu. Apabila demikian, maka daerah ini dapat dibagi lagi menjadi empat bujursangkar yang sama (tanpa memperhatikan bagian-bagian yang terletak diluar R). Jika pada suatu daerah dari daerah-daerah bagian yang lebih kecil ini tidak terdapat titik z_j sedemikian hingga ketidaksamaan (#) dipenuhi,maka daerah tersebut dapat dibagi-bagi lagi dengan cara yang sama, dan demikian seterusnya. Setelah kita lakukan berhingga banyak kali pembagian terhadap setiap daerah bagian yang memerlulkan, mungkin sampai pada suatu pembagian, sedemikian hingga ketidaksamaan (#) benar untuk setiap daerah bagian. Dalam hal ini lemma benar.

Sekarang andaikan bahwa titik-titik z_j tidak ada sedemikian hingga syarat (#) dipenuhi setelah diadakan pembagian yang berhingga banyak kali terhadap salah satu dari daerah-daerah bagian yang merupakan hasil pembagian yang pertama kali. Misalkan K_o merupakan daerah bagian ini, dan setelah K_o dibagi satu kali, maka paling sedikit satu dari empat bujursangkar yang lebih kecil, sebut K_1, memuat titik-titikdari R tetapi tidak terdapat titik z_j seperti yang dimaksud dalam lemma. K_1 dibagi empat lagi dan seterusnya. Jika pada sembarang langkah ke-m dijumpai lebih dari satu bujursangkar yang lebih kecil yang dapat dipilih sebagai K_m, dapat dipilih satu K_m saja. Sehingga kita akan mempunyai barisan bujursangkar $\{K_n\}(n=0,1,2,...)$ dengan sifat bahwa untuk semua n berlaku :

(a) K_n tertutup dan terbatas.

(b) K_n memuat titik-titik dari R.

(c) K_n memuat K_{n+1}.

(d) Panjang sisi K_{n+1} setengah dari panjang sisi K_n.

Dengan demikian akan terdapat titik $z_o \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$.

Titik z_o ini merupakan titik limit dari R, sebab pada setiap $\delta>0$, sekitar dari z_o yang berjari-jari δ ini memuat bujursangkar dari barisan diatas, asal panjang diagonal bujursangkar kurang dari δ. Karena itu setiap sekitar dari z_o memuat titik-titik dari R, jadi z_o titik limit dari R. Oleh karena R daerah yang tertutup, maka $z_o \in R$.

Diketahui bahwa f analitik pada R, jadi f analitik di z_o dan ini berarti :

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} = f'(z_o) \text{ ada}$$

Sehingga untuk setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan dan yang dipergunakan dalam ketidaksamaan (#), terdapatlah $\delta>0$ sedemiukian hingga : $\left| \dfrac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} - f'(z_o) \right| < \varepsilon$

untuk setiap z dimana $0<|z-z_o|<\delta$. Akan tetapi sekitar dari z_o yang berjari-jari δ ini memuat bujursangkar K_m. Jika m diambil cukup besar sehingga diagonal bujursangkar ini tidak melebihi δ, maka akibatnya titik z_o dapat bertindak sebagai titik z_j sedemikian hingga (#) dipenuhi didalam daerah bagian K_m atau suatu bagian dari K_m. Dengan demikian tidak perlu lagi membagi K_m, dan hal ini bertentangan dengan pengandaian diatas. Jadi sampailah pada suatu kontradiksi, dan dengan demikian lemma terbukti.

Bukti (Cauchy-Goursat) :

Untuk $\varepsilon>0$ yang diberikan ,misalkan C_j $(j=1,2,3,\ldots,n)$ adalah perbatasan dari bujursangkar-bujursangkar atau bagian dari bujursangkar didalam daerah R, sedemiukian hingga terdapat titik-titik z_j dan ketidaksamaan (#) dipenuhi.

Misalkan :

$$(1)\quad S_j(z) = \frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} - f'(z_j) \qquad (j=1,2,3,\ldots,n)$$

memenuhi ketidaksamaan

$$(2)\quad |S_j(z)|<\varepsilon.$$

fungsi $S_j(z)$ adalah kontinu, dan khususnya bila z mendekati z_j limitnya sama dengan nol, dan untuk itu didefinisikan $S_j(z_j)=0$. Andaikan z sembarang titik pada C_j, maka :

$$(3)\quad f(z) = f(z_j) - z_jf'(z_j) + zf'(z_j) + (z-z_j)S_j(z)$$

dan menurut teorema Cauchy, maka $\oint_{C_j} dz=0$ dan $\oint_{C_j} zdz=0$

sehingga :

$$(4)\quad \oint_{C_j} f(z)\,dz = \oint_{C_j} (z-z_j)S_j(z)\,dz$$

Jumlah semua integral sekeliling C_j $(j=1,2,3,\ldots,n)$ ini sama dengan integral sekeliling C yang diambil dengan arah positif. Jadi :

$$\sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz$$

atau $$\oint_{C} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz$$

sehingga $$\left| \oint_C f(z)\,dz \right| \le \sum_{j=1}^{n} \left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right|$$

Misalkan a_j panjang sisi bujursangkar itu , karena z pada C_j dan z_j didalam atau pada C_j, maka $|z-z_j| \le a_j\sqrt{2}$ dan menurut teorema II.4 diperoleh :

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right| \le \varepsilon a_j k_j \sqrt{2}$$

dengan k_j adalah panjang kontur C_j.

Jika C_j suatu bujursangkar, maka $k_j=4a_j$, dan jika C_j merupakan perbatasan dari bagian bujursangkar, maka k_j tidak lebih dari $4a_j+L_j$, dimana L_j panjang bagian dari C yang turut membentuk C_j. Jika C_j suatu bujursangkar yang luasnya A_j, maka diperoleh :

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right| \le 4\varepsilon\, A_j\sqrt{2}$$

Jika C_j perbatasan dari bagian bujursangkar, maka :

$$\left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right| \le \varepsilon a_j(4a_j+L_j)$$
$$< (4A_j+aL_j)\varepsilon\sqrt{2}$$

dengan a panjang sisi suatu bujursangkar yang melingkungi kontur C dan juga semua bujursangkar yang menutup daerah R. Jadi jumlah semua A_j tidak lebih daripadaa^2, dan jika L panjang kontur C, maka :

$$\left| \oint_C f(z)\,dz \right| \le \sum_{j=1}^{n} \left| \oint_{C_j} (z-z_j)\, S_j(z)\,dz \right| < \varepsilon(4a^2+aL)\sqrt{2}$$

Karena hal ini berlaku untuk setiap $\varepsilon>0$, maka :

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

dan teorema Cauchy-Goursat terbukti

Theorema II.7

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada kontur tertutup C, dan z_o sebarang titik di dalam C, maka

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz \quad . \; . \; . \; . \; (2.8)$$

dan rumus ini disebut integral Cauchy.

Bukti :

Dibuat lingkaran Co, $|z-z_o|=r$, dimana radius r diambil cukup kecil sehingga Co terletak di dalam C. Menurut theorema 2.6. (Cauchy Goursat) yang telah diperluas untuk domain terhubung Ganda, maka

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = \oint_{Co} \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz$$

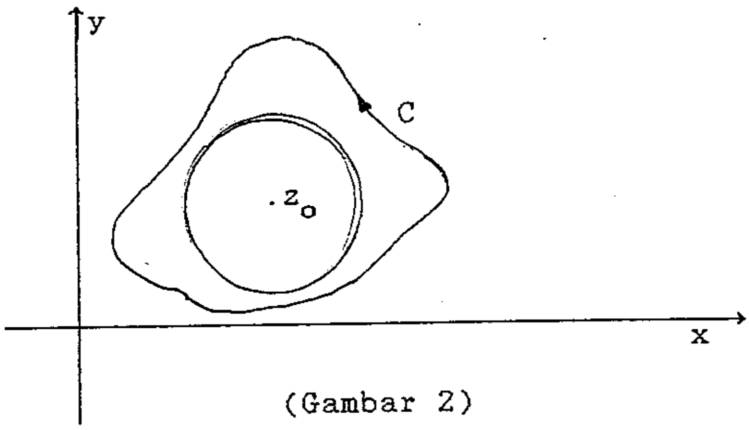
oleh karena itu $f(z)/(z-z_o)$ analitik pada C dan Co dan dalam daerah antara kedua kontur tertutup itu. Dan

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = f(z_o)\oint_{Co} \frac{1}{z - z_o}\, dz + \oint_{Co} \frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o}\, dz \quad ...(*)$$

dimana

$$\oint_{Co} \frac{1}{z - z_o}\, dz = 2\pi i$$

Karena f analitik di z_o, maka f kontinu di z_o, sehingga jika diberikan $\epsilon>0$ yang sebarang, terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga berlaku $|f(z)-f(z_o)|<\varepsilon$ apabila $|z-z_o|<\delta$.



(Gambar 2)

Kalau diambil radius $r<\delta$, maka ketidaksamaan itu berlaku untuk semua z yang terletak pada C_o, dan

$$\left|\oint_{Co} \frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o}\, dz\right| < \varepsilon/r.2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

DEnagan demikian harga mutlak dari integral dapat dapat dibuat sekecil mungkin asal r diambil cukup kecil. Tetapi karena harga dua integral yang lain tidak tergantung pada r, maka integral itu harus juga tidak tergantung pada r. Sehingga integral itu harus berharga nol dan (*) akan menjadi

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = 2\pi i f(z_o)$$

(terbukti)

Teorema II.8 (Teorema Modulus Maximum)

Jika f analitik didalam dan pada kontur C, maka $|f(z)|$ mencapai harga maximumnya disuatu titik pada C, yaitu pada perbatasan daerah itu dan tidak dititik interior.

Bukti :

Karena $f(z)$ analitik, maka $f(z)$ kontinu didalam dan pada kontur C. Dengan demikian $|f(z)|$ mempunyai harga maximum M, paling tidak pada satu harga dari z didalam atau pada C.

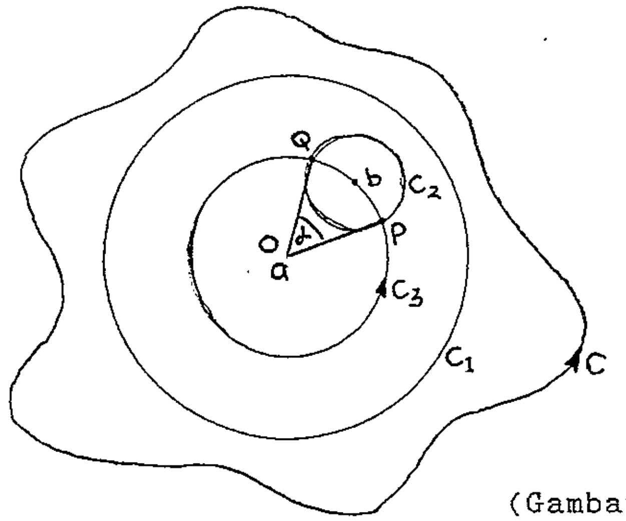
Andaikan harga maximum ini diperoleh tidak pada batas kontur tertutup C, tetapi diperoleh pada titik a didalam C, sehingga $|f(z)|=M$ .....(*)

Misalkan C_1 adalah lingkaran didalam C yang berpusat pada a, maka ada titik b didalam C_1 sedemikian sehingga $|f(b)|<M$ atau $|f(b)|\le M-\varepsilon$, dimana $\varepsilon>0$. Karena $f(z)$ kontinu maka $|f(z)|$ kontinu didalam dan pada C, atau dengan kata lain.

Untuk setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan dapat ditemukan $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk setiap z yang memenuhi $|z-b|<\delta$ berlaku : $\big||f(z)|-|f(b)|\big|<\varepsilon/2$ ....(1)

$$\begin{aligned} \text{Dari (1) } |f(z)| &< |f(b)|+\varepsilon/2 \\ &\le M-\varepsilon + \varepsilon/2 \\ &= M-\varepsilon/2 \quad \text{.........(2)} \end{aligned}$$

yang berlaku untuk semua titik interior dari lingkaran C_2 yang berpusat di b dengan jari-jari δ. Kemudian dibuat lingkaran C_3 yang berpusat di a dan melalui b.



$\angle POQ=\alpha$

C_3: $|z-a|=r$

$z=a+re^{i\theta}$

(Gambar 3)

Untuk z pada bagian lingkaran C_3 yaitu z pada busur PQ berlaku $|f(z)|<M-\varepsilon/2$ dan $|f(z)|\le M$ untuk z lainnya pada lingkaran C_3, sehingga menurut integral Cauchy :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)\ i\ re^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} f(z)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi} f(z)d\theta$$

$$|f(a)| = \left|\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha} f(z)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi} f(z)d\theta\ \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}|f(z)|\ d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi}|f(z)|\ d\theta$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}(M-\varepsilon/2)\ d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi} M\ d\theta$$

$$= \alpha/2\pi\ (M-\varepsilon/2) + M/2\pi\ (2\pi-\alpha)$$

$$= M-(\alpha\varepsilon/4\pi)$$

Dari .....(*) $|f(a)|=M\le M-(\alpha\varepsilon/4\pi)$ kontradiksi tercapai, sehingga pengandaian harus diingkar, dan yang benar adalah harga maximum dari $|f(z)|$ terjadi pada C.