BAB II

MATERI DASAR

2.1. Beberapa Definisi Tentang Statistik

Konsep-konsep dasar yang mendasari dalam menganalisa suatu rancangan percobaan secara singkat akan disajikan sebagai berikut :

Definisi 2.1 : Populasi adalah keseluruhan pengamatan yang menjadi perhatian, sedangkan sampel adalah pengamatan yang merupakan himpunan bagian dari populasi.

Definisi 2.2 : Jika X_1, X_2, ..., X_n adalah sekelompok data yang menyusun suatu populasi berhingga berukuran N dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata populasinya adalah :

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$$

dan varian populasinya adalah :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{N}$$

Definisi 2.3. : Jika x_1, x_2,...,x_n adalah data yang merupakan sampel berhingga berukuran n dan tidak harus semuanya berbeda, maka rata-rata sampel adalah :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

dan varian sampelnya adalah :

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

2.2. Distribusi Normal dan Distribusi-distribusi yang Berhubungan.

Definisi 2.4 : Jika X sebuah variabel acak, disebut mempunyai distribusi normal, jika bentuk fungsi densitasnya adalah :

$$f = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \text{ eks } \left| \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma} \right|$$

$- \infty < x < \infty$

dengan μ dan σ^2 merupakan parameter rata-rata dan varian dari distribusi normal, yang memenuhi ($- \infty < x < \infty$) dan $\sigma^2 > 0$.

X ∞ N (μ,σ^2) maksudnya adalah variabeaal acak X berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2.

Definisi 2.5 : Jika s^2 adalah varian dari sampel acak berukuran n yang ditarik dari suatu populasi berdistribusi normal dengan varian σ^2,maka :

$$\chi^2_{(v)} = \frac{(n-1) s}{\sigma^2}$$

merupakan sebuah nilai variabel acak χ^2 yang berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas (db) = n-1.

Definisi 2.6 : Jika Z dan $X^2_{(v)}$ adalah variabel acak independent (normal standard dan chikuadrat), maka :

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\left[X^2_{(v)} \; / \; v \right]^{1/2}}$$

akan berdistribusi t dengan db v = n-1

Definisi 2.7 : Jika $\chi^2_{(v1)}$ dan $\chi^2_{(v2)}$ adalah variabel chi-kuadrat dengan db v_1 dan v_2, maka :

$$F = \frac{\chi^2_{(v1)} \; / \; v_1}{\chi^2_{(v2)} \; / \; v_2}$$

akan berdistrtibusi F dengan db v_1 sebagai pembilang dan db v_2 sebagai penyebut.

2.3. Konsep Pendugaan

Dalam analisa statistik, pendugaan digunakan untuk menaksir parameter yang tidak diketahui seperti rata-rata dan varian.

Definisi 2.8 : Pendugaan (estimator) adalah anggota variabel acak yang digunakan untuk memperkirakan parameter populasinya. penduga parameter adalah yang merupakan fungsi nilai-nilai anggota variabel acak yang diamatai.

2.4.1. Estimasi Tunggal

Definisi 2.9 : Penduga tunggal pada sebuah parameter populasi adalah nilai tunggal pada sebuah statistik yang berhubungan dengan parameter tersebut.

Jika sebuah variabel acak X dengan distribusi probabilitas $f(x)$ dengan nilai-nilai yang diamati $X_1, X_2, \ldots X_n$, nilai rata-rata sampel x adalah : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ dinamakan suatu estimator tunggal rata-rata μ yang tidak diketahui. Penduga tunggal ini sering ditulis $\hat{\mu}$ karena merupakan penduga dari μ. Demikian juga jika varian populasi σ^2 tidak diketahui, sebuah estimator tunggal untuk σ^2 adalah varian sampel s^2 ditulis $\hat{\sigma}^2$ dan nilai numerik s^2 dihitung berdasarkan data sampel yang merupakan perkiraan tunggal σ^2

2.4.2. Penduga Melelui Metode Kuadrat Terkecil

Pada dasarnya cara kuadrat terkecil bertolak dari pengertian bahwa estimator yang baik dapat diperoleh melalui rata-ratanya dengan jumlah simpangan kuadratnya bernilai paling kecil.

Sifat metode kuadrat terkecil :

Jumlah kuadrat simpangan merupakan fungsi kudrat agar fungsi tersebut mempunyai nilai minimum, maka turunan parsiil pertama terhadap parameter μ sama dengan nol dan turunan parsiil kedua terhadap parameter μ lebih besar dari nol.

$$\frac{\partial \sum_i (x_i - \mu)^2}{\partial \mu} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \sum_i (x_i - \mu)^2}{\partial \mu} > 0$$

Langkah-langkah pendugaan melalui metode kuadrat terkecil :

1). Penentuan model matematik

2). Dari model dicari sesatan

3). Turunan secara sesatan kuadrat terhadap parameter yang diduga sama dengan nol, maka akan diperoleh penduga yang dimaksud.

2.4.3. Pengujian Rannge Berganda Duncan

Metode ini untuk menguji semua pasangan rata-rata yang mungkin .

Hipotesanya : $H_0 : \mu_i = \mu_j$

vs

$H_1 : \mu_i \mp \mu_j$

Untuk mempergunakan range berganda duncan dengan besar sampel yang sama, a rata-rata perlakuan disusun dalam susunan menaik, dan error baku masing-masing rata-rata ditetapkan sebagai :

$$s\,\bar{y}_i = \sqrt{\frac{RKS}{db}}$$

Dari tabel duncan range nyata diperoleh nilai r_α (p,f),untuk p = 2,3,...a dimana α adalah tingkat nyata dan f jumlah db untuk error. Ubah range ini ke dalam himpunan a-1 rangne nyata terkecil (misal, Rp), untuk p = 2,3,...a dengan menghitung :

$$R_p = r_\alpha\,(p,f)\; s\,\bar{y}_i \quad \text{untuk } p = 2,3,...a$$

Maka observasi range antara rata-rata uji, dimulai dengan yang terbesar lawan yang terkecil, yang akan dibandingkan dengan range nyata terkecil R_{α}. Selanjutnya range yang terbesar dan terkecil kedua dihitung dan dibandingkan dengan nyata terkecil $R_{\alpha-1}$. Perbandingan ini berlangsung sampai seluruh rata-rata telah dibandingkan dengan rata-rata terbesar. Range rata-rata terbesar kedua dan yang terkecil dihitung, kemudian dibandingkan terhadap range nyata terkecil $R_{\alpha-1}$. Proses ini berlangsung sampai range seluruh yang mungkin a(a-1)/2 pasangan rata-rata telah diperhitungkan. Jika sebuah observasi rannge lebih besar dari range nyata terkecil, maka kita menyimpulkan pasangan dalam rata-rata yang bersangkutan secara nyata berbeda. Untuk mencegah kontradiksi, tidak ada perbedaan antara sebuah pasangan rata-rata yang dianggap nyata jika dua rata-rata yang dicakup terletak antara dua rata-rata lainnya yangn tidak berbeda secara secara nyata.

2.5. Pengujian Hipotesa

2.5.1. Langkah-langkah Pengujian Hipotesa

1. Menentukan hipotesa nolnya.
2. Menentukan hipotesa alternatif yang relevan dengan permasalahan-permasalahan yang akan diuji.
3. Menentukan taraf nyata pengujian α.
4. Memilih uji statistik yang sesuai dengan hipotesa yang akan diuji kemudian menentukan daerah kritisnya.
5. Membuat keputusan, menolak H_o jika nilai statistik uji tersebut berada dalam daerah kritis, dam menerima H_o jika nilai itu berada di luar daerah kritis.

2.6. Pengertian Beberapa Istilah Dalam Rancangan Percobaan

a. Percobaan

adalah suatu usaha yang terencana untuk mengungkapkan fakta-fakta baru, atau menguatkan atau membantah hasil-hasil yang sudah ada sebelumnya.

b. Rancangan Percobaan

Merupakan seperangkat pengetahuan yang mempelajari bentuk rancangan, cara memilih dan membuat rancangan tersebut juga mencakup prosedur analisa statistik dari data hasil percobaan, hingga pengambilan keputusan yang sah.

c. Faktor

Ialah variabel independent yang menjadi obyek dalam suatu penelitian

d. Taraf Faktor

Ialah nilai-nilai atau klasifikasi-klasifikasi dari pada sebuah faktor.

e. Perlakuan

Ialah macam-macam prosedur yang pengaruhnya diukur, dibandingkan satu sama lain.

f. Pengacakan

Merupakan suatu cara untuk membuat korelasi antara kekeliruan (sesatan) sekecil-kecilnya dan juga merupakan cara menghilangkan bias.

g. Replikasi

Merupakan pengulangan sebanyak n kali dari setiap perlakuan.

h. Pemblokan

Adalah sebuah tehnik untuk memperbaiki ketepatan sebuah eksperimen.

i. Analisa Varian

Ialah suatu prosedur atau metode yang memungkinkan untuk menguji nilai rata-rata sekaligus, dengan menggunakan variasi total dari data yang ada menjadi komponen-komponen.

2.6.2. Langkah-langkah Membuat Rancangan Percobaan

1. Menentukan mengenai adanya masalah.
2. Membuat sebuah pernyataan yang jelas mengenai masalah tersebut.
3. Pemilihan "faktor-faktor" dan taraf-tarafnya.
4. Menentukan variabel dependent atau yang biasa disebut response, yaitu variable karakteristik yang akan diukur.
5. Menentukan ruang inferensi, yaitu menentukan batas-batas didalam mana hasil percobaan/penelitian akan berlaku.
6. Pemilihan unit percobaan atau satuan percobaan secara acak.
7. Penentuan dari randomisasi dari perlakuan-perlakuan pada unit-unit eksperiment.
8. Membuat analisa varian, untuk menentukan apakah nantinya kita akan dapat menguji faktor-faktor yang sedang kita perhatikan, yang menjadi obyektif (tujuan) dari penelitian.
9. Pengambilan kesimpulan.

2.7. RANCANGAN HIRARKI DUA FAKTOR

2.7.1. Model Linear Pada Rancangan Hirarki Dua Faktor

Rancangan hirarki dua faktor yaitu faktor B yang bertaraf b buah berada dalam faktor A yang bertaraf a buah. Ini berarti taraf-taraf dari sebuah faktor B merupakan subsampel dari taraf-taraf faktor A.

Bentuk dan susunan datanya dalah sebagai berikut :

Faktor A		1	2
		1 2 ... b	1 2 ... b
	1	Y_{111} Y_{121} ... Y_{1b1}	Y_{211} Y_{221} ... Y_{1b1}
	2	Y_{112} Y_{122} ... Y_{1b2}	Y_{212} Y_{222} ... Y_{2b2}
	.	. . .	. . .
	.	. . .	. . .
	.	. . .	. . .
	n	Y_{11n} Y_{12n} ... Y_{1bn}	Y_{21n} Y_{22n} ... Y_{2bn}
Jumlah faktor B $= Y_{ij.}$		$Y_{11.}$ $Y_{12.}$ ... $Y_{1b.}$	$Y_{21.}$ $Y_{22.}$ ... $Y_{2b.}$
Jumlah faktor A $= Y_{i..}$		$Y_{1..}$	$Y_{2..}$
Jumlah total		$Y_{...}$	

Faktor A		. . . . .	a			
Faktor B			1	2	....	b
	1	. . . . . .	Y_{a11}	Y_{a21}	....	Y_{ab1}
	2	. . . . . .	Y_{a12}	Y_{a22}	....	Y_{ab2}
	.		.	.		.
	.		.	.		.
	.		.	.		.
	n	. . . . . .	Y_{a1n}	Y_{a2n}		Y_{abn}
Jumlah faktor B $= Y_{ij.}$		. . . . . .	$Y_{a1.}$	$Y_{a2.}$	....	$Y_{ab.}$
Jumlah faktor A $= Y_{i..}$		. . . . . .	$Y_{a..}$			
Jumlah Total		. . . . . .	$Y_{...}$			

Notasi observasi yang digunakan pada rancangan hirarki dua faktor adalah sebagai berikut :

Y_{ijk} ialah : hasil observasi ke k yang dipengaruhi oleh faktor B taraf ke j yang berada dalam faktor A taraf ke i.

$Y_{ij.}$ ialah : jumlah observasi dari harga-harga observasi faktor B taraf ke j yang berada dalam faktor A taraf ke i.

Yaitu : $\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$ untuk $i = 1,2,...a;$

$j = 1,2,...b.$

$Y_{i..}$ ialah : jumlah observasi dari harga-harga observasi faktor A taraf ke i.

yaitu : $\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$ untuk $j = 1,2....b$

$k = 1,2,...n$

$Y_{...}$ ialah : jumlah dari seluruh hasil observasi;

Yaitu : $\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$

Definisi 2.10 : Secara umum model matematika untuk rancangan hirarki dua faktor adalah :

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \quad .....(2.1)$$

$i = 1,2.....a$

$j = 1,2.....b$

$k = 1,2.....n$

dimana : Y_{ijk} = hasil observasi ke-k yang dipengaruhi oleh faktor A taraf ke i dan faktor B taraf ke j.

μ = Mean

τ_i = Efek faktor A taraf ke i

$\beta_{j(i)}$ = Efek faktor B taraf ke j yang berada dalam faktor A taraf ke i

$\varepsilon_{k(ij)}$ = sesatan

Untuk model tetap, asumsi yang diambil adalah :

Efek faktor A taraf ke i yang didefinisikan sebagai berikut:

$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ dan efek faktor B taraf ke j yang berada dalam faktor A taraf ke i didefinisikan sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)} = 0$$

Sesatan percobaan diasumsikan berdistribusi normal independent dengan rata-rata nol dan varian σ^2 dan ditulis

$$\varepsilon_{k(ij)} \sim \text{DNI}\ (0,\sigma^2)$$

2.7.2. Penduga Untuk Masing-masing Parameter

Dari model pada definisi (2.10) akan diperoleh penduga untuk μ, τ_i, β_j dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, sebagai berikut :

Dari persamaan (2.1) diperoleh :

$$\varepsilon_{k(ij)} = Y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_{j(i)} \quad \ldots\ldots(\ 2.2\ )$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k (\ \varepsilon_{k(ij)})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k (\ Y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_{j(i)})^2$$

$$= L$$

Menurut sifat metode kuadrat terkecil :

i) $\dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0$

$$-2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (\ Y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_{j(i)}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = abn\,\mu + bn \sum_{i=1}^{a} \hat{\tau}_i + an \sum_{j=1}^{b} \hat{\beta}_{j(i)}$$

dengan batasan $\sum_{i=1}^{a} \hat{\tau}_i = 0$ dan $\sum_{j=1}^{b} \hat{\beta}_{j(i)} = 0$

maka diperoleh :

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = abn\,\hat{\mu}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} \quad \ldots\ldots(\ 2.3\ )$$

ii) $$\frac{\partial L}{\partial \tau_i} = 0$$

$$-2 \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (Y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\beta}_i) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = bn\,\hat{\mu} + bn\,\hat{\tau}_i$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} - \hat{\mu}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} - \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} \quad ....(2.4)$$

iii) $$\frac{\partial L}{\partial \beta_{j(i)}} = 0$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} (Y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_{j(i)}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} = n\,\hat{\mu} + n\,\hat{\tau}_i + n\,\hat{\beta}_{j(i)}$$

$$\hat{\beta}_{j(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} - \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} + \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} - \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} \quad .....(2.5)$$

Dari persamaan (2.2), (2.3), (2.4), dan (2.5) diperoleh

$$\text{maka } e_{k(ij)} = Y_{ijk} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} - \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} - \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n}$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}$$

$$= Y_{ijk} - \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} \quad \text{.....(2.6)}$$

Dari persamaan (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), dan (2.6)

$$\text{diperoleh } Y_{ijk} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} \right] + \left[\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} \right] + \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} - \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} \right] + \left[Y_{ijk} - \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} \right]$$

.....(2.7)

Deviasi (simpangan) total pers (2.7) adalah :

$$Y_{ijk} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} =$$

$$= \left[\frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} - \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} \right] +$$

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} - \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} \right] +$$

$$\left[Y_{ijk} - \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} \right] \quad \ldots\ldots\ldots (\ 2.8\ )$$

2.7.3. Hipotesa Efek Faktor Dalam Rancangan Hirarki Dua Faktor

a). Uji Hipotesa Efek Utama Faktor A (τ_i)

Apabila akan diselidiki apakah efek utama faktor A berbeda nyata atau tidak, maka dari tabel diambil :

$$F^* = \frac{E\ (RKA)}{E\ (RKS)} \quad \ldots\ (\ 2.14\ )$$

Definisi 2.21 : Hipotesa nol (H_o) dan hipotesa tandingannya (H_1) untuk rancangan hirarki dua faktor didefinisikan :

H_o : $\tau_i = 0$, untuk i = 1,2,...a

H_1 : $\tau_i \mp 0$, untuk paling sedikit sebuah i,

atau dengan kata lain :

H_o : efek utama faktor A tidak berbeda nyata

H_1 : efek utama faktor A berbeda nyata

Karena E(RKA) dapat diduga dengan RKA dan E(RKS) dapat diduga dengan RKS, maka :

$$F^{*} = \frac{RKA}{RKS}$$

$\frac{RKA}{RKS}$ berdistribusi F dengan derajat bebas (db) pembilang (a-1) dan db penyebut ab (n-1) adn tingkat kepercayaan α atau ditulis :

F [1-α, a-1, ab(n-1)] dan F^{*} akan dibandingkan dengan

F [1-α, a-1, ab(n-1)]....(2.15)

Dari perbandingan (2.15) dapat disimpulkan :

Jika F^{*} > F [1-α, a-1, ab(n-1)], maka H_o ditolak

Jika $F^{*} \leq$ F [1-α, a-1, ab(n-1)], maka H_o diterima

b). Uji Hipotesa Efek Spesifik Faktor B ($\beta_{j(i)}$)

H_o : $\beta_{j(i)} = 0$, untuk setiap j,i.

H_o : $\beta_{j(i)} \mp 0$, untuk paling sedikit sebuah j atau i.

Untuk menyelidiki apakah efek spesifik faktor B berbeda nyata atau tidak, maka :

$$F^{*} = \frac{RK\ B(A)}{RKS}$$

Berdistribusi F dengan tingkat kepercayaan α dan

F [1-α, a(b-1), ab(n-1)] dapat dicari dari tabel distribusi F, sehingga dari perbandingan F^{*} dan F dapat diambil kesimpulan bahwa :

Jika F^{*} > F [1-α, a(b-1), ab(n-1)], maka H ditolak

2.7.4. Analilisa varian Pada Rancangan Hirarki Dua Faktor

Selanjutnya kedua ruas persamaan (2.8) dikuadratkan dan dijumlahkan menurut taraf i,j, dan k akan diperoleh hubungan jumlah kuadrat-kuadrat (JK) rancangan hirarki dua faktor sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[Y_{ijk}-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{abn}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{bn}-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{abn}\right]+\right.$$

$$\left.\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{n}-\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{bn}\right]+\left[Y_{ijk}-\frac{\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{n}\right]\right\}^2 \quad .(2.9)$$

Persamaan (2.9) dapat diuraikan menjadi :

a). $$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[Y_{ijk}-\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{abn}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}^2-2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{abn}\right]+abn\left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}}{abn}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}^2-2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn}\right] + \left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn}\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^{2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn} \quad \ldots\ldots(2.10)$$

Bentuk persamaan (2.10) disebut sebagai jumlah kuadrat total disingkat JKT.

b) $\displaystyle \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn}\right]^2$

$$= bn\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}\right)^2 - 2\,\frac{\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{bn}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{abn}\right]^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{bn} -$$

$$\frac{2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{abn}$$

$$+ \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{bn} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn}$$

$$\ldots\ldots(2.11)$$

Bentuk persamaan (2.11) disebut sebagai jumlah kuadrat faktor A disingkat JKA.

(d). $$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} - \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n}\right)^2 - 2\,\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n}\,.\,\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} + \left(\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{n^2} - 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n}\,\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}\right)^2\Bigg]$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{n^2} - 2n\sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{n.\,bn}$$

$$+ bn\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{bn}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{n} - 2\sum_{i=1}\frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)}{bn}$$

$$+ bn\sum_{i=1}^{a}\frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{(bn)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n} - \sum_{i=1}^{a} \frac{\left(\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{bn} \quad ..(2.12)$$

Bentuk persamaan (2.12) disebut sebagai jumlah kuadrat faktor dalam faktor A disingkat JK B(A).

e). $$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} \left[Y_{ijk} - \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} \left[Y_{ijk}^2 - 2\, Y_{ijk} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} + \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - 2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n}$$

$$+ n \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - 2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n}$$

$$+ n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - 2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n}$$

$$+ \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n} \quad ..(2.13)$$

Bentuk persamaan (2.13) disebut sebagai jumlah kuadrat sesatan disingkat JKS.

Definisi 2.11 : Derajat bebas (db) suatu jumlah kuadrat (JK) adalah banyaknya elemen independent dalam JK tersebut.

Db dari jumlah kuadrat-kuadrat pada rancangan hirarki dua faktor ditentukan sebagai berikut :

JKT mempunyai a buah faktor A, b buah faktor B yang berada dalam faktor A dan n buah replikasi, maka JKT mempunyai abn buah elemen, maka :

JKT mempunyai db sebesar abn-1

JKA mempunyai db sebesar a-1

JK B(A) mempunyai db sebesar a(b-1)

$$
\begin{aligned}
\text{db JKS} &= \text{db JKT} - \text{db JKA} - \text{db JK B(A)} \\
&= (abn-1) - (a-1) - a(b-1) \\
&= abn - 1 - a + 1 - ab + a \\
&= abn - ab \\
&= ab\,(n-1)
\end{aligned}
$$

Definisi 2.12 : Rata - rata kuadrat (RK) adalah perbandingan antara jumlah kuadrat (JK) dengan derajat bebas (db) dari JK tersebut.

Akibat dari definisi (2.12), maka rata-rata kudrat untuk rancangan hirarki dua faktor ditentukan sebagai berikut:

Dari persamaan (2.10) diperoleh $RKT = \dfrac{JKT}{abn - 1}$ ..(2.14)

Dari persamaan (2.11) diperoleh $RKA = \dfrac{JKA}{a-1}$ .....(2.15)

Dari persamaan (2.12) diperoleh RK B(A) = $\dfrac{\text{JK B(A)}}{a\ (b-1)}$ ...(2.16)

Dari persamaan (2.13) diperoleh RKS = $\dfrac{\text{JKS}}{ab\ (n-1)}$ ....(2.17)

Analisa selanjutnya adalah mencari nilai-nilai harapan (ekspektasi) dari rata-rata kuadrat pada rancangan hirarki dua faktor dengan mengingat batasan :

$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ dan $\sum_{j=1}^{g} \beta_{j(i)} = 0$

Dari pers (2.15) diperoleh

$$E\,[\,RKA\,] = E\left[\frac{JKA}{a-1}\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\ E\left[\frac{\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{bn} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn}\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\ E\left[\frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\mu+\tau_i+\beta_{j(i)}+\varepsilon_{k(ij)}\right)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{abn}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\mu+\tau_i+\beta_{j(i)}+\varepsilon_{k(ij)}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\ E\left[\frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}\left(bn\,\mu + bn\,\tau_i + n\sum_{j=1}^{b}\beta_{j(i)}\right.\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k(ij)}\right)^2 - \frac{1}{abn}\left(abn\,\mu + bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i\right.$$

$$\left.\left. + n\sum^{a}\sum^{b}\beta_{j(i)} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{ijk}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{bn}\left(ab^2n^2\mu^2 + b^2n^2\sum_{i=1}^{a}\tau_i + n^2\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{n}\beta_{j(i)}^2 + \right.\right.$$

$$abn\,\sigma^2 \Big) - \frac{1}{abn} \Big(a^2b^2n^2\,\mu^2 + b^2n^2 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\,2} +$$

$$n^2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^{\,2} + abn\,\sigma^2 \Big]$$

$$= \frac{1}{a-1} \Big[bn \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\,2} + (a-1)\,\sigma^2 \Big]$$

$$= \sigma^2 + bn \sum_{i=1}^{a} \frac{\tau_i^{\,2}}{a-1}$$

Dari persamaan (2.16) diperoleh :

$$E\,[\,RK\ B(A)] = \left[\frac{JK\ B(A)}{a\ (b-1)} \right]$$

$$= \frac{1}{a\ (b-1)}\ E \left[\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n} - \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} Y_{ijk} \right)^2}{abn} \right]$$

$$= \frac{1}{a\ (b-1)}\ E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \right) \right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{bn} \left[\sum_{i=1}^{a} \left(\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \right) \right) \right] \right.$$

$$= \frac{1}{a(b-1)}\ E \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \Big(n\,\mu + n\,\tau_i + n\,\beta_{j(i)} \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k(ij)} \Big) \right) - \frac{1}{bn} \left(\sum_{i=1}^{a} \Big(bn\,\mu + bn\,\tau_i + n \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)} \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k(ij)} \Big) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{a\,(b-1)} \left[\frac{1}{n} \left\{ ab\, n^2 \mu^2 + b\, n^2 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\,2} + n^2 \right. \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^{\,2} + abn\, \sigma^2 \right\} - \frac{1}{bn} \left\{ ab^2 n^2 \mu^2 + \right.$$

$$\left. \left. b^2\, n^2 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\,2} + abn\, \sigma^2 \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{a(b-1)} \left[n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^{\,2} + a\,(b-1)\, \sigma^2 \right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^{\,2}}{a\,(b-1)}$$

Teorema 2.1 : Nilai harapan rata-rata kuadrat sesatan adalah varian σ^2 atau $E\,[RKS\,] = \sigma^2$

Bukti :

Dari persamaan (2.17) diperoleh :

$$E\,[\,RKS\,] = E \left[\frac{JKS}{ab\,(n-1)} \right]$$

$$= \frac{1}{ab\,(n-1)}\, E \left[\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^{\,2} - \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \right)^2}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{ab\,(n-1)}\, E \left[\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \right)^2 \right\} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{ab\,(n-1)}\, E \left[\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \right)^2 \right.$$

$$- \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \left(n\,\mu + n\,\tau_i + n\,\beta_{j(i)} + \sum_{k=1} \varepsilon_{k(ij)} \right)^2 \right] \Bigg]$$

$$= \frac{1}{ab\ (n-1)} \left[\left[abn\,\mu^2 + bn \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\ 2} + n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^{\ 2} \right.\right.$$

$$\left. + abn\,\sigma^2 \right] - \frac{1}{n} \left[ab\ n^2\ \mu^2 + b\ n^2 \sum_{i=1}^{a} \tau_i^{\ 2} \right.$$

$$\left.\left. + n^2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^{\ 2} + abn\,\sigma^2 \right] \right]$$

$$= \frac{1}{ab\ (n-1)} \left[ab\ (n-1)\ \sigma^2 \right]$$

$= \sigma^2$ (terbukti)

Berdasarkan definisi-definisi dan analisa yang telah dilakukan, maka dapat disusun tabel analisa varian untuk rancangan hirarki dua faktor sebagai berikut :

Tabel 2.2

Analisa Varian Untuk

Rancangan Hirarki Dua Faktor

Sumber Variasi	db	JK
Faktor A	a-1	$JKA = \dfrac{\sum_{i=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{bn} - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn}$
Faktor B yang berada dalam A	a(b-1)	$JK\ B(A) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{n} - \sum_{i=1}^{a}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{bn}$
Sesatan	ab(n-1)	$JKS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 -$

		$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{n}$
Total	abn-1	$JKT = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn}$

RK	E (RK)
$RKA = \frac{JKA}{a-1}$	$\sigma^2 + bn \frac{\sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a-1}$
$RK\ B(A) = \frac{JK\ B(A)}{a\ (b-1)}$	$\sigma^2 + \frac{n}{a(b-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)}^2$
$RKS = \frac{JKS}{ab\ (n-1)}$	σ^2

2.7.5. Analisa Efek Faktor Dalam Rancangan Hirarki Dua Faktor

Pada metode ANAVA memungkinkan untuk menguji hipotesis apakah efek faktor-faktor yang diselidiki signifikan dengan menggunakan uji F. kesimpulan yang diambil tidak menjelaskan perlakuan mana dari faktor tersebut yang menyebabkan penolakan H_o, maka dapat didapat pendugaan atau perbandingan mean masing-masing perlakuan dengan metode pembanding ganda antara mean perlakuan-perlakuan untuk menguji mean perlakuan-perlakuan yang menyebabkan penolakan H_o tersebut.

Pendugaan mean perlakuan-mean perlakuan ini meliputi :

1). Penduga mean taraf faktor $\mu_{ij.}$

Penduga titik tak bias dari mean perlakuan $\mu_{ij.}$ adalah $\overline{Y}_{ij.}$

Penduga ini mempunyai means dan varian :

$$E\,[\,\overline{Y}_{ij.}\,] = E\left[\frac{1}{n}\sum_k Y_{ijk}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\,E\left[\sum_k (\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)})\right]$$

$$= \frac{1}{n}\,E\left[n\mu + n\tau_i + n\beta_{j(i)} + \sum_k \varepsilon_{k(ij)}\right]$$

$$= \mu + \tau_i + \beta_{j(i)}$$

$$\sigma^2\,[\,\overline{Y}_{ij.}\,] = E\left[\overline{Y}_{ij.} - E\,[\overline{Y}_{ij.}\,]\right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_k Y_{ijk} - (\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)})\right.$$

$$\left. - (\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)})\right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n}(n\mu + n\tau_i + n\beta_{j(i)} + \sum_k \varepsilon_{k(ij)})\right.$$

$$\left. - (\mu + \tau_i + \beta_{j(i)})\right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_k \varepsilon_{k(ij)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\,E\left[\sum_k \varepsilon_{k(ij)}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\,E\left[\varepsilon_{1(ij)} + \varepsilon_{1(ij)} + \ldots + \varepsilon_{1(ga)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\,E\left[\varepsilon_{1(ij)}^2 + \varepsilon_{1(ij)}^2 + \ldots + \varepsilon_{1(ga)}^2\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E \left[n\,\sigma^2 \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

Varian penduga $\bar{Y}_{ij.}$ dinotasikan dengan $s^2(\bar{Y}_{ij.})$

maka :

$$\sigma^2(\bar{Y}_{ij.}) = \frac{E\,(RKS)}{n}$$

Karena E(RKS) dapat diduga dengan RKS, maka

$$s^2[\bar{Y}_{ij.}] = \frac{RKS}{n}, \text{ dengan db : ab (n-1)}$$

2). Penduga mean $\mu_{i..}$

penduga titik tak bias dari mean perlakuan $\mu_{i..}$ adalah $\bar{Y}_{i..}$

Penduga ini mempunyai mean dan varian :

$$E[\bar{Y}_{i..}] = E\left[\frac{1}{bn} \sum_j \sum_k Y_{ijk}\right]$$

$$= \frac{1}{bn} E\left[\sum_j \sum_k \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{bn} \left(bn\,\mu + bn\,\tau_i + 0 + 0\right)$$

$$= \mu + \tau_i$$

$$\sigma^2[Y_{i..}] = E\left[Y_{i..} - E[Y_{i..}]\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{bn} \sum_j \sum_k \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}\right) - \left(\mu + \tau_i\right)\right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{bn} \left(bn\,\mu + bn\,\tau_i + 0 + \sum_j \sum_k \varepsilon_{k(ij)} - \mu - \alpha_i \right) \right]$$

$$= \frac{1}{b^2n^2} E\left[\sum_j \sum_k \varepsilon_{k(ij)} \right]^2$$

$$= \frac{1}{b^2n^2} E\left[\varepsilon_{1(i1)} + \varepsilon_{2(i2)} + \ldots + \varepsilon_{n(ib)} \right]^2$$

$$= \frac{1}{b^2n^2} E\left[\varepsilon_{1(i1)}^2 + \varepsilon_{2(i2)}^2 + \ldots + \varepsilon_{n(ib)}^2 \right]^2$$

$$= \frac{1}{b^2n^2} \left[\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 \right]$$

$$= \frac{1}{b^2n^2} \left[bn\,\sigma^2 \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{bn}$$

Varian penduga $\overline{Y}_{i..}$ dinotasikan dengan $\sigma^2(\overline{Y}_{i..})$

maka : $\sigma^2(\overline{Y}_{i..}) = \dfrac{E\ (RKS)}{bn}$

Karena E (RKS) dapat diduga dengan RKS, maka

$$s^2(\overline{Y}_{i..}) = \frac{RKS}{bn}$$

3).Penduga Mean Menyeluruh μ...

Penduga titik dari mean menyeluruh μ adalah $\overline{Y}$...

Penduga ini mempunyai mean dan varian :

$$E[\overline{Y}...] = E\left[\frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk} \right]$$

$$= \frac{1}{abn} E\left[\sum_i \sum_j \sum_k \left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{abn} E\left[abn\,\mu + 0 + 0 + 0 \right]$$

$$= \mu$$

$$\sigma^2 [\,\bar{Y}_{...}\,] = E\left[\,\bar{Y}_{...} - E[\,\bar{Y}_{...}\,]\right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{abn}\sum_i\sum_j\sum_k\left(\mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}\right) - \mu\right]^2$$

$$= E\left[\frac{1}{abn}\left(abn\,\mu + bn\sum_i \tau_i + a\sum_i\sum_j \beta_{j(i)} +\right.\right.$$

$$\left.\sum_i\sum_j\sum_k \varepsilon_{k(ij)} - \mu\right]^2$$

$$= \frac{1}{abn}\,E\left[\,\sum_i\sum_j\sum_k \varepsilon_{k(ij)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{abn^2}\,E\left[\varepsilon_{1(11)} + \varepsilon_{2(22)} + \ldots + \varepsilon_{n(ga)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{abn^2}\,E\left[\varepsilon^2_{1(11)} + \varepsilon^2_{2(22)} + \ldots + \varepsilon^2_{n(ga)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{abn^2}\,E\left[\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2\right]$$

$$= \frac{1}{abn^2}\left[abn\,\sigma^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{abn}$$

Varian penduga $\bar{Y}_{...}$ dinotasikan $s^2(\,\bar{Y}_{...})$

maka :

$$\sigma^2(\,\bar{Y}_{...}) = \frac{E\ (RKS)}{abn}\ ,\ \text{dengan db} = ab\ (n-1)$$

Karena E(RKS) dapat diduga dengan RKS, maka :

$$s^2(\,\bar{Y}_{...}) = \frac{RKS}{abn}\ ,\ \text{dengan db} = ab\ (n-1)$$

2.7.6. Contoh Penggunaan Rancangan Hirarki Dua Faktor

Contoh 2.1 :

Seorang insinyur mesin menyelidiki efek model mesin (faktor A) dan operator (faktor B) pada hasil dalam pabrik pembuatan botol. Tiga mesin pembuat botol yang digunakan tersebut, masing-masing mempunyai model yang berbeda. Dengan jumlah karyawan dua belas operator. Setiap shift, empat operator ditugaskan untuk satu mesin dan bekerja 6 jam. Data mengenai jumlah produksi dari setiap mesin dan operator per jam setiap hari selama seminggu (5 hari) adalah sebagai berikut :

Tabel 2.3 Hasil produksi pembuatan botol(perjam) dengan model tetap

Mesin i (Faktor A)	1				2			
Faktor B j	1	2	3	4	1 (5)	2 (6)	3 (7)	4 (8)
Hari k= 1	65	68	56	45	74	69	52	73
k= 2	58	62	65	56	81	76	56	78
k= 3	63	75	58	54	76	80	62	83
k= 4	57	64	70	48	80	78	58	75
k= 5	66	70	64	60	68	73	51	76
$\sum_k Y_{ijk}$	309	339	313	263	379	376	279	385
$\sum_j \sum_k Y_{ijk}$	1224				1419			
$\sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}$								

Mesin i (faktor A)	3			
Operator (Faktor B)	1 (9)	2 (10)	3 (11)	4 (12)
Hari k=1	69	63	81	67
k=2	83	70	72	79
k=3	74	72	73	73
k=4	78	60	76	77
k=5	80	75	70	71
$\sum_k Y_{ijk}$	384	348	372	367
$\sum_j \sum_k Y_{ijk}$	1471			
$\sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}$				

Diasumsikan bahwa efek model analisa varians adalah tetap. Berdasarkan hasil percobaaan, maka analisa varians dapat dirancang sebagai berikut :

a. Model matematiknya adalah :

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}$$

$i = 1,2,3$

$j = 1,2,3,4$

$k = 1,2,3,4,5$

Y_{ijk} = hasil pengamatan dari hari ke k yang dipengaruhi oleh mesin i dan operator j

μ = mean

τ_i = efek dari mesin i (faktor A)

$\beta_{j(i)}$ = efek dari operator j yang berada dalam mesin i

$\varepsilon_{k(ij)}$ = sesatan

b). Uji Hipotesa

1. Efek mesin i (τ_i)

   H_o : $\tau_i = 0$; H_o diterima jika tidak ada efek mesin

   H_1 : $\tau_i \mp 0$; H_1 diterima jika ada efek mesin

   Bila diambil $\alpha = 0{,}05$ dari tabel distribusi F diperoleh $F(0{,}05;\ 2;\ 48) = 2{,}808$

   Uji statistik yang sesuai :

   $$F^* = \frac{RKA}{RKS} = 35{,}9244$$

   Karena $F^* > F\ (0{,}05;\ 2;\ 48)$, maka H_o ditolak dan H_1 diterima.

   Kesimpulan : model mesin yang berbeda mempunyai efek yang sangat nyata terhadap produksi pembuatan botol.

2. Efek operator-j yang berada dalam tiap mesin-i ($\beta_{j(i)}$)

   H_o : $\beta_{j(i)} = 0$; H_o diterima jika tidak ada efek operator yang berada dalam tiap mesin.

   H_1 : $\beta_{j(i)} \mp 0$; H_1 diterima jika ada efek operator yang berada dalam tiap mesin i

Bila diambil α = 0,05 dari tabel distribusi F

diperoleh F [0,05; 9; 48] = 2,088

Uji statistik yang sesuai :

$$F^* = \frac{RK\ B(A)}{RKS} = 10,6982$$

Karena $F^* > F$ [0,05; 9; 48], maka H_o ditolak dan H_1 diterima

Kesimpulan : empat operator yanng berada dalam tiap model mesin mempunyai efek yang sangat nyata terhadap produksi pembuatan botol

c. Analisa Varians

Prosedur analisa varians dilakukan sebagai berikut :

(1). Menghitung jumlah kuadrat (JK)

$$JKT = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\left(\sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}\right)^2}{abn}$$

$$= (65^2+58^2+\ldots+60^2+74^2+\ldots+76^2+69^2+\ldots +71^2) - \frac{4114^2}{3.4.5}$$

$$= 287184 - 282083,2667$$

$$= 5100,7333$$

$$JKA = \sum_i \frac{Y_{i..}}{bn} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}\right)^2}{abn}$$

$$= \frac{1}{20}\left[1224^2+1419^2+1471^2\right] - \frac{4114^2}{60}$$

$$= 283778,9 - 282083,2667$$

$$= 1695,6333$$

$$JKB(A) = \sum_i \sum_j \frac{Y_{ij.}^2}{n} - \sum_i \frac{Y_{i..}^2}{bn}$$

$$= \frac{1}{5}\left[309^2+339^2+\ldots+367^2\right]-283778,9$$

$$= 286051,2 - 283778,9$$

$$= 2272,3$$

$$\text{JKS} = \sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk}^{2} - \sum_i\sum_j \frac{Y_{ij.}^{2}}{n}$$

$$= 287184 - 286051,2$$

$$= 1132,8$$

(3) Menentukan rata kuadrat (RK) untuk setiap komponen sumber variasi.

$$\text{RKA} = \frac{\text{JKA}}{a-1} = \frac{1695,6333}{2} = 847,81605$$

$$\text{RKB(A)} = \frac{\text{JKB(A)}}{a(b-1)} = \frac{2272,3}{9} = 252,4778$$

$$\text{RKS} = \frac{\text{JKS}}{ab(n-1)} = \frac{1132,8}{48} = 23,6$$

(4) Menyusun Tabel daftar analisa varians

Tabel 3.6 ANOVA Untuk persoalan produksi Pabrik pebuatan botol (model tetap)

Sumber Variasi	Db	JK	RK	F*
Mesin (faktor A)	2	1695,6333	847,81665	35,9244
Operator dalam mesin (faktor B dalam A)	9	2272,3	252,4778	10,6982
Sesatan	48	1132,8	23,6	
Total	59	5100,7333		

d). Analisa Efek Faktor Dengan Range Berganda Duncan

$p = 2,3$

$s\,\bar{Y}_{i..} = \sqrt{\dfrac{RKS}{bn}} = 1,0863$

$N = 20$

$n = 5$

$\bar{Y}_{1..} = 61,2$

$\bar{Y}_{2..} = 70,95$

$\bar{Y}_{3..} = 73,55$

$r_{0,05}\ (2,48) = 2,848$

$r_{0,05}\ (3,48) = 2,998$

$R_2 = r_{0,05}\ (2,48)\ s\,\bar{Y}_{i..} = 3,0938$

$R_3 = r_{0,05}\ (3,48)\ s\,\bar{Y}_{i..} = 3,2567$

3 vs 1 = 73,55 - 61,2 = 12,35 > R_3

3 vs 2 = 73,55 - 70,45 = 2,6 < R_2

2 vs 1 = 70,95 - 61,2 = 9,75 > R_3

Kesimpulan :

*). Produktifitas rata-rata mesin 3 lebih tinggi dari mesin 1

*). Antara mesin 3 dan mesin 2 tidak ada perbedaan yang nyata.

*). Produktifitas rata-rata mesin 2 lebih tinggi dari mesin 1.