BAB II

KONSEP-KONSEP DASAR TEORI GRAPH

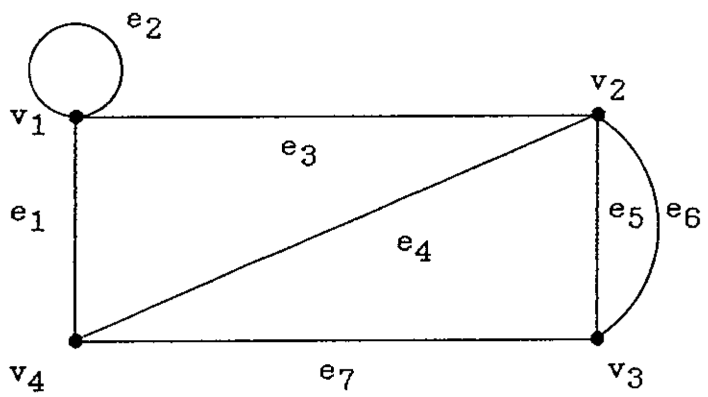
2.1. Graph

DEFINISI 1 :

Suatu Graph G didefinisikan sebagai pasangan G(V,E) yang terdiri himpunan titik-titik $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ dan himpunan garis-garis $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, dimana V tidak boleh kosong, ∍ setiap garis e_k merupakan pasangan berurutan dari dua titik (v_i, v_j) dimana i dan j boleh sama.

Antara dua titik mungkin terdiri lebih dari satu garis.

Contoh :



Gb.2.1 Graph G(V,E)

Gb.2.1. Memperlihatkan suatu graph dengan empat titik dan tujuh garis. Garis e_1 merupakan pasangan berurutan dari (v_1, v_4), garis e_2 merupakan pasangan berurutan dari (v_1, v_1). Sedang pasangan titik v_2 dan v_3 dihubungkan langsung dengan dua garis yaitu e_5 dan e_6.

Catatan :

Notasi $e_1 = (v_1, v_4)$ akan digunakan untuk menunjukan bahwa e_1 Insiden dengan titik v_1 dan v_4. Pada garis $e_1 = (v_1, v_4)$, titik v_1 dipandang sebagai titik awal dan v_4 sebagai titik akhir, atau sebaliknya. Oleh karena itu notasi $e_1 = (v_1, V_4)$ dan $e_1 = (v_4, v_1)$ keduanya ekuivalen. Selanjutnya notasi $|E|$ dan $|V|$ akan digunakan untuk menunjukkan banyaknya titik dan banyaknya garis dalam suatu graph.

DEFINISI 2 :

Loop didefinisikan sebagai suatu garis dalam suatu graph yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama, atau suatu garis e_k yang merupakan pasangan berurutan dari titik yang sama yaitu (v_i, v_i).

Contoh :

Pada gambar 2.1 e_2 merupakan suatu loop.

DEFINISI 3 :

Garis e_i dan e_j disebut garis sejajar jika mempunyai titik-titik ujung yang sama.

Contoh :

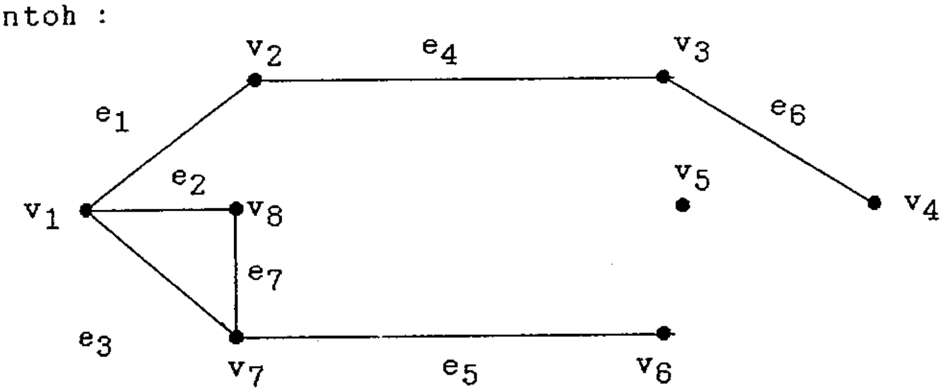
Pada gambar 2.1 e_5 dan e_6 merupakan dua garis yang sejajar.

2.2. Insiden dan Derajad

DEFINISI 4 :

Suatu titik v_i dan beberapa garis e_j dikatakan insiden satu dengan yang lain, $\Longleftrightarrow$ titik v_i merupakan titik awal atau titik akhir dari garis-garis tersebut.

Contoh :



Gb. 2.2 Graph dengan titik terisolasi

Pada Gb. 2.2 garis-garis e_1, e_2 dan e_3 insiden dengan titik v_1 Garis e_4 dan e_6 insiden dengan v_3 dan sebagainya. Tetapi e_3 tidak insiden dengan v_2.

DEFINISI 5 :

Dua titik dikatakan bertetangga (adjacent) jika kedua titik tersebut dihubungkan paling sedikit satu garis.

Contoh :

Pada Gb. 2.2 v_1 dan v_2 bertetangga, tetapi v_1 tidak bertetangga dengan v_3.

DEFINISI 6 :

Derajad (degree suatu titik v_i, ditulis $d(v_i)$

adalah banyaknya garis yang insiden dengannya.

Contoh :

Pada Gb. 2.2 titik v_1 berderajad 3 atau $d(v_1) = 3$. Sedangkan $d(v_4) = d(v_6) = 1$, $d(v_5) = 0$ dan titik-titik yang lain berderajad dua.

DEFINISI 7 :

Titik terasing/titik terisolasi adalah titik yang berderajad nol. Titik ujung (end point) adalah titik yang berderajad satu.

Contoh :

Pada Gb. 2.2 titik v_5 merupakan titik terisolasi dan titik-titik v_4, v_6 merupakan titik-titik ujung.

Dalam suatu graph, terdapat hubungan antara derajad dan banyaknya titik dalam graph tersebut. Suatu Loop dalam graph menyumbangkan dua pada derajad suatu titik. Sedangkan garis yang bukan Loop menyumbangkan satu pada derajad suatu titik. Sehingga jumlah total derajad dari suatu titik dalam suatu graph tepat dua kali banyaknya garis dalam graph tersebut. Dari sini didapatkan hubungan :

$$\sum_i d(v_i) = 2\ |E| \qquad (2.1)$$

2.3. Walk, Trail dan Keterhubungan

DEFINISI 8 :

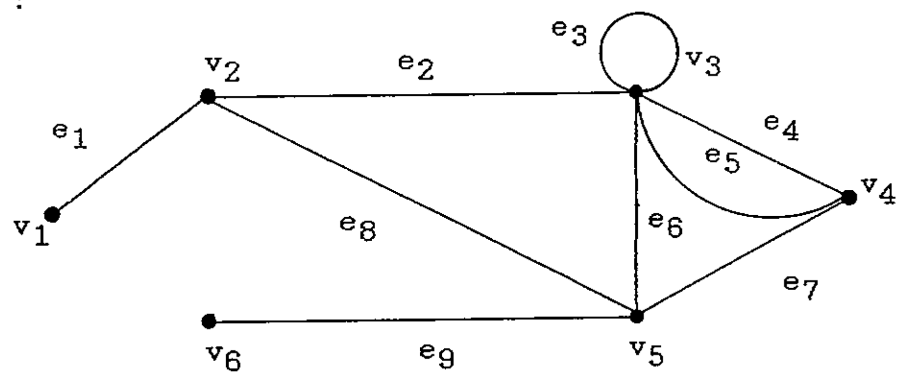
Walk adalah deretan bergantian dari titik dan garis dalam suatu graph, dimulai dan diakhiri dengan titik. Setiap garis insiden dengan titik yang mendahului dan mengakhirinya.

Dalam suatu walk, titik maupun garis boleh diulang. Bila titik awal sama dengan titik akhir maka walk yang demikian disebut tertutup, dan bila tidak disebut terbuka.

DEFINISI 9 :

Trail adalah suatu walk dimana titik-titiknya boleh diulang tetapi garisnya tidak boleh diulang.
Rantai (Chain) adalah trail terbuka sedang sirkuit (circuit) adalah trail tertutup.

Contoh :



Gb. 2.3 Graph dengan walk dan trail

Deretan (e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_9) bersama titik-titik yang berkorespondensi yaitu (v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_3 v_5 v_6) merupakan sebuah walk terbuka. (e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6) merupakan suatu rantai yang diawali dengan titik v_1 dan diakhiri dengan titik v_5. (e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_8) merupakan suatu sirkuit dengan titik awal sama dengan titik akhir yaitu v_2.

DEFINISI 10 :

Rantai sederhana (simple chain) adalah suatu rantai dimana titik-titiknya berlainan dan sirkuit sederhana (simple circuit) adalah suatu sirkuit dimana titik-titiknya berlainan kecuali titik awal dan titik akhir yang merupakan titik yang sama.

Contoh :

Pada Gb. 2.3 (e_1 e_2 e_6 e_9) merupakan rantai sederhana dan (e_2 e_4 e_7 e_8) merupakan sirkuit sederhana.

DEFINISI 11 :

Suatu graph G disebut graph terhubung (connected) $\Longleftrightarrow$ setiap dua titik dari G dihubungkan oleh sekurang-kurangnya satu rantai sederhana.

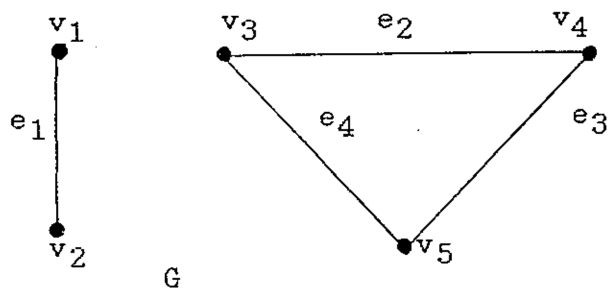
Contoh :

Graph pada Gb. 2.3 merupakan suatu graph terhubung.

DEFINISI 12 :

Suatu graph G disebut graph tidak terhubung (disconnected) $\Longleftrightarrow$ paling sedikit dua titik dari G tidak dihubungkan oleh suatu rantai yang sederhana.

Contoh :



Gb. 2.4 Graph tidak terhubung

Pada Gb. 2.4 pada graph G terdapat pasangan-pasangan titik (v_1,v_3), (v_1,v_4) dan sebagainya yang tidak dihubungkan oleh suatu rantai sederhana. Jelas bahwa G tidak terhubung.

DEFINISI 13 :

a. Suatu subgraph $G_1(V_1,E_1)$ dari graph $G(V,E)$ adalah suatu graph dengan titik-titik V_1 dan garis-garis E_1 $\ni V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

b. Suatu subgraph G_1 disebut subgraph sejati $\Longleftrightarrow$ G_1 dan G tidak identik.

c. G_1 disebut subgraph tidak sejati (improper subgraph) $\Longleftrightarrow$ G_1 sama (identik) dengan G.

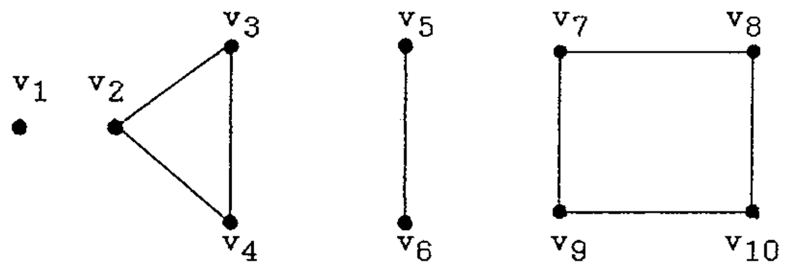
Contoh :

Pada Gb. 2.4 $G_1(V_1,E_1)$ dengan titik-titik $V_1(v_3,v_4,v_5)$ dan garis-garis $E_1(e_2,e_3,e_4)$ membentuk suatu subgraph sejati dari graph yang diperlihatkan. $G_2(V_2,E_2)$ dimana $V_2(v_1,v_2)$ dan $E_2(e_1)$ membentuk subgraph yang lain.

DEFINISI 14 :

Komponen dari suatu graph tidak terhubung G adalah subgraph-subgraph dari G yang terhubung.

Contoh :



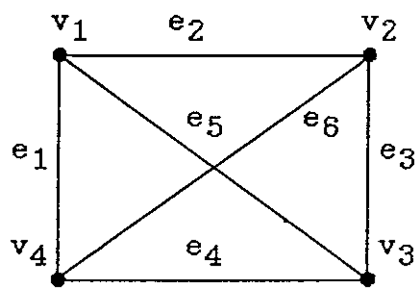
Gb. 2.5 Graph dengan empat komponen

Jelaslah bahwa suatu graph akan terhubung jika hanya mempunyai satu komponen yaitu dirinya sendiri.

DEFINISI 15 :

Suatu graph G disebut suatu graph lengkap (complete graph) jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh suatu garis atau setiap dua titik yang berbeda adalah bertetangga.

Contoh :

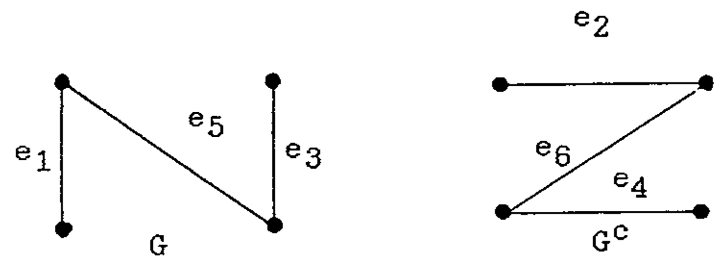


Gb. 2.6 Graph lengkap dengan empat titik

DEFINISI 16 :

Suatu graph G^c dikatakan komplemen dari graph G jika G^c diperoleh dengan menghapus garis-garis G dari suatu graph lengkap yang mempunyai titik-titik yang sama dengan G.

Contoh :



Gb. 2.7 Dua Graph yang saling berkomplemen

Graph G^c diperoleh dengan menghapus garis-garis G yaitu e_1, e_3 dan e_5 dari graph lengkap yang mempunyai titik-titik yang sama dengan G pada Gb. 2.6. Demikian pula sebaliknya, graph G dapat diperoleh dengan menghapus garis-garis G^c dari graph lengkapnya.

Catatan :

1. Gabungan dari dua graph yang berkomplemen menghasilkan suatu graph lengkap
2. Komplemen dari suatu graph lengkap adalah graph nol yaitu suatu graph dengan $E = \emptyset$.

2.4. Graph Planar dan Graph Non Planar

DEFINISI 17 :

Suatu graph G disebut graph planar $\Longleftrightarrow$ G dapat digambar pada bidang datar $\ni$ tidak terdapat garis-garis yang berpotongan kecuali pada titik-titiknya.

Atau hal ini dikatakan bahwa G mempunyai representasi planar. Graph yang tidak planar disebut graph nonplanar.

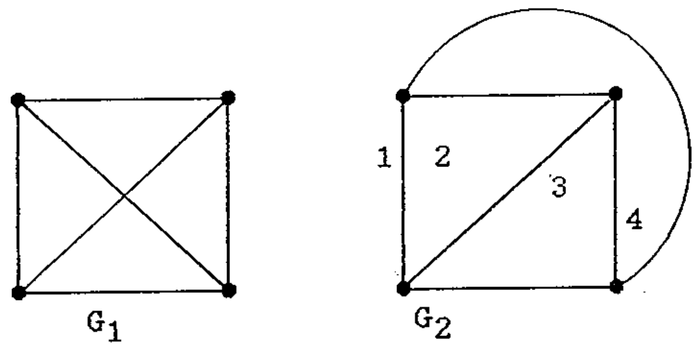
Contoh :

Graph pada Gb. 2.6 juga merupakan suatu graph planar.

DEFINISI 18:

Dua graph $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ dikatakan isomorphic, $G_1=G_2$, jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik yang memperlihatkan ketetanggaan (adjacency).

Contoh :



Gb. 2.8 Dua graph planar yang isomorphic

DEFINISI 19 :

Suatu *region* (daerah) adalah suatu daerah yang dihasilkan ketika suatu graph planar digambar pada bidang datar.

Region yang tidak dibatasi oleh suatu garis disebut region luar. Jumlah region dari suatu graph (termasuk region luar) diberi notasi $|R|$.

Contoh :

Pada gambar 2.8 graph G_2 merupakan graph planar dengan empat region (nomor satu adalah region luar (outside region)).

THEOREMA 2.1 :

Dalam suatu graph planar terhubung tanpa sirkuit, maka

$$|V| = |E| + 1 \tag{2.2}$$

<u>Bukti :</u>

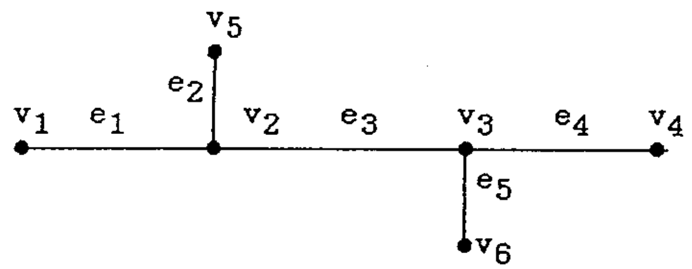
Jika $|V| = 1$ maka agar tidak ada sirkuit $|E|$ harus nol. Juga jelas bahwa jika $|V| = 2$, maka agar graph tersebut terhubung $|E|$ harus paling sedikit sama dengan satu. $|E| = 2$ atau lebih akan membentuk sirkuit, sehingga $|E| = 1$. Theorema benar untuk $|V| = 1$ dan $|V| = 2$. Andaikan theorema benar untuk suatu graph terhubung tanpa sirkuit dengan $|V| = n$, akan dibuktikan theorema juga benar untuk $|V| = n + 1$.

Sekarang tambahkan satu titik pada graph terhubung tanpa sirkuit dengan $|V| = n$ tadi, sehingga sekarang $|V| = n + 1$. Maka untuk mempertahankan keterhubungan harus ditambahkan paling sedikit satu garis. Karena graph semula adalah terhubung maka penambahan dua garis atau lebih akan membentuk sirkuit. Dari sini tepat satu garis harus ditambahkan untuk mempertahankan keterhubungan dan menghindari sirkuit.

Sehingga theorema juga benar untuk $|V| = n + 1$.

Theorema terbukti.∎

Contoh :



Gb. 2.9 Graph planar tanpa sirkuit

Pada graph planar tanpa sirkuit di atas $|V| = 6$ dan $|E| = 5$ memenuhi theorema 2.1 yaitu $|V| = 6 = 5 + 1 = |E| + 1$.

THEOREMA 2.2 :

Persamaan Euler untuk graph planar terhubung G(V,E) dengan $|R|$ region adalah :

$$|V| - |E| + |R| = 2 \qquad (2.3)$$

<u>Bukti :</u> (dengan Induksi)

Theorema jelas benar untuk $|E| = 1$, dalam kasus ini $|V| = 2$ dan $|R| = 1$.

Andaikan theorema benar untuk semua graph planar terhubung dengan $|E| = m - 1$, $m \geq 2$.

Akan dibuktikan theorema juga benar untuk $|E| = m$.

Pandang dua kasus berikut ini ;

Kasus 1 : Graph G(V,E) tidak mempunyai sirkuit. Dalam kasus ini $|R| = 1$ dan dari theorema 2.1, $|V| = |E| + 1$.

Maka $\qquad |V| - |E| = 1$

$\qquad\qquad |V| - |E| + |R| = 1 + 1 = 2$

Jadi terbukti $\qquad |V| - |E| + |R| = 2$

Kasus 2 : Graph G(V,E) sekurang-kurangnya mempunyai satu sirkuit. Dalam kasus ini hilangkan sirkuit yang berbatasan dengan daerah luar (outside region). Hasilnya didapat graph dengan $|E| = m - 1$ garis, $|V|$ titik dan $(|R| - 1)$ region. Karena mempunyai $m - 1$ garis maka dengan hipotesa Induksi

$$|V| - (m - 1) + (|R| - 1) = 2 \text{ adalah}$$

benar.

Dari sini didapat :

$$|V| - m + 1 + |R| - 1 = 2$$

$$|V| - m + |R| = 2$$

Terbukti theorema benar untuk $|E| = m$.

Sehingga theorema terbukti secara lengkap.▪

Contoh :

Pada Gb. 2.8 Graph G_2 adalah suatu graph planar dengan $|R|=4$, $|E|=6$ dan $|V|=6$ memenuhi theorema 2.2 yaitu :

$$|V| - |E| + |R| = 4 - 6 + 4 = 2$$

DEFINISI 20 :

Graph sederhana adalah suatu graph yang tidak mempunyai Loop dan garis-garis paralel. Graph planar sederhana adalah suatu graph sederhana yang planar.

AKIBAT 2.1 :

Jika G(V,E) adalah suatu graph planar sederhana dan terhubung dengan $|V| \geq 3$, maka :

$$3|V| - 6 \geq |E| \tag{2.4}$$

Bukti :

Jumlah garis dalam suatu graph sederhana G(V,E) dengan $|R|$ region akan maksimal jika setiap region dibatasi oleh tepat tiga garis. Selanjutnya tiga garis ini membentuk suatu batas dari tepat dua region. Dari sini didapat persamaan :

$$2|E| = 3|R| \tag{2.5}$$

Substitusikan ke theorema 2.2 :

$$|V| - |E| + |R| = 2$$

$$3|V| - 3|E| + 3|R| = 6$$

$$3|V| - 3|E| + 2|E| = 6$$

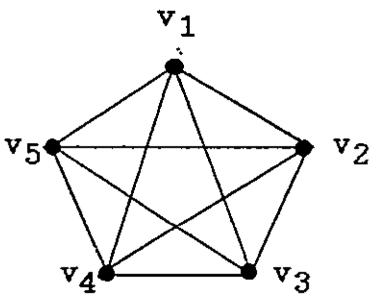
$$3|V| - |E| = 6 \quad \text{atau} \quad 3|V| - 6 = |E| \tag{2.6}$$

Karena persamaan ini memberikan jumlah garis yang maksimal, maka secara umum :

$$3|V| - 6 \geq |E| \tag{2.7}$$

Akibat 2.1 ini penting untuk digunakan dalam pemeriksaan suatu graph, apakah ia planar atau tidak. Jika pertidaksamaan pada akibat 2.1 ini dilanggar maka graph tersebut non planar.

Contoh :



Gb. 2.10 Graph lengkap dengan lima titik (K_5)

K_5 adalah suatu graph lengkap dengan lima titik. Graph ini merupakan graph sederhana dengan jumlah titik paling sedikit yang merupakan graph non planar. Mudah untuk memperlihatkan bahwa K_5 adalah nonplanar. Pada K_5, $|V| = 5$ dan $|E| = 10$ maka

$$3|V| - 6 = 15 - 6 = 9 < 10 = |E|$$

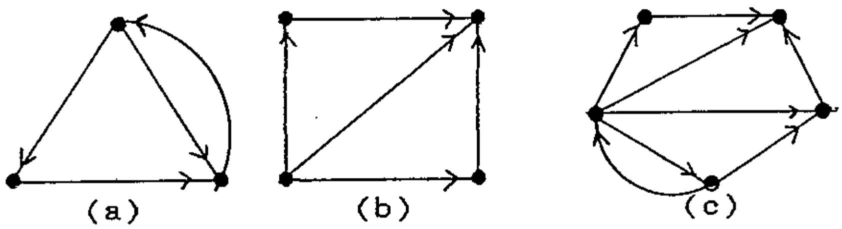
Ternyata K_5 melanggar akibat 2.1 sehingga K_5 nonplanar.

2.5. Graph Berarah (Directed Graph)

DEFINISI 21 :

Graph berarah adalah suatu graph dimana garis-garisnya mempunyai arah. Garis berarah ini dinamakan busur (arc). Graph berarah diberi notasi G(V,A) dimana V adalah himpunan titik-titik dan A adalah himpunan busur-busur $(a_1,a_2,...,a_n)$.

Graph dimana garis-garisnya tidak berarah disebut graph tak berarah (Undirected Graph). Dalam hal ini ekspresi $e_1 = (v_1,v_2)$ digunakan untuk mewakili garis yang menghubungkan v_1 dan v_2.
Ekspresi $e_1(v_1,v_2)$ ekuivalen dengan $e_2(v_2,v_1)$. Akan tetapi dalam kasus dari pada busur, $a_1 = (v_1,v_2)$ akan digunakan untuk mewakili suatu busur dari v_1 ke v_2. Ekspresi $a_2 = (v_2,v_1)$ mewakili suatu busur dari v_2 ke v_1 dan berbeda dengan a_1 hanya dalam arahnya. Suatu busur $a_1 = (v_1,v_2)$ dikatakan insiden dari v_1 dan insiden ke v_2..ls1
Contoh :



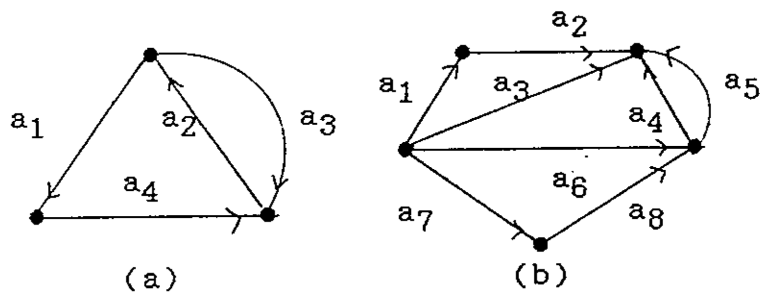
Gb. 2.11 Tiga contoh graph berarah

DEFINISI 22 :

a. Busur sejajar (paralel arcs) adalah busur-busur yang mempunyai titik-titik ujung yang sama.

b. Busur tepat sejajar (strictly paralel arcs) adalah busur-busur yang sejajar yang mempunyai arah yang sama.

Contoh :



Gb. 2.12 Graph berarah dengan busur sejajar dan busur tepat sejajar

Pada gambar 2.12(a) a_2 dan a_3 merupakan busur-busur yang sejajar. Sedang pada gambar 2.12(b) a_4 dan a_5 merupakan busur-busur tepat sejajar.

DEFINISI 23 :

Graph berarah sederhana adalah graph berarah yang tidak mempunyai loop dan tidak mempunyai busur-busur tepat sejajar.

Contoh :

Gambar 2.11 di atas merupakan graph berarah sederhana. Sedang pada gambar 2.12(b) bukan merupakan graph berarah sederhana.

DEFINISI 24 :

Barisan busur (arc sequence) antara v_o dan v_n adalah suatu himpunan busur-busur yang membentuk barisan dari v_o ke v_n.

Busur-busur yang menyusun barisan ini tidak perlu berlainan.

DEFINISI 25 :

Path adalah barisan busur dengan busur-busur yang berlainan.

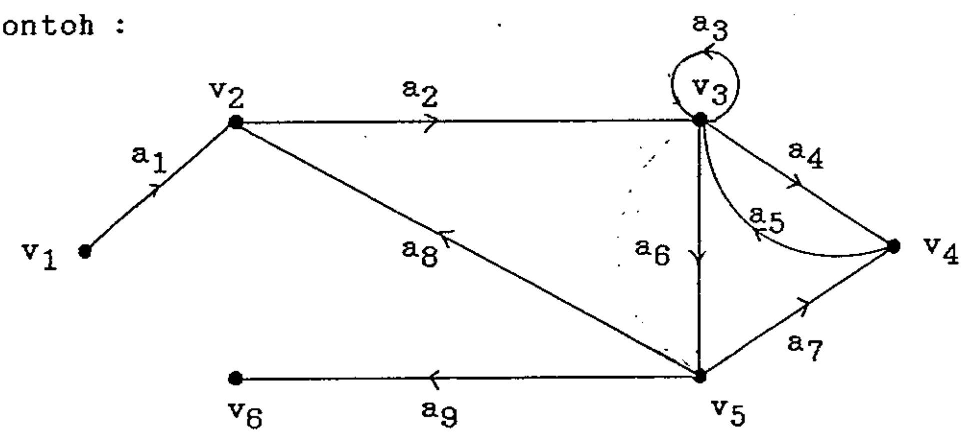
Suatu path dimana semua titiknya berlainan disebut path sederhana (simple path).

DEFINISI 26 :

Cycle adalah suatu path tertutup yaitu suatu path dengan $v_o = v_n$.

Jika dalam suatu cycle semua titiknya berlainan (kecuali $v_o = v_n$), maka ia disebut cycle sederhana (simple cycle).

Contoh :



Gb. 2.13 Graph dengan barisan busur

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ merupakan suatu path yang diawali dengan titik v_1 dan berakhir di titik v_4.

$(a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_5, a_6, a_9)$ merupakan suatu barisan busur.

$(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8)$ merupakan suatu cycle dengan titik awal yang sama dengan titik akhir yaitu v_2. Sedangkan (a_2, a_6, a_8) merupakan suatu cycle sederhana.

DEFINISI 27 :

Graph cyclic adalah suatu graph yang memuat paling sedikit satu cycle.

Graph yang tidak memuat cycle disebut graph acyclic.

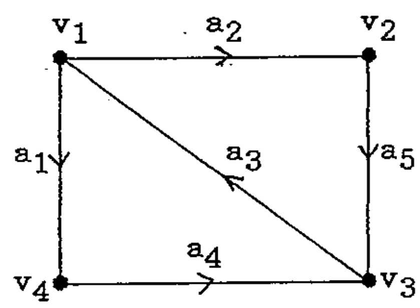
Contoh :

Pada gamba 2.13 merupakan suatu graph cyclic. Sedangkan gambar 2.11(b) merupakan suatu graph acyclic.

DEFINISI 28 :

Suatu graph disebut graph terhubung kuat (strongly connected graph) jika $\forall$ pasangan titik v_i dan v_j $\exists$ path dari v_i ke v_j dan suatu path dari v_j ke v_i.

Contoh :



Gb. 2.14 Graph terhubung kuat

Untuk pasangan titik v_1 dan v_2 $\exists$ path dari v_1 ke v_2 yaitu (a_2), dan path dari v_2 ke v_1 yaitu $(a_5 a_3)$. Untuk v_1, v_3 $\exists$ path dari v_1 ke v_3 yaitu $(a_2 a_5)$ dan path dari v_3 ke v_1 yaitu (a_3) dan seterusnya. Terlihat bahwa setiap bahwa setiap dua titik v_i, v_j terdapat path dari v_i ke v_j dan path dari v_j ke v_i, sehingga graph di atas merupakan graph terhubung kuat.

DEFINISI 29a :

Suatu notasi $a_1 = (v_1, v_2)$ berarti bahwa suatu busur a_1 insiden dari v_1 dan insiden ke v_2. Hal ini dikatakan bahwa busur a_1 insiden positif di v_1 dan insiden negatif di v_2.

DEFINISI 29b :

Banyaknya insiden positif dan insiden negatif pada suatu titik v_i memberikan derajad positif dan derajad negatif pada titik v_i tersebut. Sehingga hubungan keinsidenan graph berarah dengan keinsidenan graph tidak berarah adalah :

$$d(v) = \text{pos } d(v) + \text{neg } d(v), \text{ untuk semua } v \in V \qquad (2.8)$$

Contoh :

Pada gambar 2.13 titik v_1, pos $d(v_1) = 2$ dan neg $d(v_1) = 1$, Jadi $d(v_1) = 2 + 1 = 3$. Titik v_2, pos $d(v_2) = 1$, neg $d(v_2) = 1$, maka $d(v_1) = 1 + 1 = 2$. Dan sebagainya.

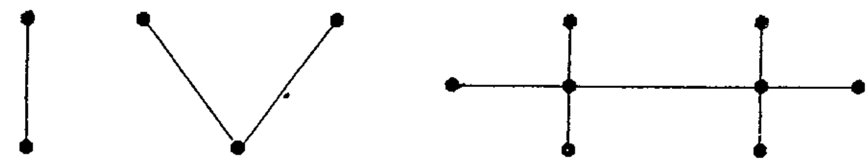
2.6. Pohon (Tree)

DEFINISI 30 :

Pohon T(V,E) didefinisikan sebagai suatu graph tidak berarah dimana setiap pasang titik-titiknya dihubungkan oleh tepat satu rantai.

Konfigurasi ini berarti dua hal yaitu graph tersebut tidak berarah dan tidak mempunyai sirkuit.

Contoh :



Gb. 2.15 Pohon dengan 2 titik, 3 titik dan 8 titik

THEOREMA 2.3 :

Setiap pohon memuat paling sedikit dua titik berderajad satu.

Bukti :

Misal T(V,E) suatu pohon. Menurut definisi benar bahwa pohon tidak memiliki titik berderajad nol. Bukti akan disusun dengan dua langkah. Pertama, akan diperlihatkan bahwa semua titik-titiknya tidak mungkin berderajad $\geq$ 2. Kemudian akan diperlihatkan bahwa suatu pohon tidak mungkin mempunyai tepat satu titik yang berderajad satu. Karena T terhubung dan tidak mempunyai sirkuit, dari theorema 2.1,

$$|V| = |E| + 1 \qquad (2.9)$$

Dari persamaan (2.1) diperoleh :

$$\sum_i d(v_i) = 2|E| = 2|V| - 2 \qquad (2.10)$$

Seandainya semua titik-titiknya berderajad $\geq$ 2, maka

$$\sum_i d(v_i) \geq 2|V| \qquad (2.11)$$

Persamaan (2.11) kontradiksi dengan (2.10). Yang benar tidak mungkin semua titiknya berderajad $\geq$ 2. Andaikan pohon tersebut mempunyai tepat satu titik yang berderajad satu, maka $|V|$ - 1 titik harus berderajad ≥2, diperoleh :

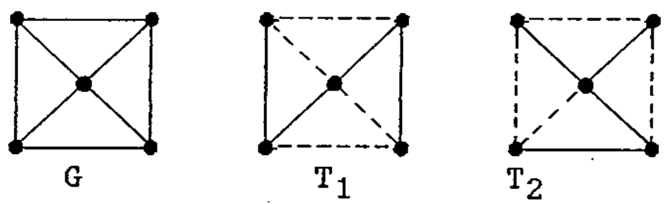
$$\sum_i d(v_i) \geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1 \qquad (2.12)$$

Lagi, persamaan (2.12) kontradiksi dengan (2.10). Yang benar paling sedikit dua titik dari pohon tersebut yang berderajad satu.

DEFINISI 31 :

Suatu pohon T disebut pohon terentang (spanning tree) dari graph terhubung G jika T adalah subgraph dari G dan T memuat semua titik dari G.

Contoh :

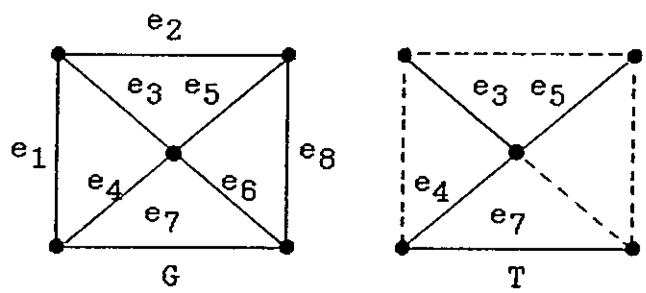


Gb. 2.16 Graph dan pohon perentangnya

DEFINISI 32 :

Tali (chord) adalah garis-garis dari graph G yang tidak termasuk dalam pohon perentang dari graph tersebut. Sedang cabang (branch) adalah garis-garis dari G yang termuat dalam pohon perentangnya.

Contoh :



Gb. 2.17 Tali dan cabang

Garis-garis e_1, e_2, e_6 dan e_8 merupakan tali-tali relatif terhadap T. Sedang garis-garis e_3, e_4, e_5 dan e_7 merupakan cabang-cabang relatif terhadap T.

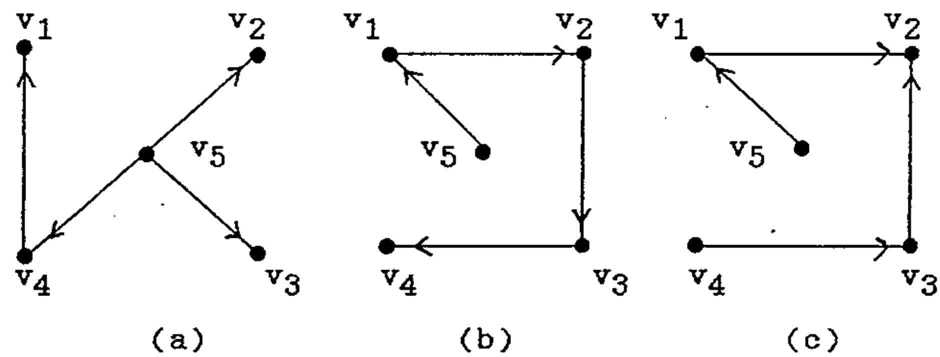
Konsep dari suatu pohon yang didefinisikan pada graph tidak berarah dapat diperluas pada graph berarah.

DEFINISI 33 :

Suatu graph berarah disebut pohon berarah T(V,A) jika korespondensi dari graph tidak berarahnya merupakan suatu pohon dan jika $\exists$ titik $v_o \ni \exists$ path dari vo ke seluruh titik di dalam graph tersebut.

Titik ini disebut akar (root) dari pohon berarah (directed tree).

Contoh :



Gb. 2.18 Contoh pohon berarah (a dan b, tapi bukan c)

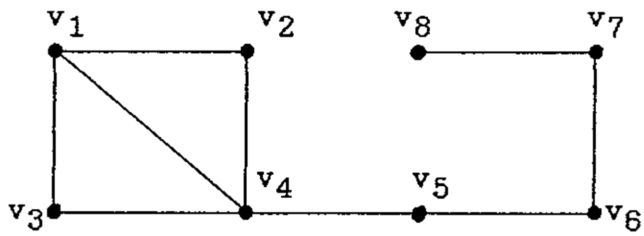
Gambar 2.18 (a) dan (b) memperlihatkan pohon berarah, masing-masing berakar pada v_5. Graph yang ditunjukan pada gambar 2.18(c) bukan pohon berarah, walaupun korespondensi graph tidak berarahnya merupakan suatu pohon, karena ia tidak mempunyai akar.

2.7. Titik Artikulasi dan Graph Biconnected

DEFINISI 34 :

Suatu titik v disebut titik artikulasi (point of articulation/cutpoint) dari suatu graph terhubung G jika graph yang dihasilkan dengan memindahkan titik v adalah graph yang tidak terhubung.

Contoh :



Gb. 2.19 Graph dan titik-titik artikulasinya.

Dalam gambar 2.19 titik-titik v_4, v_5, v_6 dan v_7 semuanya merupakan titik-titik artikulasi. Suatu graph yang tidak mempunyai titik artikulasi disebut nonseparabel, sebaliknya disebut separabel.

THEOREMA 2.4 :

Suatu titik v merupakan suatu titik artikulasi dari suatu graph terhubung $\Longleftrightarrow$ terdapat dua titik $\ni$ titik v termuat dalam setiap rantai yang menghubungkan kedua titik ini.

<u>Bukti :</u>

$\Longrightarrow$ Titik v merupakan titik artikulasi dari suatu graph terhubung G, maka G dapat dipisahkan menjadi beberapa subgraph G_i yang saling asing, dimana titik v dan garis-garis yang insiden dengannya tidak termuat dalam G_i. Ambil dua subgraph dari G misal G_1 dan G_2, dan dari kedua subgraph ini ambil masing-masing satu titik misal u dan w, maka setiap rantai dari u dan w pasti memuat v. Andaikan ∃ rantai dari u ke w yang tidak memuat v, maka jika titik v beserta garis yang insiden dengan v dihapus, G tetap terhubung. v bukan suatu titik artikulasi dari G. Kontradiksi, sebab v titik artikulasi dari G.

Yang benar, setiap rantai yang menghubungkan u dan w pasti memuat v.

Terbukti bahwa titik v suatu titik artikulasi dari G, maka terdapat dua titik dari G ∍ v termuat dalam setiap rantai yang menghubungkan kedua titik ini.

$\Longleftarrow$ Misal G suatu graph terhubung dan v adalah suatu titik di dalam G. Terdapat dua titik di dalam G misalnya a dan b dimana setiap rantai dari a ke b memuat v. Hapus titik v beserta garis-garis yang insiden dengannya, maka tidak ada satu rantaipun yang menghubungkan titik a dan b. Karena tidak ada satu rantaipun yang menghubungkan titik a dan b maka menurut definisi 11 G tidak terhubung, dan v merupakan titik artikulasi dari G.

Terbukti bahwa jika terdapat dua titik dari G ∍ titik v termuat dalam setiap rantai yang menghubungkan kedua titik ini maka titik v merupakan titik artikulasi dari G.∎

DEFINISI 35 :

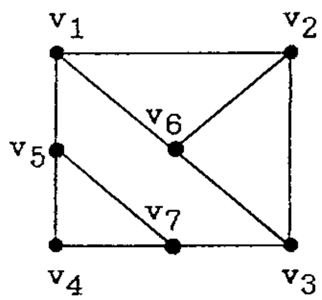
Suatu graph G dikatakan terhubung-k (k-connected graph) jika dengan pemindahan minimal k titik dari G menghasilkan suatu graph yang tidak terhubung.

Dari definisi di atas, pemindahan k titik dengan sendirinya diikuti dengan pemindahan garis-garis yang insiden dengan titik tersebut. Untuk k = 0 yaitu graph terhubung-0 adalah merupakan suatu graph tidak terhubung karena dengan pemindahan minimal nol titik (tanpa memindahkan satu titikpun) akan menghasilkan graph tidak terhubung. Untuk k = 1, graph terhubung-1 merupakan suatu graph separabel, karena dengan pemindahan minimal satu titik misalnya v akan menghasilkan graph tidak terhubung, dan v ini sesuai dengan definisi 34 adalah titik artikulasi. Untuk k = 2, graph terhubung-2, untuk jelasnya akan diberikan definisi tersendiri yang diturunkan dari definisi 35. Sedang untuk k $\geq$ 3 tidak akan dibahas di sini.

DEFINISI 36 :

Suatu graph G dikatakan graph biconnected (terhubung-2) jika dengan pemindahan minimal dua titik dari G menghasilkan graph yang tidak terhubung.

Contoh :



Gb. 2.20 Graph biconnected

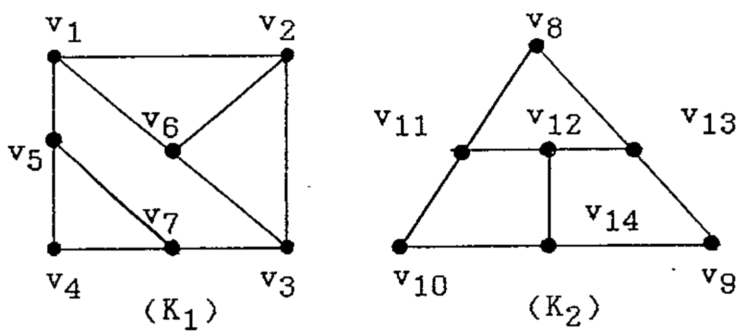
Graph dalam gambar 2.20 jika titik-titik v_1, v_3 atau v_1, v_7 atau v_5, v_3 atau v_5, v_7 dipindahkan akan menjadi tidak terhubung lagi. Jika G suatu graph biconnected maka G tidak memiliki titik artikulasi. Sebab jika memiliki titik artikulasi maka syarat pemindahan minimal dua titik dari G untuk membuat G tidak terhubung tidak terpenuhi, sehingga G tidak biconnected. Ini berarti bahwa graph biconnected merupakan graph nonseparabel.

Komponen dari suatu graph tidak terhubung G menurut definisi 14 adalah subgraph dari G yang terhubung. Subgraph yang terhubung pada dasarnya adalah suatu graph terhubung, oleh karena itu suatu komponen dapat memiliki sifat biconnected.

DEFINISI 37 :

Komponen biconnected adalah komponen yang biconnected dari suatu graph tidak terhubung G.

Contoh :



Gb. 2.21 Graph dengan dua komponen biconnected

Jika K_1 dan K_2 secara keseluruhan dipandang sebagai suatu graph tidak terhubung G maka K_1 dan K_2 merupakan komponen-komponen biconnected dari G. K_1 jelas biconnected. Sedang K_2, jika v_{11} dan v_{13} dipindahkan maka K_2 menjadi tidak terhubung. Jadi K_2 juga biconnected.