

BAB III

GRAPH RECTILINIER DAN REPRESENTASI PLANARNYA

3.1 Graph Rectitiliniier

3.1.1 Definisi Graph Rectiliniier dan Representasi Planarnya

Pertama diberikan definisi formal dari graph rectiliniier.

DEFINISI 38 :

Suatu graph rectiliniier G adalah suatu tripel (V, E, λ) , dimana V adalah himpunan titik, E adalah himpunan garis, dan

$$\lambda: V \times V \longrightarrow \Sigma \cup \{e\}, \text{ dimana } \Sigma = \{L, R, D, U\},$$

adalah suatu relasi terurut dari titik dengan sifat-sifat sebagai berikut :

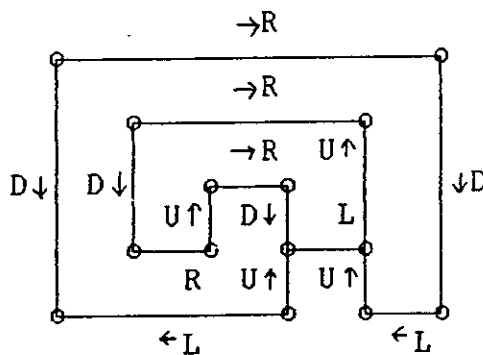
$\forall a, b, c \in V$ dan $X \in \Sigma$

$$(i) \lambda((a, b)) = e \iff \{a, b\} \notin E$$

(Urutan hanya dikhususkan antara titik-titik yang bertetangga);

$$(ii) \lambda((a, b)) = L \iff \lambda((b, a)) = R$$

$$\lambda((a, b)) = D \iff \lambda((b, a)) = U;$$



Gb. 3.1. Graph rectiliniier

- (iii) Jika $\lambda((a,b)) = X \implies \lambda((c,b)) \neq X, \forall c \neq a$
 (tidak ada garis ganda)

Setiap titik dalam graph rectilier mempunyai derajat paling banyak empat, dan setiap garis (a,b) , yang berasal dari titik a ke titik lain b , mempunyai label yang tidak kosong, yang mana dalam representasi planar akan menunjukkan arah (kiri, kanan, atas atau bawah) dimana garis tersebut meninggalkan titik a . Graph tidak berarah $G(V,E)$ disebut sebagai graph dasar (underlying graph). Sekarang didefinisikan representasi planar yang bagaimana yang akan dicari.

DEFINISI 39 :

Suatu representasi planar dari graph rectilinier $G(V,E, \lambda)$ pada suatu grid rectangular diberikan oleh dua pemetaan x dan y yang merupakan pemetaan dari $V \longrightarrow Z$ (integer) yang merupakan koordinat x dan y dari titik-titik dengan sifat :

1. *Relasi terurut*, , untuk semua garis $\{a,b\} \in E$
 - jika $\lambda((a,b)) = L \implies y(a) = y(b), x(a) > x(b)$
 - jika $\lambda((a,b)) = R \implies y(a) = y(b), x(a) < x(b)$
 - jika $\lambda((a,b)) = D \implies x(a) = x(b), y(a) > y(b)$
 - jika $\lambda((a,b)) = U \implies x(a) = x(b), y(a) < y(b)$
2. *Planaritas*, tidak ada dua garis yang berpotongan, yaitu setiap pasang garis yang bertetangga $\{a,b\}, \{c,d\} \rightarrow \lambda((a,b)) = R$ dan $\lambda((c,d)) = U$, relasi $x(a) \leq x(c) \leq x(b)$ dan $y(c) \leq y(a) \leq y(d)$ tidak berlaku.

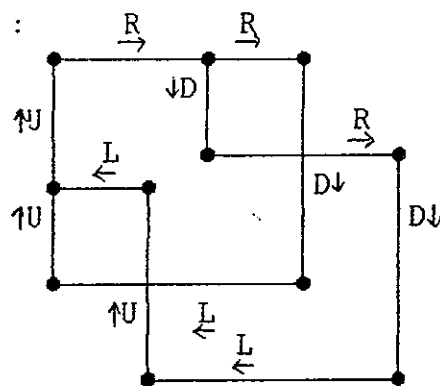
Dalam representasi planar graph rectilinier pada

grid rectangular, titik-titik diletakkan pada titik-titik grid dan garis-garis sepanjang garis grid mempunyai arah sesuai dengan labelnya, serta tidak terdapat dua garis yang saling berpotongan kecuali jika garis-garis itu mempunyai titik v sebagai titik berpotongan.

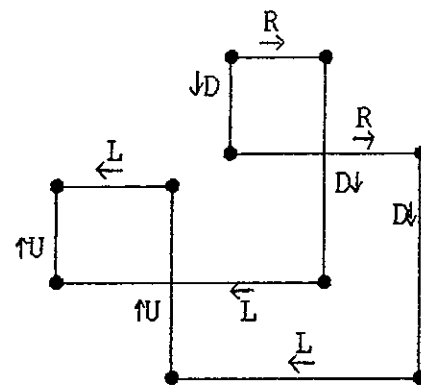
3.1.2 Sifat-Sifat Graph Rectiliniier

Jika suatu graph rectiliniier mempunyai representasi planar maka subgraphnya pasti mempunyai representasi planar, dengan label dari garis-garisnya sama dengan graph itu.

Contoh :



Graph G
Mempunyai representasi planar

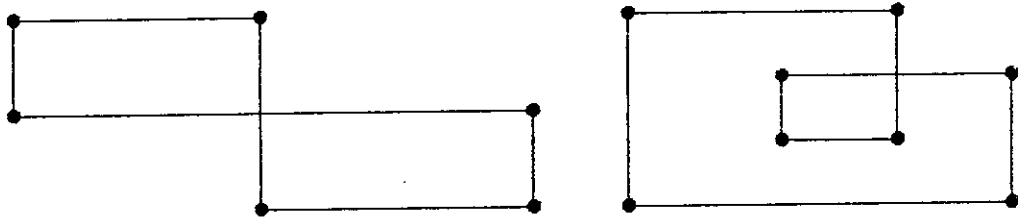


Subgraph dari G
pasti mempunyai
representasi planar

Gb. 3.2.

Graph rectiliniier dengan graph dasarnya graph non planar jelas tidak mempunyai representasi planar. Akan tetapi tidak semua graph rectiliniier dengan graph dasarnya graph planar, mempunyai representasi planar. Pada gambar 3.3 dapat dilihat dua cycle sederhana yang tidak mempunyai representasi planar dengan graph dasar adalah graph planar.

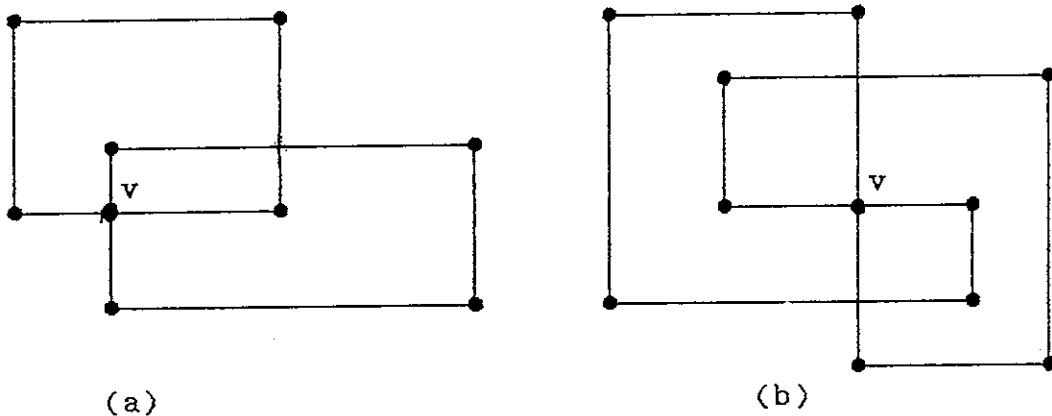
Contoh :



Gb. 3.3. Dua cycle yang tidak mempunyai representasi planar

Suatu graph rectilinier yang komponen-komponen biconnectednya mempunyai representasi planar, belum tentu mempunyai representasi planar.

Contoh :



Gb. 3.4. Dua graph rectilinier yang tidak mempunyai representasi planar yang komponen-komponen biconnectednya mempunyai representasi planar

Suatu graph rectilinier, jika setiap komponen terhubungnya mempunyai representasi planar, maka graph itu sendiri mempunyai representasi planar. Oleh karena itu disini dibatasi hanya pada graph rectilinier yang terhubung.

3.1.3 Graph Rectilinier Biconnected

DEFINISI 40 :

Graph rectilinier biconnected adalah suatu graph

rectilinier yang graph dasarnya merupakan graph biconnected.

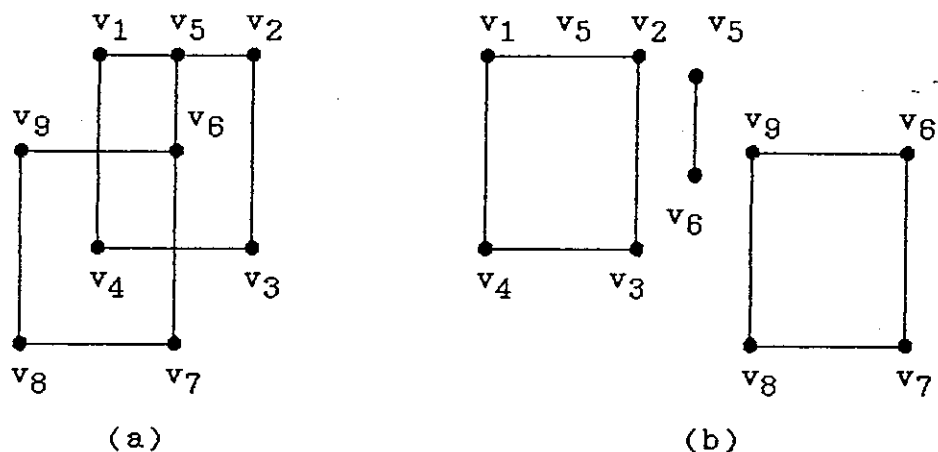
Sedang jika graph dasarnya graph separabel maka G disebut graph rectilinier yang tidak biconnected.

Contoh :

Graph pada 3.1. merupakan suatu graph rectilinier biconnected.

Pada graph rectilinier yang tidak biconnected dengan v merupakan titik artikulasinya, maka pemindahan v akan menghasilkan subgraph G_i yang berpotongan di G . Subgraph $G_i + v$ disebut sebagai subgraph berpotongan di v . Dan subgraph-subgraph yang berpotongan di v ini dapat dipandang sebagai komponen-komponen biconnected dari G . Jadi pada graph rectilinier yang tidak biconnected dibangun oleh beberapa komponen biconnected yang berpotongan di titik-titik artikulasi dari G .

Contoh :



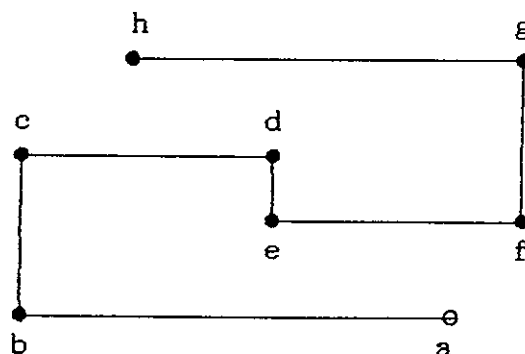
Gb. 3.5. (a) Graph Rectilinier
(b) Komponen-komponen biconnectednya

Dalam gambar 3.5(a) titik-titik v_5 dan v_6 merupakan titik-titik artikulasi dari graph rectilinier tersebut.

Setelah subgraph-subgraph yang berpotongan di titik artikulasinya dipisahkan terlihatlah bahwa graph rectilnier tersebut dibangun oleh tiga komponen biconnected (gambar 3.5(b)). Perhatikan bahwa garis (v_5, v_6) merupakan komponen biconnected yang disebut komponen biconnected trivial.

3.2. Struktur Topologi Representasi Planar

Ada suatu cara untuk memperluas fungsi pada graph sebagai berikut. Diberikan suatu path $P = (v_0, v_1, \dots, v_t)$, didefinisikan $\lambda(P) = \lambda((v_0, v_1)) \lambda((v_1, v_2)) \dots \lambda((v_{t-1}, v_t))$. Didefinisikan serupa untuk cycle dimana cycle $v_t = v_0$. menjadi suatu pemetaan yang menghubungkan setiap path atau cycle dalam graph dengan suatu untai Σ^* yang merupakan rangkaian label-label sepanjang path atau cycle. Untai yang mengandung RL, DU, LR, UD sebagai sub untai bukan merupakan path. Arah dari path yang dilewati dan titik awal dari suatu cycle adalah juga penting. Contoh dari pemetaan ini dapat dilihat dalam gambar 3.6.



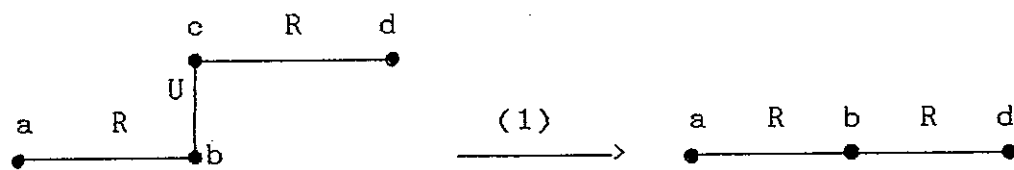
$$((abcdefgh)) = LURDRUL$$

Gb. 3.6 perluasan dari λ ke path

Berikut ini akan didefinisikan dua operasi topologi pada graph rectilinier. Operasi ini menyederhanakan graph rectilinier walaupun tetap mempertahankan struktur topologinya. Misalnya G suatu graph rectilinier.

Operasi 1 :

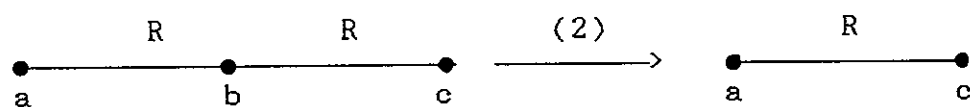
Kontraksi garis. Misal $(abcd)$ suatu path dalam G
 \rightarrow baik b maupun c mempunyai derajat 2, dan $\lambda((abcd)) = XYX$ dimana $X, Y \in \Sigma$. Kontraksikan garis (b,c) menjadi titik b . Hasilnya path (abd) akan mempunyai $\lambda((abd)) = XX$. Operasi ini disingkat dengan $X \longrightarrow XX$ (gb. 3.7).



Gb. 3.7 kontraksi garis

Operasi 2 :

Penghapusan titik. Misal (abc) suatu path dalam G
 \rightarrow b mempunyai derajat 2, dan $\lambda((abc)) = XX$ dimana $X \in \Sigma$. Hapus titik b dan garis yang dihasilkan yaitu (a,c) akan mempunyai $\lambda((a,c)) = X$. Operasi ini disingkat dengan $XX \longrightarrow X$ (gb. 3.8).



Gb. 3.8 Penghapusan titik

Tidaklah sulit untuk mendefinisikan operasi inversi dari kedua operasi di atas yang akan dinamakan operasi ekspansi garis dan operasi penambahan titik.

LEMMA 3.1.

Misal G adalah graph rectilinier dan G' adalah graph yang dihasilkan dari G dengan penggunaan barisan dari keempat operasi diatas. Maka G' juga rectilinier dan G' mempunyai representasi planar $\iff G$ mempunyai representasi planar.

Bukti :

Jika G rectilinier, maka jelas G' yang diperoleh dengan barisan 4 operasi di atas juga rectilinier. Akan dibuktikan jika G mempunyai representasi planar maka G' mempunyai representasi planar, dan sebaliknya jika G' mempunyai representasi planar maka G mempunyai representasi planar.

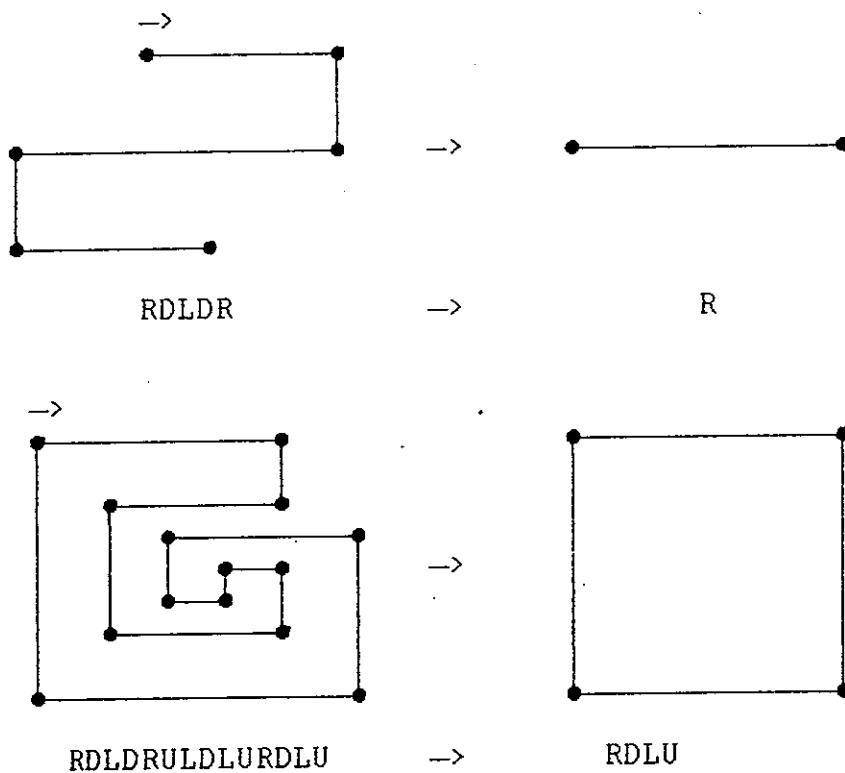
Lihat representasi planar dari G . Jika dilakukan barisan dari 4 operasi terhadap representasi planar dari G , maka tetap dapat terbentuk suatu representasi planar, yang merupakan representasi planar dari G' . Jadi G' mempunyai representasi planar.

Sebaliknya, jika G' mempunyai representasi planar. Pandang representasi planar dari G' . Jika dilakukan barisan dari 4 operasi inversi terhadap representasi planar dari G' , maka tetap dapat terbentuk suatu representasi planar, yang merupakan representasi planar dari G . Berarti G mempunyai representasi planar. ■

DEFINISI 41 :

Diberikan untai $\gamma \in \Sigma^*$ merupakan suatu path atau cycle, bentuk sederhana $\bar{\gamma}$ dari γ diperoleh dengan

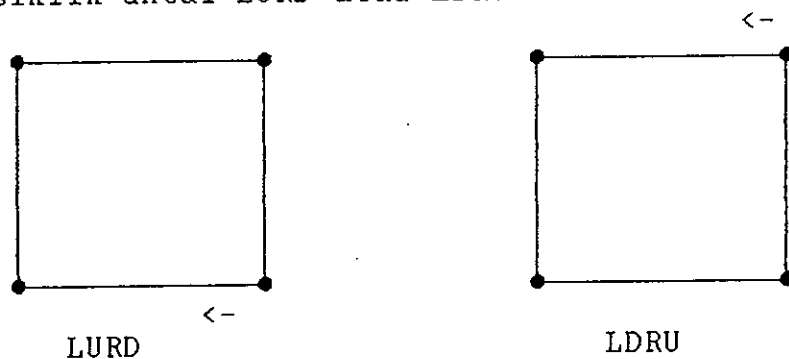
menggunakan secara berulang aturan reduksi $XYX \longrightarrow XX$ dan $XX \longrightarrow X$, dimana $X, Y \in \Sigma$ sampai tidak dapat digunakan lagi. Dalam gambar 3.9. disajikan suatu path dan suatu cycle dengan bentuk sederhananya.



Gb. 3.9. Penyederhanaan dari suatu path dan suatu cycle

DEFINISI 42 :

Suatu bujur sangkar (square) adalah salah satu dari siklik untai LURD atau LDRU.



Gb. 3.10

DEFINISI 43 :

Suatu spiral adalah suatu sub untai dari $(LURD)^+$ atau $(LDRU)^+$.



Gb. 3.11

LEMMA 3.2 :

Setiap path mempunyai representasi planar

Bukti :

Setiap spiral mempunyai representasi planar. Karena sembarang path menyederhanakan bentuk menjadi suatu spiral, maka dengan lemma 3.1 setiap path juga mempunyai representasi planar. ■

LEMMA 3.3 :

Suatu cycle mempunyai representasi planar \iff cycle tersebut menyederhanakan ke bentuk bujur sangkar.

Bukti

\iff Suatu bujur sangkar mempunyai representasi planar, maka dengan lemma 3.1 setiap cycle yang menyederhanakan ke bentuk bujur sangkar mempunyai representasi planar.

\implies Misal f suatu cycle yang mempunyai representasi planar dan $\lambda(f) = \gamma$. Dengan lemma 3.1, cycle yang didefinisikan oleh $\bar{\gamma}$ juga mempunyai representasi planar. Misal $|\bar{\gamma}| = n$, lihat representasi planar dari . Karena

tidak ada perpotongan, maka representasi planar ini adalah suatu poligon sederhana. Maka sudut interior poligon ini berjumlah $(n-2) \times 180^\circ$. Karena $\bar{\gamma}$ adalah suatu sepiral, maka semua sudut interiornya adalah 90° . Hasil yang mungkin untuk $n \times 90^\circ = (n-2) \times 180^\circ$ adalah $n = 4$. Maka adalah suatu bujur sangkar. ■

Bukti dari lemma di atas memberikan karakteristik lain yang berguna dari cycle yang mempunyai representasi planar. Menyusuri suatu cycle $f = v_1v_2 \dots v_nv_1$ dengan arah berlawanan jarum jam, sudut titik v_i , yaitu sudut antara (v_{i-1}, v_i) dan (v_i, v_{i+1}) dinyatakan dengan $\varphi_f(v_i)$ dan jumlah dari sudut dinyatakan dengan dengan $\varphi(f)$.

LEMMA 3.4 :

Suatu cycle $f = v_1v_2 \dots v_nv_1$ dengan $n \geq 4$ mempunyai representasi planar \iff

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n \varphi_f(v_i) = (n \pm 2) \times 180^\circ.$$

Bukti :

\implies Misal f mempunyai representasi planar, maka representasi planarnya adalah suatu poligon sederhana. Bergantung apakah yang dijumlahkan itu sudut interior atau sudut eksterior, didapat $(n \pm 2) \times 180^\circ$.

\impliedby Dengan menggunakan induksi pada n , akan dibuktikan f menyederhanakan ke suatu bujur sangkar. Nilai yang mungkin untuk $\varphi_f(v_i)$ adalah 90° , 180° dan 270° . Dasar untuk induksi ini adalah $n = 4$. Dalam

masalah ini jumlah sudut yang diberikan adalah 360° atau 1080° , yang berarti bahwa setiap sudut adalah 90° atau 270° . Maka f pasti bujur sangkar, jadi f mempunyai representasi planar.

Misalkan bahwa pernyataan benar untuk semua nilai $< n$ dan misalkan $n > 4$. Jika untuk suatu i , $\varphi_f(v_i) = 180^\circ$, maka $\lambda(v_{i-1}v_iv_{i+1}) = XX$. Kita dapat menggunakan penghapusan titik pada v_i untuk mendapatkan $f' = v_1v_2 \dots v_{i-1}v_{i+1} \dots v_nv_1$. Maka $\varphi(f') = \varphi(f) - \varphi_f(v_i) = ((n-1)\pm 2) \times 180^\circ$. Dengan induksi f' mempunyai representasi planar. Karena f' mempunyai representasi planar maka f yang dihasilkan dari f' dengan penambahan titik juga mempunyai representasi planar.

Ini menimbulkan masalah jika semua sudutnya 90° atau 270° . Karena $n > 4$ dan $\varphi(f) = (n\pm 2) \times 180$, tidak semua sudut dapat sama. Maka pasti $\exists k \rightarrow \varphi_f(v_k) \neq \varphi_f(v_{k+1})$. Maka kita mempunyai $\lambda(v_{k-1}v_kv_{k+1}v_{k+2}) = YXX$. Dengan menggunakan kontraksi garis didapat $f' = v_1 \dots v_{k-1}v_{k+2} \dots v_nv_1$. Kontraksi garis mengurangi 360° dari jumlah sudut dan menambah 180° . Maka $\varphi(f) = ((n-1)\pm 2) \times 180^\circ$. Dengan induksi f' mempunyai representasi planar, maka f yang dihasilkan dari f' dengan menggunakan operasi ekspansi garis juga mempunyai representasi planar. ■

DEFINISI 44 :

Komplemen dari suatu path terhadap suatu bujur sangkar σ adalah sembarang path P^C dalam graph $\rightarrow PP^C$ adalah suatu cycle yang menyederhanakan ke σ .

LEMMA 3.5 :

Diberikan suatu path P , semua komplemennya terhadap bujur sangkar σ , yang mempunyai label awal dan akhir yang sama, mempunyai bentuk sederhana yang unik.

Bukti :

Misal $(P) = \alpha = X_1X_2\dots X_k$. Karena α adalah sepikal, kita mempunyai $X_i = X_j$ untuk $i = j \pmod{4}$. Anggap bahwa $k > 4$ dan sepikal α dan bujur sangkar σ keduanya searah dengan jarum jam atau keduanya berlawanan arah dengan jarum jam. Maka σ pasti sub untai dari α . Karena σ adalah untai siklik, dapat dianggap bahwa $\sigma = X_1X_2X_3X_4$.

Misal P^c adalah komplemen dari P terhadap σ dan misal $\lambda(P^c) = \beta$. Karena $k > 4$, β pasti sepikal dalam arah yang berlawanan dengan α . Karena baik α maupun β adalah bentuk sederhana, maka $\alpha\beta$ dapat disederhanakan hanya pada antara dua untai. Tulis $\beta = \beta_1\beta_2\beta_3$, $\rightarrow \beta_3\alpha\beta_1 = \alpha$. Maka jelas bahwa $\beta_1 \in \{X_{k-3}X_k, X_k, \epsilon\}$ dan $\beta_3 \in \{\epsilon, X_1, X_1X_4\}$. β_2 adalah "bagian penting" dari β . Karena $|\alpha| = k$ dan $|\sigma| = 4$, maka $|\beta_2| = k-4$. Berdasarkan nilai yang mungkin dari β_1 dan β_3 , dan kenyataan bahwa β adalah sepikal dalam arah yang berlawanan dengan α , dapat disimpulkan bahwa $\beta_2 = X_{k-1}X_{k-2}\dots X_{k-4}$. Kita menggunakan $k > 4$ supaya β_2 tidak menjadi untai yang kosong. Maka $\beta = \{\epsilon, X_k, X_{k-3}X_k\} X_{k-1}\dots X_{k-4} \{\epsilon, X_1, X_1X_4\}$, yang unik tetapi untuk label awal dan label akhir yang sama. Untuk masalah dengan α dan σ berlawanan arah serta $k \leq 4$ bukti serupa. ■

3.3. Representasi Planar untuk Graph Rectilinier biconnected.

Dalam sub bab ini akan dibahas dalam keadaan bagaimana graph rectilinier yang biconnected akan mempunyai representasi planar.

DEFINISI 45 :

Misal v adalah suatu titik dalam graph rectilinier G . Didefinisikan $L_G(v)$ adalah daftar siklik tetangga (neighbors) dari v dalam G dengan arah berlawanan jarum jam.

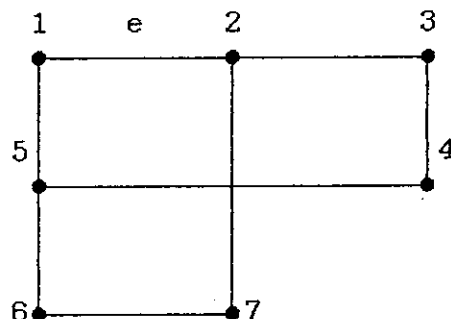
Menggunakan daftar siklik di atas, dapat didefinisikan notasi penting yaitu suatu permukaan kandidat (candidate face) dari graph rectilinier yang biconnected.

DEFINISI 46 :

Misal $G(V,E,\lambda)$ adalah suatu graph rectilinier yang biconnected. Dengan setiap garis $e = (v_1, v_2)$, $v_1 > v_2$ (untuk lebih mudahnya dianggap V adalah himpunan integer), dikelompokkan dua daftar dari titik-titik yang disebut permukaan kandidat $CF_1(e)$ dan $CF_2(e)$ yang didefinisikan sebagai berikut. $CF_1(e) = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ dengan $v_i \neq v_j$ untuk $1 \leq i < j \leq k$, dan $v_{k+1} = v_1$ untuk suatu i , $1 \leq i < k-1$. Juga $\forall l, 1 < l < k+1$, v_{l+1} adalah pengganti (successor) dari v_{l-1} dalam daftar siklik $L_G(v_1)$. $CF_2(e)$ didefinisikan serupa tetapi dimulai dengan v_2, v_1 .

Mudah dilihat bahwa CF_1 dan CF_2 didefinisikan secara unik. Gambaran dari definisi ini dapat dilihat

pada gambar 3.12.



$$L_G(1) = (5,2) \text{ dan } L_G(2) = (1,7,3)$$

$$CF_1(e) = 2, 1, 5, 6, 7, 2 \text{ dan } CF_2(e) = 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$

Gb. 3.12. Permukaan kandidat

Sekarang diperlukan suatu lemma tentang graph tidak berarah yang biconnected. Didefinisikan suatu graph biconnected adalah minimal $\iff \forall$ garis e dalam graph, $G - e$ tidak biconnected.

LEMMA 3.6 :

Jika G adalah graph biconnected minimal yang mempunyai paling sedikit empat titik, maka memuat suatu titik berderajat 2.

Bukti :

Misal G tidak memuat titik berderajat 2 atau semua titiknya berderajat ≥ 3 . Maka \forall garis e dalam G , $G - e$ biconnected, yang berarti G tidak minimal. ■

LEMMA 3.7 :

Dalam sembarang graph G yang biconnected, yang bukan suatu cycle sederhana, \exists path sederhana $P = (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{r-1}, v_r)$, $r \geq 2$, dengan titik-titik

tengahnya (jika ada) v_i , $1 < i < r$, semua mempunyai derajat 2, \rightarrow graph $G' = G - P$ bconnected.

Bukti :

Ubah graph yang diberikan menjadi graph lain G'' dengan menggantikan semua path yang berbentuk $P=(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{r-1}, v_r)$ dimana titik-titik v_i , $i \neq 1, r$ semua mempunyai derajat 2, sehingga \forall garis e dalam G'' \exists path P_e yang berkorespondensi dalam G . Perhatikan bahwa derajat setiap titik dalam G'' adalah paling sedikit 3. Jika G'' mempunyai garis ganda antara dua titik, katakanlah u dan w , maka paling sedikit dalam G terdapat 2 path yang sejajar antara u dan w . Karena G bukan suatu cycle sederhana, $\forall P_e$ yang sejajar itu $G - P_e$ bconnected. Jika G tidak mempunyai garis ganda antara dua titik, maka pasti paling sedikit mempunyai empat titik. Dengan lemma 3.6, G tidak dapat minimal. Maka ada suatu garis dalam $G'' \rightarrow G'' - e$ bconnected, yang menunjukkan $G - P_e$ juga bconnected. ■

Teorema berikut ini memberikan syarat perlu dan cukup untuk suatu graph rectilinier bconnected supaya mempunyai representasi planar.

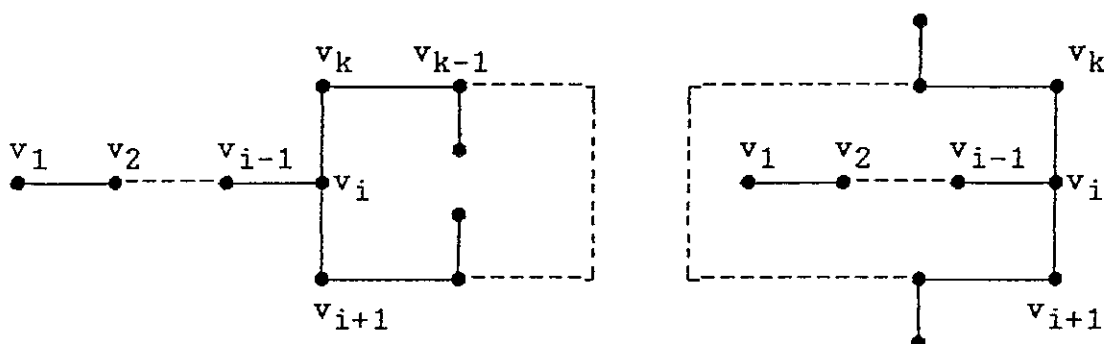
THEOREMA 3.1 :

Misal $G=(V, E, \lambda)$ adalah suatu graph rectilinier bconnected dengan paling sedikit mempunyai tiga garis. Maka G mempunyai representasi planar $\iff \forall$ garis dalam graph tersebut, kedua permukaan kandidat $CF_1(e)$ dan $CF_2(e)$ menunjukkan cycle sederhana yang mempunyai

representasi planar (yaitu titik awal dan titik akhir sama dan menyederhanakan ke suatu bujur sangkar). Lebih lanjut jika graph tersebut mempunyai representasi planar, setiap permukaan kandidat yang berbeda itu berkorespondensi dengan suatu permukaan dalam representasi planar.

Bukti :

====> Misal untuk suatu garis $e=(v_1,v_2)$, $CF_1(e)$ bukan suatu cycle sederhana, yaitu $CF_1(e)=v_1,v_2,\dots,v_k,v_{k+1}$ dengan $v_i=v_{k+1}$ untuk suatu i , $1 < i < k-1$. Misal G mempunyai representasi planar. Lihat pada cycle v_i,\dots,v_k,v_{k+1} dalam representasi planar. Misal garis (v_{i-1},v_i) ada di dalam cycle ini. Maka v_i adalah suatu titik artikulasi, yang kontradiksi dengan kebiconnectedan dari G . Kasus dimana (v_{i-1},v_i) di luar cycle dibuktikan serupa (Kedua kasus tersebut dapat dilihat pada gb. 3.13).



Gb. 3.13 Dua representasi planar yang mungkin dari $CF_1(e)$

Misal $CF_1(e)$ adalah suatu cycle tetapi tidak mempunyai representasi planar. Karena $CF_1(e)$ adalah subgraph dari G , G sendiri tidak dapat mempunyai representasi planar. Bukti serupa dapat digunakan untuk $CF_2(e)$.

\leftarrow Bukti dari bagian ini adalah dengan menggunakan induksi pada jumlah garis. Pangkal (basis) untuk induksi ini adalah cycle sederhana yang mempunyai representasi planar. Misal bahwa pernyataan benar untuk semua graph rectilinier biconnected yang mempunyai kurang dari k garis. Misal G adalah graph rectilinier biconnected yang bukan suatu cycle sederhana dan yang mempunyai k garis. Dengan lemma 3.7, \exists path sederhana $P=(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{r-1}, v_r)$ dengan titik-titik $v_i, i \neq 1, r$ semua mempunyai derajat 2, \rightarrow graph $G'=G-P$ biconnected. v_1 dan v_r akan mempunyai derajat lebih dari 2. Juga anggap bahwa $v_1 \succ v_2$ dan $e_{12}=(v_1, v_2)$.

Karena semua permukaan kandidat adalah cycle, jika suatu garis e terletak pada suatu permukaan kandidat f , maka $CF_1(e)=f$ atau $CF_2(e)=f$. Sehingga setiap garis akan muncul tepat sekali dalam 2 permukaan kandidat ini. Maka path P akan muncul dalam $CF_1(e_{12})$ dan path lawannya akan muncul dalam $CF_2(e_{12})$.

Ambil

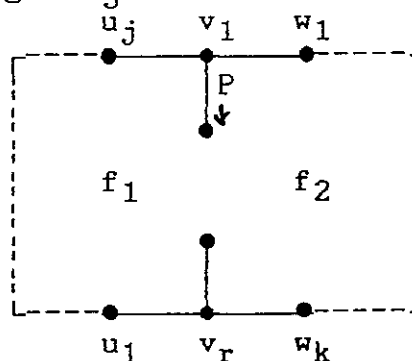
$$f_1 = CF_1(e_{12}) = v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_j, v_1,$$

$$f_2 = CF_2(e_{12}) = v_r, v_{r-1}, \dots, v_1, w_1, \dots, w_k, v_r, \text{ dan}$$

$$f_3 = v_1, w_1, \dots, w_k, v_r, u_1, \dots, u_j, v_1.$$

Berdasarkan definisi dari permukaan kandidat f_1 dan f_2 bahwa titik-titik u_j, v_2, w_1 muncul secara berurutan dalam $L_G(v_1)$ dan w_k, v_{r-1}, u_1 muncul serupa dalam $L_G(v_r)$ (lihat gb.3.14). Maka \forall garis dalam f_1 atau f_2 yang tidak di dalam P , permukaan kandidat yang baru dalam G' akan menjadi f_3 yang merupakan suatu cycle sederhana.

Tinggal menunjukkan bahwa f_3 mempunyai representasi planar. Karena f_1 dan f_2 keduanya mempunyai representasi planar, maka $\varphi(f_1) = (r+j+2) \times 180^\circ$ dan $\varphi(f_2) = (r+k+2) \times 180^\circ$. Akan tetapi karena f_1 dan f_2 memuat garis e_{12} , dinyatakan oleh definisi dari permukaan kandidat bahwa $\varphi(f_1) = (r+j+2) \times 180^\circ$ dan $\varphi(f_2) = (r+j+2) \times 180^\circ$ tidak mungkin. Dengan sedikit perhitungan secara aljabar dapat ditunjukkan bahwa $\varphi(f_3) = ((j+k+2) \pm 2) \times 180^\circ$. Karena f_3 mempunyai $j+k+2$ titik, dengan lemma 3.4, maka f_3 mempunyai representasi planar. Maka permukaan kandidat untuk G' sama seperti untuk G , tetapi di sini f_3 menggantikan permukaan f_1 dan f_2 . Sehingga \forall garis dalam G' kedua permukaan kandidatnya juga cycle sederhana yang mempunyai representasi planar. Dengan hipotesis induksi G' mempunyai representasi planar dan setiap permukaan kandidat yang berlainan berkorespondensi dengan suatu permukaan dalam representasi planarnya. Urutan dari garis-garis pada titik-titik v_1 dan v_r menyatakan secara tidak langsung bahwa garis akhir (v_1, v_2) dan (v_{r-1}, v_r) dari path P keduanya menuju ke dalam permukaan yang berkorespondensi dengan f_3 .



Gb. 3.14 Dua cycle f_1 , f_2 dan path P

Tinggal menunjukkan bahwa dapat menambahkan path P kembali tetapi tetap mempunyai representasi planar. Cari sembarang path P' yang rectilinier di dalam permukaan yang berkorespondensi dengan f_3 dalam representasi planar dari G' , yang dimulai dan diakhiri dengan $\lambda((v_1, v_2))$ dan $\lambda((v_{r-1}, v_r))$. Hal ini jelas memungkinkan walau harus memperluas grid supaya P' terletak pada garis-garis grid. P' menghasilkan suatu permukaan di dalam representasi planar bersama-sama path $P_1 = v_r u_1 u_2 \dots u_j v_1$. Jika f_3 bukan merupakan permukaan luar maka $\overline{\lambda(P_1 P')} = \overline{\lambda(f_1)} = \overline{\lambda(P_1 P)} = \sigma$. Dengan definisi, baik P maupun P' adalah komplement dari P_1 terhadap σ , mereka juga mempunyai label awal dan akhir yang sama. Dan dengan lemma 3.5 maka $\overline{\lambda(P)} = \overline{\lambda(P')}$. Oleh karena itu $G' + P'$ dapat diperoleh dari G dengan menggunakan barisan dari 4 operasi topologi, dan karena $G' + P'$ mempunyai representasi planar, dengan lemma 3.1, G juga mempunyai representasi planar. Mudah untuk dilihat bahwa dua permukaan baru yang diperoleh setelah memasukkan P' dalam representasi planar dari G' berkorespondensi dengan f_1 dan f_2 . ■

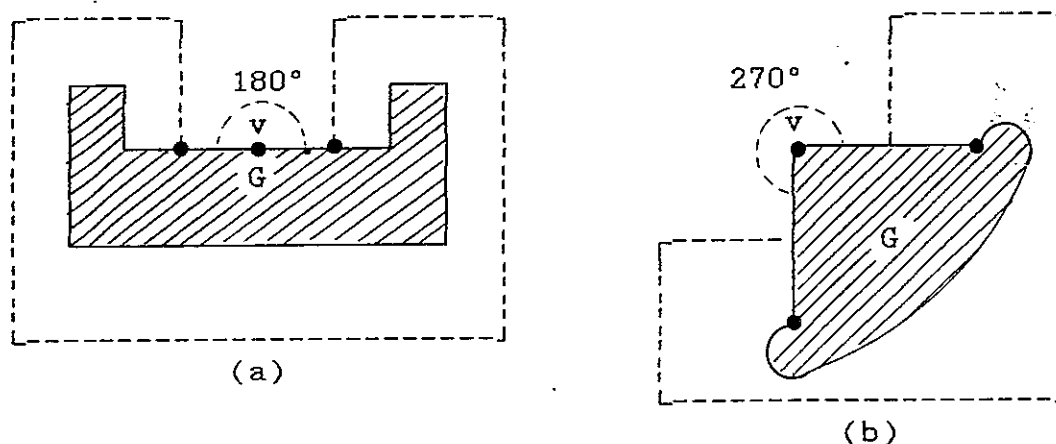
LEMMA 3.8 :

Misal G adalah suatu graph rectiliner biconnected yang mempunyai representasi planar. Untuk semua permukaan interior f dalam representasi planar dari G , $\varphi(f) = (n-2) \times 180^\circ$, dan untuk permukaan eksterior f_e yang unik, $\varphi(f_e) = (n+2) \times 180^\circ$.

Bukti :

Pandang representasi planar dari G . Permukaan-permukaan representasi planar yang dibentuk oleh G , adalah merupakan poligon dalam bidang datar. Dengan definisi dari φ , \forall permukaan interior dihitung sudut interior dan \forall permukaan eksterior dihitung sudut eksterior. Jadi terbukti (ingat bahwa jika G merupakan cycle sederhana, representasi planarnya mempunyai dua permukaan).

Misal G adalah graph rectiliniier yang mempunyai representasi planar, f_e permukaan eksterior dalam representasi planar dan v salah satu titik pada f_e . Jika $\varphi_{f_e}(v)=180^\circ$ maka G dapat direpresentasi planarkan dalam suatu poligon bentuk (shape) U , seperti diperlihatkan pada gb. 3.15 (a). Jika $\varphi_{f_e}(v)=270^\circ$ maka G dapat direpresentasi planarkan dalam suatu poligon bentuk W , seperti diperlihatkan pada gb. 3.15 (b).



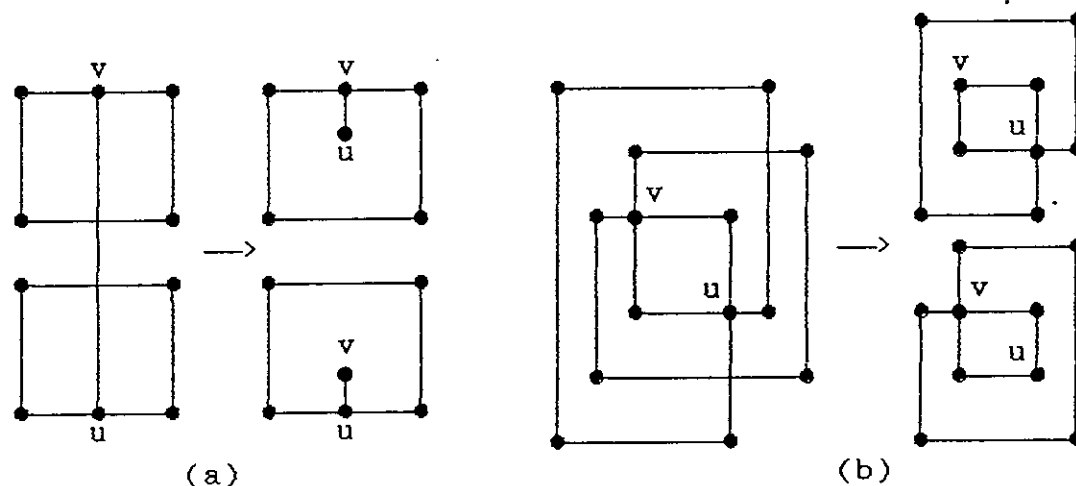
Gb. 3.15 Bentuk U dan W

3.4. Representasi Planar untuk Graph Rectiliniier yang tidak Biconnected

Dalam sub bab ini akan memeriksa dalam keadaan bagaimana suatu graph rectiliniier yang tidak biconnected

akan mempunyai representasi planar. Ini akan tergantung pada planaritas komponen-komponen biconnectednya dan pada bagaimana caranya komponen-komponen tersebut berpotongan pada titik artikulasinya.

Dalam gb. 3.4 dapat dilihat dua contoh dari graph rectilinier yang tidak mempunyai representasi planar, yang masing-masing dibangun oleh dua komponen biconnected yang mempunyai representasi planar. Sedangkan pada gb. 3.16 dapat dilihat dua graph rectilinier yang tidak mempunyai representasi planar, yang masing-masing dibangun oleh tiga komponen biconnected yang mempunyai representasi planar. Perhatikan bahwa suatu garis adalah suatu komponen biconnected (trivial).



Gb. 3.16 Dekomposisi dari graph yang tidak mempunyai representasi planar

Jika v adalah titik artikulasi dari suatu graph G , maka pemindahannya menghasilkan beberapa subgraph G_i . Subgraph $G_i + v$ disebut sebagai subgraph yang berpotongan di v . Sekarang akan dibahas graph rectilinier yang komponen biconnectednya mempunyai representasi planar.

DEFINISI 47 :

Misal B_1 dan B_2 adalah dua komponen biconnected yang non trivial dari suatu graph rectilinier G yang mempunyai suatu titik artikulasi v . Maka B_1 dan B_2 dikatakan *menjalin* (interlace) \iff garis horizontal di v kepunyaan B_1 dan garis vertikal di v kepunyaan B_2 (gambar 3.4a). Dan titik v ini disebut *titik terjalin* (interlaced vertex). Suatu titik artikulasi yang tidak mempunyai sifat demikian disebut *terjalin bebas* (interlace free) (gb. 3.4b).

LEMMA 3.9 :

Suatu graph rectilinier G yang mempunyai titik artikulasi v yang terjalin tidak mempunyai representasi planar.

Bukti :

Misal B_1 dan B_2 adalah dua komponen biconnected yang mempunyai titik v . Karena B_1 dan B_2 nontrivial, garis horizontal di v terletak pada suatu cycle dalam B_1 dan garis vertikalnya terletak pada suatu cycle dalam B_2 . Jadi tidak mungkin untuk menggambar G pada bidang tanpa dua cycle ini saling berpotongan. ■

DEFINISI 48 :

Misal B_1 dan B_2 adalah dua komponen biconnected dari G yang bukan *penjalin* (non-interlacing), yang mempunyai titik artikulasi v , dan anggap bahwa B_1 nontrivial. Maka B_1 dikatakan *mendominasi* B_2 di v (atau

B_2 di dalam B_1) jika (i) v tidak berada dalam permukaan eksterior dari B_1 , atau (ii) garis (u,v) dan (v,w) di titik v tidak berada pada permukaan eksterior dari B_1 , dan u, w berurutan dalam $L_G(v)$ (perhatikan bahwa mereka selalu berurutan dalam $L_{B_1}(v)$). Jika B_1 tidak mendominasi B_2 atau B_2 tidak mendominasi B_1 maka B_1 dan B_2 dikatakan *saling di luar*.

Maksud dari definisi di atas adalah bahwa dalam representasi planar, suatu komponen biconnected harus terletak seluruhnya di dalam permukaan komponen biconnected lainnya, jika salah satu garisnya berada dalam permukaan itu. Ini menunjukkan ke kriteria planaritas. Jelasnya jika komponen biconnected B_1 dan B_2 yang mempunyai titik artikulasi v saling mendominasi, maka graph tersebut tidak mempunyai representasi planar (kasus ini terjadi pada contoh gambar 3.4b).

Misal B_1 dan B_2 adalah dua komponen biconnected dari suatu graph yang mempunyai titik artikulasi $v \rightarrow B_1$ mendominasi B_2 . Misal G' adalah subgraph dari G yang berpotongan di v yang memuat B_2 . Jika G mempunyai representasi planar, maka dalam representasi planar dari G , keseluruhan dari G' harus berada dalam satu permukaan dari B_1 . Ini memberikan perluasan dari relasi "dominasi" sebagai berikut :

DEFINISI 49 :

Misal $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ merupakan himpunan dari komponen-komponen biconnected dari G . B_i dikatakan

mendominasi B_j jika terdapat komponen biconnected B_k dan suatu titik artikulasi v , \rightarrow (i) B_k dan B_i mempunyai v , (ii) B_i mendominasi B_k di v dan (iii) B_j dan B_k keduanya adalah subgraph dari salah satu subgraph terhubung yang berpotongan di v .

LEMMA 3.10 :

Jika dalam graph rectilinier G , \exists pasangan komponen biconnected B_1 dan B_2 yang saling mendominasi, maka G tidak mempunyai representasi planar

Bukti :

Jika B_1 dan B_2 mempunyai titik artikulasi v , maka seperti telah diterangkan sebelumnya bahwa G tidak mempunyai representasi planar. Misalkan B_1 dan B_2 saling lepas. Karena B_1 dan B_2 saling mendominasi, pasti terdapat titik-titik artikulasi v_1, v_2 , komponen biconnected B_1', B_2' dan G_1, G_2 , \rightarrow untuk $i=1, 2$, (i) B_i dan B_i' mempunyai v_i , (ii) B_i' mendominasi B_i di v_i , dan (iii) G_i adalah salah satu subgraph perpotongan di v_i dan memuat B_i' . Sekarang dianggap bahwa G mempunyai representasi planar. Dari (i) $v_2 \in (G_1)$, (ii) G_1 terletak seluruhnya di dalam B_1 dalam representasi planar, (iii) $V(G_1) \cap V(B_1) = \{v_1\}$, dapat disimpulkan bahwa v_2 harus berada di dalam poligon yang didefinisikan oleh suatu permukaan f_1 dari B_1 yang memuat v_1 . Serupa, v_1 akan berada di dalam suatu poligon yang didefinisikan oleh suatu permukaan f_2 dari B_2 yang memuat v_2 . Maka beberapa titik dari f_2 harus terletak di luar f_1 dan kedua permukaan itu harus beririsan. Oleh

karena itu G tidak mempunyai representasi planar. ■

Diberikan suatu graph rectilinier G , dengan suatu himpunan komponen biconnected B dan himpunan titik-titik artikulasi A , dapat dibuat suatu pohon dari komponen-komponen biconnected \rightarrow

$$V(T) = A \cup B, \text{ dan } E(T) = \{v, B \mid v \in A, B \in B, v \in V(B)\}$$

LEMMA 3.11 :

Misal G suatu graph rectilinier dengan himpunan komponen biconnected B dan pohon dari komponen biconnected T . Misal B adalah suatu daun dalam pohon T yang bertetangga dengan titik artikulasi v yang berderajat 2 di dalam T . Jika B mendominasi B' suatu komponen biconnected lain yang bertetangga dengan v di dalam T , maka B mendominasi setiap komponen biconnected lain dalam B .

Bukti :

Dua subgraph berpotongan di v hanyalah B dan $G-B+v$. Maka terbukti dari definisi 49. ■

Jika tidak ada dua komponen biconnected yang saling mendominasi, maka relasi "dominasi" menunjukkan suatu orde parsial pada B . Suatu elemen bukan pendominasi (non dominating) dalam orde parsial ini adalah suatu komponen biconnected yang tidak mendominasi suatu komponen biconnected manapun.

AKIBAT 3.1 :

Jika untuk suatu graph rectilinier G "dominasi"

suatu orde parsial, maka \mathcal{B} komponen biconnected yang bukan pendominasi yang merupakan suatu daun dalam pohon T dari komponen biconnected.

Bukti :

Sembarang komponen biconnected yang trivial (yang hanya berupa suatu garis) pasti bukan pendominasi. Jika sembarang titik di T (yang berkorespondensi dengan suatu titik artikulasi dalam G) bertetangga dengan dua daun, maka kedua daun non trivial dan bukan pendominasi, atau salah satunya adalah komponen biconnected yang trivial. Jika tidak ada titik dalam G yang bertetangga dengan dua daun (hanya bertetangga dengan satu daun), maka semua daun bertetangga dengan titik yang berderajat 2, dan paling sedikit dua daun. Jika kedua daun itu pendominasi, maka dengan lemma 3.11 kedua daun saling mendominasi yang kontradiksi dengan "dominasi" adalah suatu orde parsial. Jadi semua daun-daun ini pasti bukan pendominasi. ■

THEOREMA 3.2 :

Misal G adalah suatu graph rectilinier dan \mathcal{B} adalah himpunan komponen biconnected dari G . G mempunyai representasi planar $\langle \implies \rangle$:

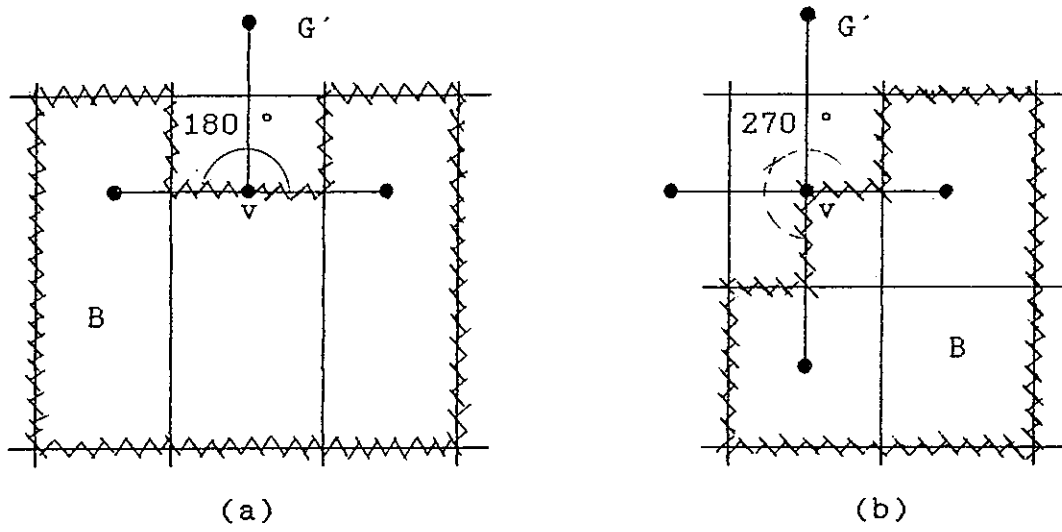
- (i) setiap komponen biconnected B dalam \mathcal{B} mempunyai representasi planar,
- (ii) setiap titik artikulasi dari G terjalin bebas, dan
- (iii) "dominasi" menunjukkan suatu orde parsial pada \mathcal{B} .

Bukti :

====> Terbukti dari lemma 3.9 dan 3.10.

<==== Dibuktikan dengan induksi pada jumlah titik. Pangkal dari induksi ini adalah graph rectilinier biconnected. Misal G tidak biconnected dengan $|V(G)|=n$. Lihat pohon T dari komponen biconnected. Dengan akibat 3.1, \exists daun B dalam T yang bukan pendorominasi. Misal v adalah suatu titik artikulasi yang dipunyai B dan $G' = G - B + v$. G' adalah suatu subgraph dari G yang juga memenuhi kondisi dari pernyataan. Dengan hipotesa induksi G' mempunyai representasi planar. Dengan syarat (i), B juga mempunyai representasi planar. Jika B adalah suatu garis tunggal, mudah untuk menambah garis ke representasi planar dari G' . Misal G' tidak trivial. Karena B bukan pendorominasi, v harus terletak pada permukaan eksterior f_e dari B dan $\varphi_{f_e}(v) \neq 90^\circ$.

Buat representasi planar dari G' dan B secara terpisah dan pandang titik v dalam kedua representasi planar tersebut. Jika $\varphi_{f_e}(v) = 180^\circ$, maka v hanya pada satu garis dalam G' . Tambahkan enam garis grid baru pada representasi planar dari G' , buat bentuk U seperti diperlihatkan pada gb.3.17a, perbesar representasi planar, dan buat representasi B dalam U . Jika $\varphi_{f_e}(v) = 270^\circ$, maka v hanya pada satu garis pada G' , atau pada dua garis yang tegak lurus dalam G' . Dalam kedua kasus tersebut, tambahkan enam garis grid baru, buat bentuk W dan buat representasi planar B seperti diperlihatkan dalam gb.3.17b. ■



Gb. 3.17 Penambahan B ke representasi planar G'