BAB II

TEORI DASAR

2.1. ALJABAR BOOLE

Aljabar Boole merupakan bagian dari matematika , dan menjadi dasar matematika teori switching serta rancangan logika. Aljabar Boole banyak dipakai dalam desain rangkaian digital dan komputer.

DEFINISI 1

Aljabar Boole adalah suatu aljabar (B; . , + , ′ ; 0, 1) yang terdiri dari himpunan B (yang memuat paling sedikit dua elemen 0 dan 1) dengan tiga operasi, yaitu operasi AND (.) atau pergandaan Boole, operasi OR (+) atau penjumlahan Boole dan NOT (′) atau komplemen yang didefinisikan pada himpunan tersebut, sedemikian hingga berlaku aksioma aksioma sebagai berikut :

1.a. Aturan kombinasi (operasi) "+" didefinisikan bahwa $x + y \in B$ jika $x \in B$ dan $y \in B$

b. Aturan kombinasi "."didefinisikan bahwa $x \,.\, y \in B$ jika $x \in B$ dan $y \in B$

2.a. Terdapat $0 \in B$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $x + 0 = x$

b. Terdapat $1 \in B$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $x \,.\, 1 = x$

3. Hukum Komutatif

   $\forall$ $x,y \in B$ berlaku

   a. $x+y = y+x$

   b. $x.y = y.x$

4. Hukum Distributif

   $\forall$ $x,y,z \in B$ berlaku

   a. $x+(y.z) = (x+y).(y+z)$

   b. $x.(y+z) = (x.y)+(y.z)$

5. Untuk setiap $x \in B$ terdapat $x' \in B$ sedemikian hingga

   a. $x.x' = 0$

   b. $x+x' = 1$

6. Terdapat paling sedikit dua elemen x dan $y \in B$ sedemikian hingga $x \neq y$

7. Pada setiap pernyataan ataupun aksioma didapatkan pasangan dengan menukarkan 0 dengan 1 bersamaan dengan + dengan . atau sebaliknya (prinsip dualitas).

   contoh : $x + 0 = x$

   $$\downarrow \quad \downarrow$$

   $x \;.\; 1 = x$

   dan $x + (y.z) = (x+y).(x+z)$

   $$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

   $x \;.\; (y+z) = (x.y)+(x.z)$

LEMMA 1

Elemen 0 dan 1 adalah tunggal

Bukti :

Dengan langkah kontradiksi diandaikan bahwa terdapat dua elemen 0 yang berbeda yaitu 0_1 dan 0_2 serta elemen x_1 dan $x_2 \in B$

maka $x_1+0_1 = x_1$ dan $x_2+0_2 = x_2$

ambil $x_1 = 0_2$ dan $x_2 = 0_1$

sehingga $0_2 + 0_1 = 0_2$ dan $0_1 + 0_2 = 0_1$

dengan menggunakan hukum komutatif didapat

$$0_1 = 0_2$$

terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian perlu diingkari, bahwa tidak ada elemen 0 yang lain yang berbeda jadi elemen 0 adalah tunggal.

Dengan prinsip dualitas

$$\begin{array}{ccc} x_1 + 0_1 = x_1 & \text{dan} & x_2 + 0_2 = x_2 \\ \downarrow\ \downarrow & & \downarrow\ \downarrow \\ x_1 \cdot 1_1 = x_1 & \text{dan} & x_2 \cdot 1_2 = x_2 \end{array}$$

Sedemikian hingga

$$\begin{array}{ccc} 0_2 + 0_1 = 0_2 & \text{dan} & 0_1 + 0_2 = 0_1 \\ \downarrow^2\ \downarrow\ \downarrow^1 & & \downarrow^1\ \downarrow\ \downarrow^2 \\ 1_2 \cdot 1_1 = 1_2 & \text{dan} & 1_1 \cdot 1_2 = 1_1 \end{array}$$

Sehingga

$$\begin{array}{ccc} 0_1 & = & 0_2 \\ \downarrow^1 & & \downarrow^2 \\ 1_1 & = & 1_2 \end{array}$$

Demikian juga pengandaian untuk elemen 1, bahwa tidak ada elemen 1 lain yang berbeda. Jadi elemen 1 adalah tunggal.

(Terbukti)

LEMMA 2

Untuk setiap x anggota B bisa diberlakukan hukum idempoten

$(\forall x \in B)$ $x+x = x$ dan $x.x = x$

Bukti :

$x+x = (x+x) \cdot 1$ (aksioma 2b)

$= (x+x).(x+x')$ (aksioma 5)

$= x + (x.x')$ (aksioma 4a)

$= x + 0$ (aksioma 5)

$x+x = x$ (aksioma 2a)

$x.x = x$ (dualitas)

(Terbukti)

LEMMA 3

Untuk setiap x anggota B berlaku $x+1=1$ dan $x.0=0$

$(\forall\ x \in B)\ x+1=1$ dan $x.0=0$

Bukti:

$x+1 = 1\ .\ (x+1)$ (aksioma 2b)

$= (x+x').(x+1)$ (aksioma 5)

$= x + (x'.1)$ (aksioma 4a)

$= x + x'$ (aksioma 2b)

$x+1 = 1$ (aksioma 5)

$x.0 = 0$ (dualitas)

(Terbukti)

LEMMA 4

Elemen 1 dan 0 adalah berlainan dan $1' = 0$ dan $0' = 1$

Bukti :

Ambil $x \in B \Rightarrow x.1 = x$ (aksioma 2b)

$x.0 = 0$ (lemma 3)

Andaikan $1=0$, maka pernyataan diatas berlaku hanya jika $x=0$, hal ini kontradiksi dengan aksioma 6 yang menyatakan paling sedikit ada dua elemen dalam B. Maka penyelesaiannya, pengandaian harus diingkari dengan pernyataan bahwa $1 \neq 0$.

Pada masalah berikutnya dapat dituliskan

$$\begin{aligned} 1' &= 1'.1 && \text{(aksioma 2b)} \\ &= 0 && \text{(aksioma 5)} \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 && \text{(aksioma 2a)} \\ &= 1 && \text{(aksioma 5)} \end{aligned}$$

(Terbukti)

LEMMA 5

Untuk setiap x dan y anggota B berlaku hukum absortif

$(\forall\ x,y \in B) \qquad x+(x.y) = x \quad \text{dan } x.(x+y) = x$

Bukti :

$$\begin{aligned} x+(x.y) &= (x.1)+(x.y) && \text{(aksioma 2b)} \\ &= x.(1+y) && \text{(aksioma 4b)} \\ &= x.1 && \text{(lemma 3)} \\ x+(x.y) &= x && \text{(aksioma 2b)} \\ x.(x+y) &= x && \text{(dualitas)} \end{aligned}$$

(Terbukti)

LEMMA 6

Untuk setiap x anggota B, x' adalah tunggal.

Bukti :

Andaikan ada dua komplemen terhadap x yaitu x_1' dan x_2' yang berbeda, $x_1' \neq x_2'$ sehingga menurut aksioma 5 berlaku,

$$x + x_1' = 1 \quad ; \quad x + x_2' = 1$$

$$x \cdot x_1' = 0 \quad ; \quad x \cdot x_2' = 0 \qquad \text{(dualitas)}$$

Dengan aksioma lain didapat,

$$\begin{aligned}
x_2' &= 1 \cdot x_2' && \text{(aksioma 2b)}\\
&= (x+x_1') \cdot x_2' && \text{(asumsi)}\\
&= (x \cdot x_2')+(x_1' \cdot x_2') && \text{(aksioma 4b)}\\
&= 0 + (x_1' \cdot x_2') && \text{(asumsi)}\\
&= (x \cdot x_1')+(x_1' \cdot x_2') && \text{(asumsi)}\\
&= (x+x_2') \cdot x_1' && \text{(aksioma 3b,4b)}\\
&= 1 \cdot x_1' && \text{(asumsi)}\\
x_2' &= x_1' && \text{(aksioma 2b)}
\end{aligned}$$

Terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x_1' \neq x_2'$, maka pengandaian harus diingkar. Jadi terbukti bahwa $x_1' = x_2'$, atau komplemen x adalah tunggal.

LEMMA 7

Untuk setiap x anggota B, berlaku bahwa komplemen dari komplemen x adalah x. $(\forall\, x \in B)(x')' = x$

Bukti :

Ambil $(x')'=y$

maka $(x').y= 0$ dan $(x')+y= 1$ (aksioma 5) *

dilain fihak $(x').x= 0$ dan $(x')+x= 1$ (aksioma 5) **

Jadi berdasarkan * & ** , y dan x sebagai komplemen dari x'.

Berdasarkan lemma 6, bahwa suatu komplemen adalah tunggal maka y=x sehingga $(x')'= x$

(Terbukti)

LEMMA 8

$\forall\ x,y,z \in B \qquad x.[(x+y)+z] = x \qquad *$

$= [(x+y)+z].x \qquad **$

Bukti :

$x.[(x+y)+z] = [x.(x+y)]+(x.z)$ (aksioma 4b)

$= x + (x.z) = x$ (lemma 5) (* Terbukti)

$= x + (z.x)$ (aksioma 3b)

$= [(x+y).x]+(z.x)$ (lemma 5)

$= [(x+y)+z].x$ (aksioma 4b)(** Terbukti)

TEOREMA 1 (ASSOSIATIF)

$(\forall\ x,y,z \in B) \qquad x+(y+z) = (x+y)+z$

$x.(y.z) = (x.y).z$

Bukti :

Ambil $A = [(x+y)+z].[x+(y+z)]$

Maka $A = [(x+y)+z].x + [(x+y)+z].(y+z)$ (aksioma 4b)

$= x + \{[(x+y)+z].y + [(x+y)+z].z\}$

(lemma 8,aksoima 4b)

$= x + \{y.[(y+x)+z]+[(x+y).z + z.z]\}$

(aksioma 3a,3b,4b)

$= x + [y + (x.z) + (y.z) + z]$ (lemma 8,5,2)

$= x + (y + z)$ (aksioma 3a,lemma 5)

Langkah lain

$A = (x+y).[x+(y+z)] + z.[x+(y+z)]$ (aksioma 4b)

$= \{x.[x+(y+z)]+y.[x+(y+z)]\}+z$

(lemma 8,aksioma 4b,3a)

$= \{x.[x+(y+z)] + y\} + z$ (aksioma 3a, lemma 8)

$= [x+(x.y)+(x.z)+y] + z$ (aksioma 4b, lemma 2)

$= (x+y) + z$ (aksioma 3a, lemma5)

Jadi : $x + (y + z) = (x + y) + z$

$x . (y . z) = (x . y) + z$ (dualitas)

(Terbukti)

TEOREMA 2

Untuk setiap x dan y anggota B berlaku $x+(x'.y)=x+y$ dan $x.(x'+y)=x.y$

$(\forall\ x,y\in B)$ $x+(x'.y) = x + y$

$x.(x'+y) = x . y$

Bukti :

$x+(x'.y) = (x+x').(x+y)$ (aksioma 4a)

$= 1 . (x+y)$ (aksioma 5)

$= x + y$ (aksioma 2b)

(Terbukti)

Pembuktian $x.(x'+y) = x.y$ digunakan prinsip dualitas

TEOREMA 3 (TEOREMA DE MORGAN)

Untuk setiap x dan y anggota B berlaku $(x+y)'=x'.y'$ dan $(x.y)'=x'+y'$

$(\forall\ x,y\in B)$ $(x+y)' = x'.y'$

$(x.y)' = x'+y'$

Bukti :

$(x+y) + (x'.y') = [(x+y)+x'].[(x+y)+y']$ (aksioma 4a)

$= [x'+(x+y)].[y'+(y+x)]$ (aksioma 3a)

$= [(x'+x)+y].[(y'+y)+x]$ (teorema 1)

$= (1 + y).(1 + x)$ (aksioma 5)

$= 1.1 = 1$ (lemma 3)

$(x+y) \cdot (x'.y') = x.(x'.y') + y.(y'.x')$ (aksioma 4a,3b)

$= (x.x').y' + (y.y').x'$ (Teorema 1)

$= 0.y' + 0.x'$ (aksioma 5)

$= 0 + 0 = 0$ (lemma 3)

Berdasarkan aksioma 5, maka (x+y) adalah komplemen tunggal (x'.y') dan sebaliknya, jadi $(x+y) = (x'.y')'$ atau

$$(x+y)' = x'.y'$$

Pada persamaam diatas jika x dan y kita ganti dengan x' dan y' maka,

$(x'+y')' = (x')'.(y')' = x.y$ atau

$(x'+y') = (x.y)'$ (lemma 6,7)

(Terbukti)

TEOREMA 4 (TEOREMA DE MORGAN GENERALISASI)

1. $(x_1.x_2.....x_n)' = x_1'+x_2'+....+x_n'$
2. $(x_1+x_2+...+x_n)' = x_1'.x_2'.....x_n'$

Bukti :

Dengan induksi matematik

1. Untuk n=1 $(x_1)' = x_1'$

   diasumsikan berlaku untuk n=k maka

   $$(x_1.x_2.....x_k)' = x_1'+x_2'+....+x_k'$$

   untuk n=k+1

$$(x_1.x_2.\ldots.x_k.x_{k+1})' = \{(x_1.x_2.\ldots.x_k).x_{k+1}\}'$$
$$= (x_1.x_2.\ldots.x_k)' + x_{k+1}'$$
$$= x_1'+x_2'+\ldots+x_k'+x_{k+1}'$$

jadi $(x_1.x_2.\ldots.x_n)' = x_1'+x_2'+\ldots+x_n'$

2. Untuk n=1 $\quad (x_1)' = x_1'$

diasumsikan berlaku untuk n=k maka

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)' = x_1'.x_2'.\ldots.x_k'$$

untuk n=k+1

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1})' = \{(x_1+x_2+\ldots+x_k)+x_{k+1}\}'$$
$$= (x_1+x_2+\ldots+x_k)'.x_{k+1}'$$
$$= x_1'.x_2'.\ldots.x_k'.x_{k+1}'$$

Jadi $\quad (x_1+x_2+\ldots+x_n)' = x_1'.x_2'.\ldots.x_n'$

(Terbukti)

DEFINISI 2

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel-variabel pada suatu aljabar Boole B. Suatu pemetaan F dari B ke dirinya sendiri adalah suatu fungsi Boole n variabel, dinyatakan dengan $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jika dapat dibangun menurut aturan aturan berikut :

1. Misalkan a menunjukkan suatu konstanta pada B, Fungsi konstanta yaitu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a$ dan Fungsi proyeksinya yaitu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=x$ adalah fungsi Boole.
2. Jika $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah suatu fungsi Boole

maka $[F(x_1,x_2,...,x_n)]'$ adalah suatu fungsi Boole

3. Jika $F_1(x_1,x_2,...,x_n)$ dan $F_2(x_1,x_2,...,x_n)$ adalah fungsi fungsi Boole, maka $F_1(x_1,x_2,...,x_n)$ + $F_2(x_1,x_2,...,x_n)$ dan $F_1(x_1,x_2,...,x_n)$. $F_2(x_1,x_2,...,x_n)$ adalah fungsi-fungsi Boole.

4. Suatu fungsi yang dapat dibangun dalam jumlah berhingga dengan menggunakan aturan aturan diatas, dan hanya fungsi demikian, adalah suatu fungsi Boole.

Jadi fungsi fungsi Boole adalah setiap fungsi yang dapat disusun dari fungsi konstanta dan fungsi fungsi proyeksi dalam jumlah berhingga dengan menggunakan operasi operasi +, ., ' . Untuk suatu fungsi dari suatu variabel, fungsi proyeksinya adalah fungsi identitas yaitu $F(x)=x$.

contoh 1

$$F(x_1,x_2,x_3) = ax_1 + (bx_2.x_3')'.(x_2+x_3') + b$$

DEFINISI 3

Suatu literal didefinisikan sebagai suatu tetapan (konstanta), variabel, atau variabel terkomplemen.

contoh 2

$$F(x_1,x_2) = x_1.x_2' + x_2\ a$$

Fungsi diatas terdiri dari empat literal yaitu dua variabel ($x_1$danx_2) satu variabel terkomplemen (x_2') dan satu konstanta (a).

2.2. GERBANG-GERBANG LOGIKA

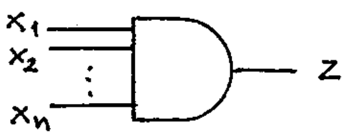
2.2.1. GERBANG AND

Suatu gerbang AND mempunyai dua atau lebih input dan satu output, dan operasinya mengikuti definisi berikut.

DEFINISI 4

Output dari gerbang AND menghasilkan keadaan 1 jika dan hanya jika semua input dalam keadaan 1.

Simbol untuk rangkaian AND diberikan dalam gambar 1, dengan ekspresi Boole untuk gerbang ini, serta tabel kebenaran dua input yang konsisten dengan definisi dari operasi diatas dalam tabel 1.



Gambar . 1.

Tabel 1. Tabel kebenaran AND

Input		Output
x_1	x_2	$z=x_1.x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.2.2. GERBANG OR

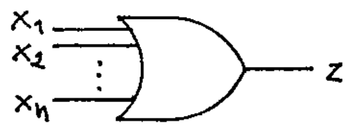
Suatu gerbang OR mempunyai dua atau lebih input dan satu output, dan operasinya mengikuti definisi berikut.

DEFINISI 5

Output dari gerbang OR menghasilkan keadaan 1 jika satu atau lebih input dalam keadaan 1.

Simbol untuk rangkaian OR diberikan dalam gambar 2, dan dengan ekspresi Boole untuk gerbang ini, serta tabel kebenarannya untuk dua input yang konsisten dengan definisi operasi OR diatas diberikan dalam tabel 2.

Tabel 2. Tabel kebenaran OR



Gambar . 2.

Input		Output
x_1	x_2	$z=x_1+x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.2.3. GERBANG NOT (INVERTER)

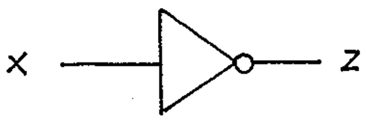
Suatu gerbang NOT (Inverter) mempunyai satu input dan satu output dan merupakan negasi logika yang operasinya mengikuti definisi berikut.

DEFINISI 6

Output dari gerbang NOT dalam keadaan 1 jika dan hanya jika inputnya tidak dalam keadaan 1 dan begitu pula sebaliknya.

Simbol untuk rangkaian NOT diberikan dalam gambar 3 dengan ekspresi Boole untuk negasi ini, dan tabel kebenarannya yang konsisten dengan definisi operasi NOT diatas diberikan dalam tabel 3. Output dari operasi ini merupakan komplemen dari input.

Tabel 3. Tabel kebenaran NOT



Gambar . 3.

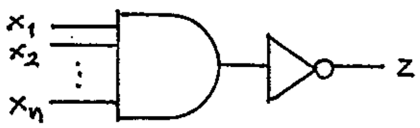
Input	Output
x	z
0 1	1 0

2.2.4. GERBANG NAND

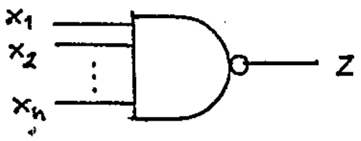
Gerbang NAND adalah suatu kombinasi dari gerbang AND dan NOT oleh karena itu, berdasarka dari operasi gerbang AND dan NOT, output dari suatu gerbang NAND adalah 1 jika satu atau lebih dari inputnya adalah 0.Dan outputnya adalah 0 hanya jika semua input 1.

Simbol untuk rangkaian gerbang NAND diberikan dalam gambar 4(a) dan gambar 4(b) merupakan ekivalennya. Tabel kebenaran untuk dua input diberikan dalam tabel 4.

Tabel 4. Tabel kebenaran NAND



Gambar . 4(a).



Gambar . 4(b).

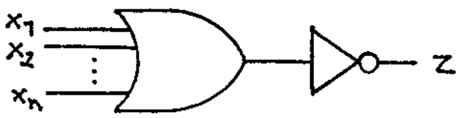
Input		AND	Output
x_1	x_2	$x_1 . x_2$	$z=(x_1 . x_2)'$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

2.2.4. GERBANG NOR

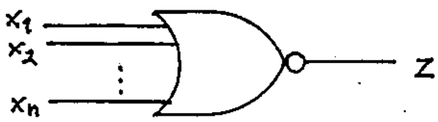
Gerbang adalah suatu kombinasi dari gerbang OR dan

NOT oleh karena itu berdasarkan operasi gerbang OR dan NOT, output dari gerbang NOR adalah 1 jika tak ada satupun input dalam keadaan 1, dan outputnya 0 jika satu atau lebih dari input dalam keadaan 1.

Simbol untuk rangkaian gerbang NOR deberikan dalam gambar 5(a) dan gambar 5(b) merupakan ekivalennya. Tabel kebenaran untuk dua input diberikan dalam tabel 5.



Gambar . 5(a).



Gambar . 5(b).

Tabel 5. Tabel kebenaran NOR

Input		OR	Output
x_1	x_1	x_1+x_1	$z=(x_1+x_1)'$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

2.2.6. GERBANG EKSKLUSIF-OR (XOR)

Suatu gerbang XOR mempunyai dua input dan satu output dan operasinya mengikuti definisi berikut.

DEFINISI 7

Output dari dua input gerbang XOR adalah dalam keadaan 1 jika satu dan hanya satu input adalah dalam keadaan 1

Definisi diatas ekivalen dengan pernyataan :

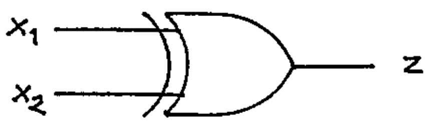
Jika $x_1=1$ dan $x_2=0$ atau jika $x_1=0$ dan $x_2=1$ maka $z=1$

Dalam ekspresi Boole $z = x_1.x_2' + x_1.x_2$ dan bisa ditulis

$z = x_1 + x_2$

Simbol untuk gerbang XOR diberikan dalam gambar 6 dan tabel kebenarannya diberikan dalam tabel 6.

Tabel 6. Tabel kebenaran XOR



Gambar . 6.

Input		Output
x_1	x_2	$z= x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.3. ALJABAR SWITCHING DAN FUNGSI SWITCHING

Diantara semua aljabar Boole terdapat aljabar Boole dua elemen (B_2) yang disebut aljabar switching (penyambungan). Fungsi fungsi Boole yang didefinisikan pada B_2 disebut fungsi switching. Aljabar switching merupakan landasan matematika bagi analisa serta perancangan rangkaian-rangkaian switching yang membangun sistem digital. Aljabar ini mengandung dua elemen ekstrem. Bilangan terbesar dinyatakan dengan 1 dan bilangan terkecil dinyatakan dengan 0.

Aljabar switching ditulis B(0,1,+,.,′) dengan 0 dan 1 adalah nilai nilai sinyal digital (off dan on). Tanda operasi "+" menyatakan rangkaian paralel, operasi "." menyatakan rangkaian seri dan operasi " ′ " menyatakan komplemen.

TEOREMA 5 (TEOREMA EKSPANSI/PERLUASAN)

1. $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$= x_1.F(1,x_2,\ldots,x_n) + x_1'.F(0,x_2,\ldots,x_n)$$

$$= x_1.F(1,x_2,....,x_n) \oplus x_1'.F(0,x_2,....,x_n)$$

2.$F(x_1,x_2,....,x_n)$

$$= [x_1+F(0,x_2,....,x_n)].[x_1'+F(1,x_2,....,x_n)$$

Fungsi dalam bentuk ini disebut diekspansi dalam sekitar x.

Bukti :

Jika pertama kali kita substitusikan $x_1=1$ dan $x_1'=0$ dan kemudian kita substitusikan $x_1=0$ dan $x_1'=1$ dalam masing-masing persamaan maka persamaan-persamaan tersebut menjadi identitas.

1.Karena B(0,1) maka jika dimasukkan nilai x = 1 dan $x'= 0$ didapat,

$F(1,x_2,....,x_n)$.

$$= 1.F(1,x_2,....,x_n) + 0.F(0,x_2,....,x_n)$$

$$= F(1,x_2,....,x_n) + 0$$

$$= F(1,x_2,....,x_n)$$

jika dimasukkan nilai $x_1=0$ dan $x_1'=1$ akan didapat,

$F(0,x_2,....,x_n)$

$$= 0.F(1,x_2,....,x_n) + 1.F(0,x_2,....,x_n)$$

$$= 0 + F(0,x_2,....,x_n)$$

$$= F(0,x_2,....,x_n)$$

Jadi $F(x_1,x_2,....,x_n)$

$$= x_1.F(1,x_2,....,x_n) + x_1'.F(0,x_2,....,x_n)$$

masukkan nilai $x_1=1$ dan $x_1'=0$ akan didapat,

$F(1,x_2,....,x_n)$

$= 1.F(1,x_2,....,x_n) \oplus 0.F(0,x_2,....,x_n)$

$= F(1,x_2,....,x_n) \oplus 0$

$= F(1,x_2,....,x_n).0' + [F(1,x_2,....,x_n)]'.0$

$= F(1,x_2,....,x_n).1 + 0$

$= F(1,x_2,....,x_n)$

jika dimasukkan nilai $x_1=0$ dan $x_1'=1$ akan didapat,

$F(0,x_2,....,x_n)$

$= 0.F(1,x_2,....,x_n) \oplus 1.F(0,x_2,....,x_n)$

$= 0 \oplus F(0,x_2,....,x_n)$

$= 0.[F(0,x_2,....,x_n)]' + 0'.F(0,x_2,....,x_n)$

$= 0 + 1.F(0,x_2,....,x_n)$

$= F(0,x_2,....,x_n)$

2.Karena B(0,1); jika dimasukkan nilai $x_1=1$ dan $x_1'=0$ didapat,

$F(1,x_2,....,x_n)$

$= [1+F(0,x_2,....,x_n)].[0+F(1,x_2,....,x_n)]$

$= 1.F(1,x_2,....,x_n)$

$= F(1,x_2,....,x_n)$

jika dimasukkan nilai $x_1=0$ dan $x_1'=1$ akan didapat,

$F(0,x_2,....,x_n)$

$= [0+F(0,x_2,....,x_n)].[1+F(1,x_2,....,x_n)]$

$= F(0,x_2,....,x_n) . 1$

$= F(0,x_2,....,x_n)$

(Terbukti)

TEOREMA 6

Setiap fungsi Boole $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dapat ditulis dalam bentuk Jumlah-dari-hasil kali kanonik yaitu,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma\, F(a_1, a_2, \ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$$

dimana $x_i^{a_i} = 1$ jika $x_i = a_i$

$x_i^{a_i} = 0$ jika $x_i \neq a_i$

Bukti :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n).1.1\ldots1 \\ &+ \underbrace{F(x_1, x_2, \ldots, x_n).0.1\ldots1}_{=0} \\ &+ \underbrace{F(x_1, x_2, \ldots, x_n).1.0.1\ldots1}_{=0} + \ldots\ldots \\ &+ \underbrace{F(x_1, x_2, \ldots, x_n).0.0\ldots\ldots0}_{=0} \end{aligned}$$

Jika $x_i = a_i$ maka $x_i^{a_i} = 1$ Jika $x_i \neq a_i$ maka $x_i^{a_i} = 0$ Sehingga persamaan diatas ekivalen dengan,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= F(a_1, a_2, \ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} + \\ &\quad F(x_1, a_2, \ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} + \\ &\quad F(a_1, x_2, a_3\ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} + \ldots + \\ &\quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} \\ &= F(a_1, a_2, \ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} + \\ &\quad \underbrace{F(a_1, a_2, \ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}}_{x_1 \neq a_1} + \\ &\quad \underbrace{F(a_1, a_2, \ldots, a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}}_{x_2 \neq a_2} + \ldots\ldots + \end{aligned}$$

$$\underbrace{F(a_1,a_2,\ldots,a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots.x_n^{a_n}}_{x_1 \neq a_1,\ x_2 \neq a_2,\ldots\ldots,x_n \neq a_n}$$

Jadi $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum F(a_1,a_2,\ldots,a_n).x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots.x_n^{a_n}$

dimana $x_i^{a_i}=1$ jika $x_i = a_i$

dan $x_i^{a_i}=0$ jika $x_i \neq a_i$ (Terbukti)

TEOREMA 7

Setiap fungsi Boole $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dapat ditulis dalam bentuk Hasil kali-dari-jumlah kanonik, yaitu,

$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$= \prod \{ F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a'_1} + x_2^{a'_2} + \ldots + x_n^{a'_n} \}$

dimana $x_i^{a'_i}=0$ jika $x_i = a_i$ dan $x_i^{a'_i}=1$ jika $x_i \neq a_i$

Bukti :

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = {} & [F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+0+0+\ldots+0]. \\ & [F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1+0+0+\ldots+0]. \\ & [F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+0+1+0+\ldots+0]\ldots\ldots \\ & [F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1+1+\ldots\ldots+1] \end{aligned}$$

jika $x_i = a_i$ maka $x_i^{a'_i}=0$ dan jika $x_i \neq a_i$ maka $x_i^{a'_i}=1$

Sehingga persamaan diatas ekivalen dengan,

$$\begin{aligned} & F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ & = [F(a_1,a_2,\ldots,a_n)+x_1^{a'_1}+ x_2^{a'_2}+\ldots+ x_n^{a'_n}]. \\ & \quad [F(x_1,a_2,\ldots,a_n)+ x_1^{a'_1}+ x_2^{a'_2}+\ldots+ x_n^{a'_n}]. \\ & \quad [F(a_1,x_2,a_3,\ldots,a_n) + x_1^{a'_1}+ x_2^{a'_2}+\ldots+ x_n^{a'_n}]\ldots\ldots. \\ & \quad [F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + x_1^{a'_1}+ x_2^{a'_2}+\ldots+ x_n^{a'_n}] \\ & = [F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a'_1}+ x_2^{a'_2}+\ldots+ x_n^{a'_n}] \end{aligned}$$

$$\underbrace{[F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}]}_{x_1 \neq a_1}$$

$$\underbrace{[F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}]}_{x_1 \neq a_2}\ldots\ldots\ldots$$

$$\underbrace{[F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}]}_{x_1 \neq a_1,\ x_2 \neq a_2,\ldots\ldots\ldots,x_n \neq a_n}$$

Jadi $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$= \prod [\ F(a_1,a_2,\ldots,a_n) + x_1^{a_1'} + x_2^{a_2'} + \ldots + x_n^{a_n'}\ ]$$

dimana $x_i^{a_i'}=0$ jika $x_i = a_i$ dan $x_i^{a_i'}=1$ jika $x_i \neq a_i$

(Terbukti)

Karena nilai $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dari suatu fungsi switching hanya dapat bernilai 0 atau 1 maka bentuk kanonik fungsi switching pada teorema 6 dan 7 dapat dinyatakan sebagai berikut :

(a). Bentuk Jumlah-dari-hasil kali kanonik menjadi;

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum x_1^{a_1}.x_2^{a_2}.\ldots.x_n^{a_n}$$

Semua kombinasi dari nilai $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dengan $F(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 1$

(b). Bentuk Hasil kali-dari-jumlah kanonik menjadi

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod (x_1^{a_1'} + x_2^{a_n'} + \ldots + x_n^{a_n'})$$

Semua kombinasi dari nilai $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dengan $F(a_1,a_2,\ldots,a_n) = 0$

dengan $x_i^0 = x_i'$ dan $x_i^1 = x_i$

Masing-masing term dalam Jumlah-dari-hasil kali kanonik disebut minterm dan masing-masing term dalam Hasil kali-dari-jumlah kanonik disebut Maxterm.

contoh 3.

Tulislah dalam bentuk kanonik dari fungsi $f=x_1+x_2'$

a) Dalam bentuk Jumlah-dari-hasil kali.

$$f(x_1,x_2) = x_1+x_2'$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= f(0,0).x_1^0.x_2^0 + f(0,1).x_1^0.x_2^1 + \\ &\quad f(1,0).x_1^1.x_2^0 + f(1,1).x_1^1.x_2^1 \\ &= (0+1).x_1^0.x_2^0 + (0+0).x_1^0.x_2^1 + \\ &\quad (1+1).x_1^1.x_2^0 + (1+0).x_1^1.x_2^1 \\ &= x_1^0.x_2^0 + x_1^1.x_2^0 + x_1^1.x_2^1 \end{aligned}$$

$$f(x_1,x_2) = x_1'.x_2' + x_1.x_2' + x_1.x_2$$

cara lain :

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= x_1+x_2' \\ &= x_1(x_2+x_2') + (x_1+x_1').x_2' \\ &= x_1.x_2 + x_1.x_2' + x_1.x_2' + x_1'.x_2' \\ &= x_1.x_2 + x_1.x_2' + x_1'.x_2' \end{aligned}$$

b) Dalam bentuk Hasil kali-dari-jumlah kanonik.

$$f(x_1,x_2) = x_1+x_2'$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= [f(0,0)+x_1^0+x_2^0].[f(0,1)+x_1^0+x_2^1].[f(1,0)+x_1^1+x_2^0]. \\ &\quad [f(1,1)+x_1^1+x_2^1] \\ &= [(0+1)+x_1^0+x_2^0].[(0+0)+x_1^0+x_2^1].[(1+1)+x_1^1+x_2^0]. \\ &\quad [(1+0)+x_1^1+x_2^1] \\ &= (1+x_1^0+x_2^0).(0+x_1^0+x_2^1).(1+x_1^1+x_2^0).(1+x_1^1+x_2^1) \\ &= 1.(x_1^0+x_2^1).1.1 \end{aligned}$$

$= x_1^0 + x_2^1$

$= x_1' + x_2$

Bentuk kanonik berfungsi untuk menentukan apakah dua ekspresi Boole menyatakan fungsi yang sama dengan suatu prosedur analitis. Dua buah ekspresi Boole mempunyai bentuk kanonik yang sama jika dan hanya jika keduanya ekivalen. Yang berarti bahwa bentuk kanonik suatu ekspresi Boole adalah unik.

contoh 4.

Tentukan apakah kedua fungsi berikut ekivalen.

$f_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + x_1'.x_2'$ dengan

$f_2(x_1,x_2) = (x_1'.x_2).(x_2.x_1') + (x_1'.x_2)'(x_2.x_1')'$

Penyelesaian :

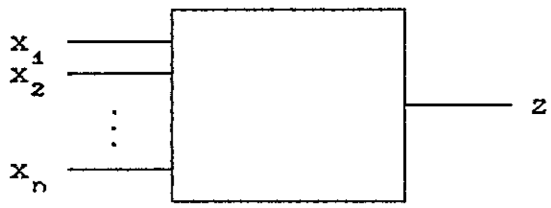
$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2) &= x_1 + x_2 + x_1'.x_2' \\
&= x_1(x_2 + x_2') + (x_1 + x_1').x_2 + x_1'.x_2' \\
&= x_1.x_2 + x_1.x_2' + x_1.x_2 + x_1'.x_2 + x_1'.x_2' \\
&= x_1.x_2 + x_1.x_2' + x_1'.x_2 + x_1'.x_2'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x_1,x_2) &= (x_1'+x_2).(x_2+x_1') + (x_1'+x_2)'.(x_2+x_1')' \\
&= (x_1'+x_2).(x_1'+x_2) + (x_1.x_2').(x_1.x_2') \\
&= x_1' + x_2 + x_1.x_2' \\
&= x_1'(x_2 + x_2') + (x_1 + x_1').x_2 + x_1.x'_2 \\
&= x_1'.x_2 + x_1'.x_2' + x_1.x_2 + x_1'.x_2 + x_1.x_2' \\
&= x_1.x_2 + x_1.x_2' + x_1'.x_2 + x_1'.x_2'
\end{aligned}$$

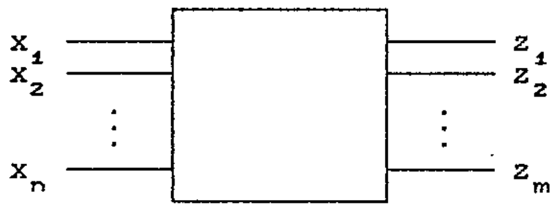
$f_1(x_1,x_2)$ dan $f_2(x_1,x_2)$ adalah ekivalen karena mempunyai bentuk kanonik yang sama.

2.4. RANGKAIAN KOMBINASIONAL

Suatu rangkaian kombinasional output tunggal dimaksudkan sebagai rangkaian yang mempunyai jumlah n berhingga dari input-input biner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan suatu output biner z, seperti diperlihatkan dalam gambar 7. Pada sembarang waktu t nilai output z hanya bergantung pada nilai dari input-input pada waktu t, atau output saat ini hanya bergantung pada input-input saat ini. Suatu sistem demikian tidak mempunyai memori karena outputnya tidak tergantung pada nilai input yang lalu. Rangkaian kombinasional multipel output mempunyai m output $z_1, z_2, \ldots, z_m$ dimana output-output tersebut mempunyai sifat z diatas, dan diperlihatkan pada gambar 8.



Gambar . 7.



Gambar . 8.

DEFINISI 8

Dalam suatu rangkaian logika, output primer adalah suatu saluran dimana output sinyalnya dapat diterima oleh bagian luar dari rangkaian, dan input primer adalah suatu saluran yang tidak dimasuki oleh saluran lain dalam rangkaian.

DEFINISI 9

Lintasan dari rangkaian kombinasional adalah graph terarah, terhubung, tidak melingkar dari suatu input primer atau saluran internal ke output primernya.
