BAB II

DASAR TEORI

2.1. PROBABILITAS DAN STATISTIK

Cabang ilmu yang penting dan tumbuh pesat pada masa sekarang, ialah ilmu statistika, yang berdasarkan teori kemungkinan. Pemakaian teori kemungkinan tidak terbatas pada statistika saja, tetapi ilmu lain juga memakainya. Jika sebuah mata uang dilemparkan, maka dikatakan nilai kemungkinan untuk mendapat muka sama dengan kemungkinan untuk mendapat belakang, yaitu masing-masing $\frac{1}{2}$. Dapat disingkat :

$$P(\text{muka}) = P(\text{belakang}) = \frac{1}{2} .$$

P adalah singkatan probabilitas, peluang atau nilai kemungkinan.

DEFINISI 2.1. Nilai kemungkinan atau probabilitas

Misalkan kejadian A dapat terjadi dalam p cara dari seluruh n cara yang mungkin, dan n cara ini berkemungkinnan sama, maka nilai kemungkinan kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{p}{n} .$$

Catatan :

Kejadian tidak-A dinyatakan dengan $\overline{A}$. Dari definisi di atas langsung dapat diperoleh bahwa nilai kemungkinan atau probabilitas tidak-A adalah

$$P(\overline{A}) = \frac{n - p}{n} = 1 - \frac{p}{n} = 1 - P(A) .$$

Contoh 2.1.

Sebuah dadu dilemparkan. Ada 6 cara yang mungkin dan berkemungkinan sama, yaitu hasil lemparan ialah 1,2,3,4,5 atau 6, sehingga $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$. Probabilitas kejadian A, yaitu jatuh genap, terjadi dengan 3 cara, yaitu 2,4 atau 6. Jadi , $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Probabilitas kejadian B yaitu jatuh hasil ≤ 2 dapat terjadi dengan 2 cara, yaitu 1 atau 2, sehingga $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

DEFUNISI 2.2. Kejadian dan himpunan

Misalnya pada percobaan lemparan dua mata uang maka terlihat, semua hal yang mungkin terjadi ialah (m,m), (m,b), (b,m) dan (b,b). Sehingga dikatakan, semua hal yang mungkin ini membentuk ruang sampel atau ruang kemungkinan. Dalam statistika disebut populasi. Satu hal daripada ruang sampel tersebut dinamakan titik sampel, sehingga ruang sampel ini mempunyai 4 titik sampel. Pada teori himpunan ruang sampel disebut himpunan semesta. Biasanya sampel dinyatakan dengan huruf besar S, misalnya S = {(m,m), (m,b), (b,m), (b,b)}. Satu titik sampel ialah satu unsur himpunan semesta. Satu kejadian merupakan satu himpunan bagian (subset) daripada ruang sampel. Jadi, kejadian A (hasil tos sama) ialah {(m,m),(b,b)} dan kejadian B (hasil tos berlainan) ialah {(m,b),(b,m)}. Didapat nilai kemungkinan atau probabilitas keempat kejadian elementer yang dinyatakan dengan 4 titik sampel ialah sama yaitu $\frac{1}{4}$. Dalam teori himpunan, nilai kemungkinan atau probabilitas ekuivalen dengan ukuran, dikatakan bahwa ukuran $(m,m) = M(m,m) = \frac{1}{4}$. Ukuran biasanya dinyatakan dengan M dan probabilitas dengan P. Secara bersistem

TEORI HIMPUNAN		TEORI KEMUNGKINAN
himpunan semesta S	$\longleftrightarrow$	ruang sampel S
elemen himpunan	$\longleftrightarrow$	titik sampel
himpunan bagian A	$\longleftrightarrow$	kejadian A
ukuran himpunan A , M(A)	$\longleftrightarrow$	kemungkinan kejadian A, P(A)

Contoh 2.2.

Percobaan lemparan satu dadu mempunyai ruang sampel S = {1,2,3,4,5,6}. Jadi, S mempunyai 6 titik sampel dan ukuran tiap-tiap titik ialah $\frac{1}{6}$. Kejadian A yaitu hasil tos genap ialah himpunan bagian A = {2,4,6}. Untuk mencari probabilitas atau ukuran A hanya dengan menjumlahkan semua titik sampel A. Karena dalam A adalah 3 titik sampel dengan probabilitas masing-masing $\frac{1}{6}$. Maka $P(A) = M(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

DEFINISI 2.3. Fungsi distribusi kumulasi

Fungsi distribusi kumulasi atau disingkat fungsi distribusi didefinisikan sebagai berikut

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Bila $a < b$, maka

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b)$$

yaitu,

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X \leq b).$$

Jadi,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Jika fungsi distribusi $F(x)$ dari variabel acak X diketahui untuk semua $x \in R$, maka distribusi kemungkinan X seluruhnya diketahui.

Catatan :

$F(x)$ adalah fungsi monoton tidak turun, karena $F(b) \geq F(a)$ untuk $b > a$.

Untuk selanjutnya akan dibahas mengenai macam-macam ukuran tendensi pusat. Diantaranya adalah mean, median dan modus.

DEFINISI 2.4. Nilai rata-rata

Nilai rata-rata didefinisikan sebagai berikut

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} f_i x_i \qquad ,$$

dimana f_i ialah frekuensi x_i dan $n = \sum_{i=1}^{r} f_i$.

Untuk data yang digolongkan, x_i adalah nilai tengah kelas.

Contoh 2.3.

Hitunglah nilai rata-rata tinggi 100 mahasiswa pada distribusi frekuensi pada tabel 2.

TABEL 2.

Titik Tengah kelas x	Frekfensi f	f.x
153	5	764
158	20	3160
163	42	6846
168	26	4368
173	7	1211
	100	16350

$$\bar{x} = \frac{1}{100} (5x153 + 20x158 + 42x163 + 26x168 + 7x173)$$
$$= 163,50 \text{ cm.}$$

DEFINISI 2.5. Median

Median suatu himpunan nilai yang telah diurutkan dalam satu jajaran , ialah nilai yang berada di tengah, jika banyaknya data ganjil, atau rata-rata kedua nilai ditengahnya jika banyaknya data genap. Median diberi notasi $\tilde{x}$.

Contoh 2.4.

Jajaran 3,4,4,5,6,8,8,9,10 mempunyai median 6. Jajaran 3,4,4,5,6,8,8,8,9,10 mempunyai median $\frac{1}{2}$ (6 + 8) = 7.

Untuk data yang digolongkan median $\tilde{x}$ adalah absis titik pada ogive yang mempunyai ordinat sama dengan 50% dari banyaknya data.

Contoh 2.5.

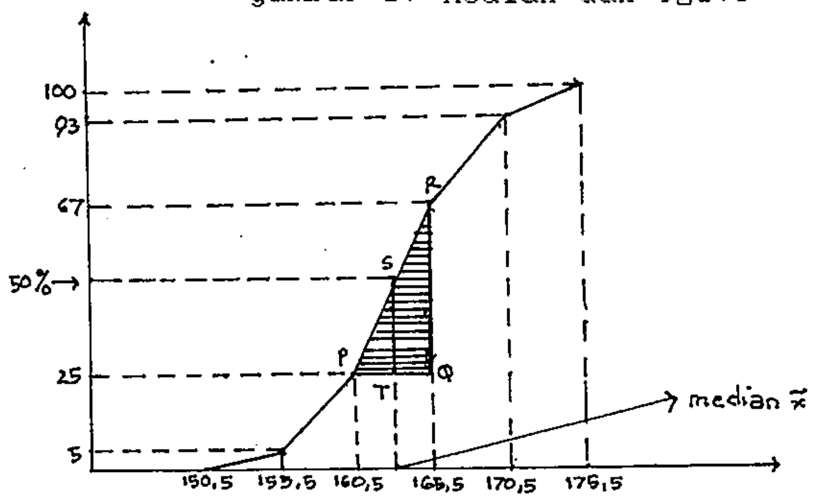
Tentukan median $\tilde{x}$ dari distribusi frekuensi pada tabel 3.

TABEL 3.

Frekuensi tinggi 100 mahasiswa.

Tinggi (cm)	Frekuensi
151 - 155	5
156 - 160	20
161 - 165	42
166 - 170	26
171 - 175	7
Jumlah	100

gambar 1. Median dan Ogive



Kelas median, yaitu kelas tempat mediannya terdapat, adalah kelas 160,5 – 165,5 . ΔPQR dan ΔPTS sebangun.

$$PT : PQ = ST : RQ$$

$$PT : 5 = (50 - 25) : (67 - 25)$$

$$= 25 : 42.$$

Jadi,

$$PT = \frac{125}{42} = 2,98 \quad ,$$

sehingga median $\tilde{x}$ = 160,5 + 2,98 =163,4 cm.

Secara umum, misalkan

L_i = batas bawah kelas median ;

n = banyaknya data ;

$(\Sigma f)_1$ = jumlah frekuensi kelas yang lebih rendah daripada kelas median ;

f med = frekuensi kelas median ;

c = besarnya interval kelas ; maka

$$PT : PQ = ST : RQ$$

$$PT : c = \left[\frac{1}{2} n - (\Sigma f)_1 \right] : f\ med$$

$$PT = \left[\frac{\frac{1}{2} n - (\Sigma f)_1}{f\ med} \right] x\ c$$

Jadi,

$$\text{median } \tilde{x} = L_i + \left[\frac{\frac{1}{2} n - (\Sigma f)_1}{f\ med} \right] x\ c$$

$$\tilde{x} = 160,5 + \left(\frac{50 - 25}{42} \right) x\ 5$$

$$\tilde{x} = 163,48 \text{ cm.}$$

2.2. UKURAN, HIMPUNAN TERUKUR DAN FUNGSI TERUKUR

DEFINISI 2.6. Aljabar-σ (Field Borel)

$\mathscr{A}$ adalah keluarga himpunan-himpunan bagian dari X yang dinamakan aljabar bila memenuhi :

(i) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$;

(ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$;

dan jika memenuhi

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$,

maka $\mathscr{A}$ merupakan aljabar-σ (field Borel).

Contoh 2.6.

Bila $\mathscr{B}$ keluarga sub himpunan dari X yang memuat C maka ada aljabar-σ terkecil yang memuat C. Ada aljabar-σ $\mathscr{A}$ yang memuat C sehingga untuk setiap aljabar-σ $\mathscr{B}$ yang juga memuat $\mathscr{A}$.

Bukti :

Misal $\mathscr{F}$ adalah keluarga dari semua aljabar-σ yang memuat C, $\mathscr{F} \neq \emptyset$ (sebab bisa dibentuk aljabar-σ $\mathscr{B}$ yang memuat C). Dibentuk,

$$\mathscr{A} = \bigcap \{ \mathscr{B} \mid \mathscr{B} \in \mathscr{F} \} \Rightarrow \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}.$$

$\mathscr{A}$ adalah aljabar-σ, sebab

(i) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A, B \in \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$.

Karena $\mathscr{B}$ aljabar-σ $\Rightarrow A \cup B \in \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$

$\Rightarrow A \cup B \in \bigcap \{ \mathscr{B} \mid \mathscr{B} \in \mathscr{F} \}$

$\Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.

(ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A \in \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$.

Karena $\mathscr{B}$ aljabar-σ $\Rightarrow A^c \in \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$

$\Rightarrow A^c \in \bigcap \{ \mathscr{B} \mid \mathscr{B} \in \mathscr{F} \}$

$\Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$.

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$.

Karena $\mathscr{B}$ aljabar-σ $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{B} , \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

Jadi, $\mathscr{A}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat C.

DEFINISI 2.7. Ukuran

Jika $\mathscr{G}$ adalah suatu aljabar, maka suatu fungsi himpunan μ yang berharga real dan terdefinisi pada $\mathscr{G}$ disebut ukuran, jika memenuhi sifat-sifat :

(i) $\mu(E) \geq 0$, untuk $E \in \mathscr{G}$;

$\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) jika $E, F \in \mathscr{G}$ dan $E \subseteq F$, maka $\mu(E) \leq \mu(F)$;

(iii) jika $E_n \in \mathscr{G}$, $n = 1, 2, \ldots$ dimana $E_n \cap E_m = \emptyset$ untuk $m \neq n$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E \in \mathscr{G}$

maka $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

DEFINISI 2.8. Himpunan Terukur

Jika diberikan sembarang himpunan X, suatu himpunan $E \subset X$ dikatakan terukur, jika untuk semua $A \subset X$ dipenuhi.

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A - E)$$

Contoh 2.7.

Himpunan tertutup [a,b] adalah himpunan terukur.

DEFINISI 2.9. Fungsi Terukur

Diberikan ruang terukur $(X, \mathcal{M})$ dan suatu fungsi real $f : x \longrightarrow R$, maka f adalah fungsi terukur jika untuk setiap $a \in R$, himpunan $\{ x \in X \mid f(x) > a \} \in \mathcal{M}$ atau f adalah fungsi terukur jika $f^{-1}(a,\infty) \in \mathcal{M}$ dengan $(a,b) \subset R$.

Contoh 2.8.

Jika $X = R$ dan $\mathcal{B}$ adalah σ-aljabar Borel, maka sembarang fungsi monoton merupakan fungsi terukur Borel karena jika f adalah fungsi monoton naik, yaitu untuk $x \le x_1$ maka $f(x) \le f(x_1)$.

Sehingga didapat :

$\{ x \in R \mid f(x) > a \} = \{ x \in R \mid f(x) > f(c) \}$,

untuk $f(c) = a$

Maka $\{ x \in R \mid x > c \} \in \mathcal{B}$

2.3. SUPRIMA DAN INFIMA

DEFINISI 2.10. Suprima

a disebut suprima dari barisan himpunan $\{A_i\}$ jika ada a yang merupakan batas atas $\{A_i\}$ dan untuk setiap b yang merupakan batas atas $\{A_i\}$ berlaku $a \le b$.

DEFINISI 2.11. Infima

a disebut infima dari barisan himpunan $\{A_i\}$ jika ada a yang merupakan batas bawah $\{A_i\}$ dan untuk setiap b yang merupakan batas bawah $\{A_i\}$ berlaku $b \le a$.

Contoh 2.9.

Misal barisan $\{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2,\ldots\}$, maka

$\text{Inf } \{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2,\ldots\} = 0$

$\text{Sup } \{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2,\ldots\} = 1$

Misal barisan $\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n = 1,2, \ldots \}$, maka

$\text{Inf} \{ 1 - \frac{1}{n} \mid n = 1,2, \ldots \} = 0$

$\text{Sup} \{ 1 - \frac{1}{n} \mid n = 1,2, \ldots \} = 1$

THEOREMA 2.1

Diberikan sub himpunan S yang tidak kosong dari R dan terbatas ke atas. Jika ada $a \in R$ dan

$$a + S = \{ a + x \,;\, x \in S \} \text{ maka,}$$

$$\text{Sup } (a + S) = a + \text{Sup } S.$$

Bukti :

Misal $u = \text{Sup } S$, maka untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \leq u$.

Sehingga,

$$a + x \leq a + u$$

Sehinga $a + u$ merupakan batas atas untuk $a + S$ jadi diperoleh,

$$\text{Sup } (a + S) \leq a + u$$

Jika v adalah batas atas dari himpunan $a + S$, maka untuk semua $x \in S$ didapat

$$a + x \leq v$$

Sehingga,

$$x \leq v - a, \text{ untuk semua } x \in S$$

Akibatnya,

$$u = \text{Sup } S \leq v - a$$

Jadi,

$$a + u \leq v$$

dan karena a + u adlah batas atas dari himpunan a + S maka diperoleh :

$$\text{Sup }(a + S) = a + u = a + \text{Sup } S$$

DEFINISI 2.12.

Fungsi bernilai real f yang didefinisikan pada selang terbuka (a,b) dinamakan naik monoton pada(a,b). Jika untuk setiap x dan y dengan $a < x < y < b$ berlaku $f(x) \leq f(y)$. Jika ketidaksamaan yang terakhir ini dibalik, maka diperoleh definisi untuk fungsi turun monoton. Keluarga fungsi-fungsi monoton adalah keluarga fungsi-fungsi yang terdiri dari fungsi naik dan fungsi turun.

THEOREMA 2.2.

Jika f naik monoton pada (a,b), maka f(x+) dan f(x-) ada disetiap titik x pada (a,b), dan berlaku hubungan

$$\sup_{a<t<x} f(c) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t)$$

pernyataan yang serupa berlaku juga untuk fungsi turun monoton.

Bukti :

Karena f Naik monoton pada (a,b), maka himpunan nilai-nilai f(t) untuk $a < t < x$ terbatas ke atas oleh bilangan f(x), sehingga mempunyai batas atas terkecil yang akan dinamakan A. Jelas bahwa $A \leq f(x)$, Sebab $f(x)$ merupakan suatu batas atas nilai-nilai fungsi tersebut. Akan tetapi diperlihatkan bahwa $A = f(x-)$.

Diambil $\varepsilon > 0$ dari definisi

$$A = \text{Sup}\ \{ f(t) : a < t < x \}$$

Maka terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga

$a < x - \delta < x$ dan $A - \varepsilon < f(x - \delta)\ A$ (1)

Karena f naik monoton, maka untuk

$x - \delta < t < x$ berlaku $f(x - \delta) \leq f(t) \leq A$ (2)

Dengan memperhatikan (1) dan (2) tampak bahwa untuk semua t dengan $x - \delta < t < x$ berlaku

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq f(t)\ A < A + \varepsilon$$

atau

$$| f(t) - A | < \varepsilon$$

jadi :

$$f(x) = A = \sup_{a<t<x} f(t)$$

terbukti $\sup\limits_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(t)$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa,

$$f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t)$$

Akhirnya , terbukti bahwa :

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f\ (x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t)$$

2.4. HIMPUNAN FUZZY

2.4.1. PENGERTIAN DAN KONSEP DASAR HIMPUNAN FUZZY

Himpunan Fuzzy adalah himpunan dengan rangkaian derajat dari anggota-anggotanya. Himpunan ini bercirikan suatu fungsi keanggotaan (fungsi karakteristik), yaitu fungsi yang memberikan kepada masing-masing anggota suatu derajat, yang harganya berkisar antara 0 dan 1. Konsep - konsep dasar himpunan fuzzy akan diperjelas pada definisi - definisi di bawah ini.

DEFINISI 2.13.

Jika X himpunan semesta, maka himpunan fuzzy A dari X adalah merupakan fungsi χ_A ke bilangan real pada interval [0,1] untuk setiap $x \in X$.

Fungsi $\chi_A : X \longrightarrow [0,1]$,

disebut fungsi keanggotaan X dalam A

Jika X adalah himpunan berhingga $x_1, x_2, \ldots x_n$, maka himpunan fuzzy A dapat dituliskan sebagai,

$$A = \{(x_1 | \chi_A(x_1)),\ (x_2 | \chi_A(x_2)), \ldots,\ (x_n | \chi_A(x_n))\}$$

Dalam hal demikian suatu elemen $x \in X$ dapat dikatakan :

(a) Anggota himpunan fuzzy A kosong jika $\chi_A(x) = 0$

(b) Anggota himpunan fuzzy A dengan derajat keanggotaan yang rendah jika $\chi_A(x)$ mendekati 0.

(c) Anggota himpunan fuzzy A dengan derajat kenggotaan yang tinggi jika $\chi_A(x)$ mendekati 1

(d) Anggota himpunan fuzzy A seutuhnya jika $\chi_A(x) = 1$

Contoh 2.10.

Misal pada semesta X terdapat himpunan fuzzy yang berlainan

$X = \{ 5,10,20,30,40,50,60,70,80 \}$

Jika ditentukan himpunan-himpunan fuzzy seperti,

A = Bayi ; B = Dewasa ; dan C = Tua.

Dengan derajat keangotaan masing-masing ditentukan sebagai berikut :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \left| -\frac{1}{5} x + 1 \right| & \text{, jika } 0 \le x \le 5 \\ 0 & \text{, Jika } 5 \le x \le 80 \end{cases}$$

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } 0 \le x \le 10 \\ \left| \frac{1}{20} x - \frac{1}{2} \right| & \text{, jika } 10 \le x \le 30 \\ 1 & \text{, jika } 30 \le x \le 80 \end{cases}$$

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } 0 \le x \le 10 \\ \left| \frac{1}{60} x - \frac{1}{6} \right| & \text{, jika } 10 \le x \le 70 \\ 1 & \text{, jika } 70 \le x \le 80 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh,

$\chi_A(5) = 0$	$\chi_B(5) = 0$	$\chi_C(5) = 0$
$\chi_A(10) = 0$	$\chi_B(10) = 0$	$\chi_C(10) = 0$
$\chi_A(20) = 0$	$\chi_B(20) = 0,5$	$\chi_C(20) = 0,17$
$\chi_A(30) = 0$	$\chi_B(30) = 1$	$\chi_C(30) = 0,33$
$\chi_A(40) = 0$	$\chi_B(40) = 1$	$\chi_C(40) = 0,5$
$\chi_A(50) = 0$	$\chi_B(50) = 1$	$\chi_C(50) = 0,67$
$\chi_A(60) = 0$	$\chi_B(60) = 1$	$\chi_C(60) = 0,83$

$\chi_A(70) = 0$ $\chi_B(70) = 1$ $\chi_C(70) = 1$

$\chi_A(80) = 0$ $\chi_B(80) = 1$ $\chi_C(80) = 1$

DEFINISI 2.14.

Support dari himpunan fuzzy A dalam X adalah suatu himpunan yang terdiri dari elemen x yang mempunyai derajat keanggotan dalam A ditulis :

$$\text{Supp } A = \{ x \in X \mid \chi_A(x) > 0 \}$$

dengan $\chi_A(x)$ adalah derajat keanggotaan X dalam A.

Contoh 2.11.

Support dari himpunan fuzzy dewasa pada contoh 2.10. adalah

$$\text{Supp } B = \{20,30,40,50,60,70,80\}.$$

DEFINISI 2.15.

Himpunan fuzzy A kosong adalah suatu himpunan yang terdiri atas elemen X yang mempunyai derajat keanggotaan 0, untuk semua $x \in X$.

$$\text{Supp } A \text{ nol} = \{ x \in X \mid \chi_A(x) = 0 \}.$$

Contoh 2.12.

Himpunan fuzzy pada bayi, disebut himpunan fuzzy kosong, sebab $\chi_A(x) = 0$, untuk setiap $x \in X$.

2.4.2. OPERASI SEDERHANA PADA HIMPUNAN FUZZY

Dalam pasal ini akan diperluas pengertian-pengertian teoritis dalam himpunan ke dalam himpunan fuzzy.

DEFINISI 2.16. Gabungan

Jika X suatu himpuna semesta A dan B adalah himpunan fuzzy dari X. Maka suatu gabungan dari dua himpunan fuzzy didefinisikan

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max \{ \chi_A(x) , \chi_B(x) \},$$

untuk setiap $x \in X$.

Contoh 2.13.

Dari contoh 2.10. carilah gabungan himpunan fuzzy B dan C.

Jawab :

X = {5,10,20,30,40,50,60,70,80}

B = {(5|0), (10|0), (20|0,5), (30|1), (40|1), (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}

C = {(5|0), (10|0), (20|0,17), (30|0,33), (40|0,5), (50|0,67), (60|0,83), (70|1), (80|1)}

B ∪ C = {(5|0), (10|0), (20|0,5), (30|1), (40|1), (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}.

DEFINISI 2.17. Irisan

Jika X himpunan semesta, A dan B adalah dua himpunan fuzzy dari X. Maka suatu irisan dua himpunan fuzzy didefinisikan oleh

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min \{ \chi_A(x) , \chi_B(x) \},$$

untuk setiap $x \in X$.

Contoh 2.14.

Carilah irisan antara himpunan fuzzy dewasa dan tua pada contoh 2.10.

Jawab :

X = { 5,10,20,30,40,50,60,70,80 }

B = {(5|0), (10|0), (20|0,5), (30|1), (40|1), (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}

C = {(5|0), (10|0), (20|0,17), (30|0,33), (40|0,5), 50|0,67), (60|0,83), (70|1), (80|1)}

B $\cap$ C = {(5|0), (10|0), (20|0,17), (30|0,33), (40|0,5), (50|0,67), (60|0,83), (70|1), (80|1)}.

DEFINISI 2.18. Komplemen

Jika X suatu himpunan semesta. Maka $\overline{A}$ adalah komplemen dari himpunan fuzzy A yang didefinisikan oleh

$$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x) \text{ , untuk setiap } x \in X.$$

Contoh 2.15.

Carilah komplemen dari himpunan fuzzy tua pada contoh 2.10.

Jawab :

X = { 5,10,20,30,40,50,60,70,80 }

C = {(5|0), (10|0), (20|0,17), (30|0,33), (40|0,5), (50|0,67), (60|0,83), (70|1), (80|1)}.

$\chi_{\overline{C}}(x) = 1 - \chi_C(x)$

$= \{1, 1, 0{,}83 , 0{,}67 , 0{,}5 , 0{,}33 , 0{,}17 , 0 , 0\}$

Maka $\overline{C} = \{(5|1), (10|1), (20|0{,}83), (30|0{,}67), (40|0{,}5), (50|0{,}33), (60|0{,}17), (70|0), (80|0)\}$.

DEFINISI 2.19.

Derajat keanggotaan $\overline{A}$ (komplemen himpunan fuzzy A) adalah bergantung pada derajat kenggotaan himpunan fuzzy A. Dengan kata lain

$$\chi_{\overline{A}}(x) = h\ [\chi_A(x)],$$

dimana h = fungsi komplementasi yaitu suatu fungsi yang mempunyai sifat $h\ [\chi_A(x)] = 1 - \chi_A(x)$.

Akibat dari definisi 2.19. ini ialah

THEOREMA 2.3.

Jika h adalah fungsi komplementasi maka diperoleh

$$h\ \{\ h\ [\chi_A(x)]\ \} = \chi_{\overline{A}}(x),$$

dengan $\chi_{\overline{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan x dalam himpunan fuzzy $\overline{A}$.

Bukti :

Dari definisi 2.19 diperoleh $\chi_{\overline{A}}(x) = h\ [\chi_A(x)]$

$= 1 - \chi_A(x)$

dimana h adalah fungsi komplementasi, sehingga

$$h\ \{\ h\ [\chi_{\overline{A}}(x)]\ \} = h\ \{\ h\ [\ h\ [\chi_A(x)]\ ]\ \}$$

$$= h\ \{\ h\ [\ 1 - \chi_A(x)\ ]\ \}$$

$$= h\,[\,1 - 1 + \chi_A(x)\,]$$
$$= h\,[\chi_A(x)]$$
$$= 1 - \chi_A(x)$$
$$= \chi_{\overline{A}}(x).$$

Terbukti bahwa $h\,\{\,h\,[\chi_{\overline{A}}(x)]\,\} = \chi_{\overline{A}}(x)$.

THEOREMA 2.4.

Jika $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) = 1$, maka $\chi_{\overline{A}}(x_1) + \chi_{\overline{A}}(x_2) = 1$, untuk setiap x_1, $x_2 \in X$. Dimana $\chi_A(x)$ adalah keanggotaan x dari himpunan fuzzy A dan $\chi_{\overline{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan x dari himpunan fuzzy $\overline{A}$.

Bukti :

Dari definisi 2.18. diperoleh $\chi_A(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Sehingga untuk $\chi_{\overline{A}}(x_1) = 1 - \chi_A(x_1)$

$\chi_{\overline{A}}(x_2) = 1 - \chi_A(x_2)$, untuk setiap x_1, x_2, $\in X$

Maka,

$$\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) = 1$$
$$1 - \chi_{\overline{A}}(x_1) + 1 - \chi_{\overline{A}}(x_2) = 1$$
$$2 - \chi_{\overline{A}}(x_1) - \chi_{\overline{A}}(x_2) = 1$$
$$- \chi_{\overline{A}}(x_1) - \chi_{\overline{A}}(x_2) = 1 - 2$$
$$\chi_{\overline{A}}(x_1) + \chi_{\overline{A}}(x_2) = 1$$

Jadi $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) = 1$ maka $\chi_{\overline{A}}(x_1) + \chi_{\overline{A}}(x_2) = 1$ terbukti.

DEFINISI 2.20. Inklusi

Jika X adalah semesta dan A,B adalah himpunan fuzzy dari X, maka da[at dikatakan bahwa, himpunan fuzzy A inklusi dalam himpunan fuzzy B jika hanya jika untuk setiap $x \in X$,

$\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ yang ditulis $A \subseteq B$

Contoh 2.16.

Misalkan X = { 5,10,20,30,40,50,60,70,80 }, maka seperti yang telihat dalam contoh 2.13, maka himpunan fuzzy

A = {(5|0), (10|0), (20|0), (30|0), (40|0), (60|0, (70|0), (80|0)}

B = {(5|0), (10|0), (20|0,5), (30|1), (40|1), (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}

Selidiki apakah himpunan fuzzy $A \subseteq B$.

Jawab :

Dari yang diketahui diatas, diperoleh

$$\chi_A(5) = 0 = \chi_B(5) = 0$$
$$\chi_A(10) = 0 = \chi_B(10) = 0$$
$$\chi_A(20) = 0 < \chi_B(20) = 0{,}5$$
$$\chi_A(30) = 0 < \chi_B(30) = 1$$
$$\chi_A(40) = 0 < \chi_B(40) = 1$$
$$\chi_A(50) = 0 < \chi_B(50) = 1$$
$$\chi_A(60) = 0 < \chi_B(60) = 1$$
$$\chi_A(70) = 0 < \chi_B(70) = 1$$
$$\chi_A(80) = 0 < \chi_B(80) = 1$$

Ternyata terlihat bahwa $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, untuk setiap $x \in X$ jadi himpunan fuzzy $A \subseteq B$.

DEFINISI 2.21. Kesamaan

Jika X adalah suatu himpunan semesta, A dan B adalah dua himpunan fuzzy dalam X, maka himpunan fuzzy A dikatakan sama dengan himpunan fuzzy B jika

$$\chi_A(x) = \chi_B(x), \text{ untuk setiap } x \in X$$

dan ditulis himpunan fuzzy A = B. jika paling sedikit satu $x \in X$ sedemikian sehingga persamaan $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ ini tidak terpenuhi maka dikatakan bahwa himpunan fuzzy A tidak sama dengan himpunan fuzzy B atau $A \neq B$..

DEFINISI 2.22 .

Hasil kali himpunan fuzzy A dan B dalam himpunan semesta X didefinisikan sebagai

$$\chi_{A.B}(x) = \chi_A(x)\ \chi_B(x), \text{ untuk setiap } x \in X.$$

dan dinotasikan B.C

DEFINISI 2.23 .

Jumlah aljabar himpunan fuzzy A dan B himpunan semesta X dinotasikan dengan A + B, dan didefinisikan oleh

$$\chi_{A+B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\ .\ \chi_B(x),$$

untuk setiap $x \in X$

Contoh 2.17.

Dari contoh 2.10. diketahui bahwa

X = {5,10,20,30,40,50,60,70,80} dan himpunan - himpunan fuzzy

B = {(5|0), (10|0), (20|0,5), (30|1), (40|1), (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}

C = {(5|0), (10|0), (20|0,17), (30|0,33), (40|0,5), (50|0,67), (60|0,83), (70|1), (80|1)}

Carilah penyelesaian dari : B + C.

Jawab :

χ_B = {0, 0, 0,5 , 1, 1, 1, 1, 1, 1}

χ_C = {0, 0, 0,17 , 0,33 , 0,5 , 0,67 , 0,83 , 1, 1}

$\chi_{B.C}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_C(x)$

= {0, 0, 0,085 , 0,33 , 0,5 , 0,67 , 0,83 , 1, 1}

Maka

B.C = {(5|0), (10|0), (20|0,085), (30|0,33), (40|0,5), (50|0,67), (60|0,83), (70|1), (80|1)}

Sehingga,

$\chi_{B+C}(x) = \chi_B(x) + \chi_C(x) - \chi_{B.C}(x)$

$\chi_{B+C}(5) = 0 + 0 - 0 = 0$

$\chi_{B+C}(10) = 0 + 0 - 0 = 0$

$\chi_{B+C}(20) = 0{,}5 + 0{,}17 - 0{,}085 = 0{,}585$

$\chi_{B+C}(30) = 1 + 0{,}33 - 0{,}33 = 1$

$\chi_{B+C}(40) = 1 + 0{,}5 - 0{,}5 = 1$

$\chi_{B+C}(50) = 1 + 0{,}67 - 0{,}67 = 1$

$\chi_{B+C}(60) = 1 + 0{,}83 - 0{,}83 = 1$

$\chi_{B+C}(70) = 1 + 1 - 1 = 1$

$\chi_{B+C}(80) = 1 + 1 - 1 = 1$

Jadi jumlah aljabar himpunan-himpunan fuzzy

B + C = {(5|0), (10|0), (20|0,585), (30|1), (40|1), (50|1), (60|1), (70|1), (80|1)}

DEFINISI 2.24. Indeks Kefuzzian

Jika A adalah himpunan fuzzy dalam himpunan semesta X, dan $\underline{A}$ menyatakan himpunan fuzzy sederhana yang paling dekat dengan A, maka $\underline{A}$ merupakan himpunan fuzzy sederhana terdekat apabila,

$$\chi_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ jika } \chi_A(x) < 0,5, \text{ untuk setiap } x \in X \\ 1, \text{ jika } \chi_A(x) \geq 0,5, \text{ untuk setiap } x \in X \end{cases}$$

Contoh 2.18.

Misalkan X = {a,b,c,d,e,f,g} dan himpunan fuzzy A = {(a|0,2), (b|0,8), (c|0,5), (d|0,3), (e|1), (f|0), (g|0,9)}

Carilah himpunan fuzzy sederhana terdekat dari himpunan fuzzy A.

Jawab :

$\chi_{\underline{A}}(a) = 0$, sebab $\chi_A(a) = 0,2 < 0,5$

$\chi_{\underline{A}}(b) = 1$, sebab $\chi_A(b) = 0,8 > 0,5$

$\chi_{\underline{A}}(c) = 1$, sebab $\chi_A(c) = 0,5$

$\chi_{\underline{A}}(d) = 0$, sebab $\chi_A(d) = 0,3 < 0,5$

$\chi_{\underline{A}}(e) = 1$, sebab $\chi_A(e) = 1 > 0,5$

$\chi_{\underline{A}}(f) = 0$, sebab $\chi_A(f) = 0 < 0,5$

$\chi_{\underline{A}}(g) = 1$, sebab $\chi_A(g) = 0,9 > 0,5$

Jadi

$\underline{A}$ = {(a|0), (b|1), (c|1), (d|0), (e|1), (f|0), (g|1)}

DEFINISI 2.25.

Misalkan α adalah suatu bilangan real, dimana $0 \leq \alpha \leq 1$, dan A adalah himpunan fuzzy dalam himpunan semesta X. Maka himpunan sederhana orde α dari himpunan fuzzy A ditulis A_α, dan didefinisikan sebagai

$$A_\alpha = \{ x \mid x \in X , \chi_A(x) \geq \alpha \}$$

Contoh 2.19.

Jika diketahui $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \}$ dan himpunan fuzzy

$A = \{(x_1|0,8), (x_2|0,3), (x_3|1), (x_4|0,3), (x_5|0,6), (x_6|0,2), (x_7|0,5)\}$

Carilah $A_{0,3}$ dan $A_{0,7}$

Jawab :

$A_{0,3} = \{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|1), (x_6|0), (x_7|1)\} = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 \}$

$A_{0,7} = \{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0), (x_5|0), (x_6|0), (x_7|0)\}$
$= \{ x_1, x_3\}$

2.4.3. SIFAT-SIFAT HIMPUNAN FUZZY

Jika A,B dan C masing-masing adalah himpunan fuzzy, maka berlaku sifat-sifat :

1. KOMUTATIF : $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2. ASSOSIATIF : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. IDEMPOTEN : $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

4. DISTRIBUTIF : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. $A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup \emptyset = A$

Dimana $\emptyset$ adalah himpunan kosong, sedemikian sehingga

$\chi_A(x_i) = 0$