BAB II

TEORI PENUNJANG

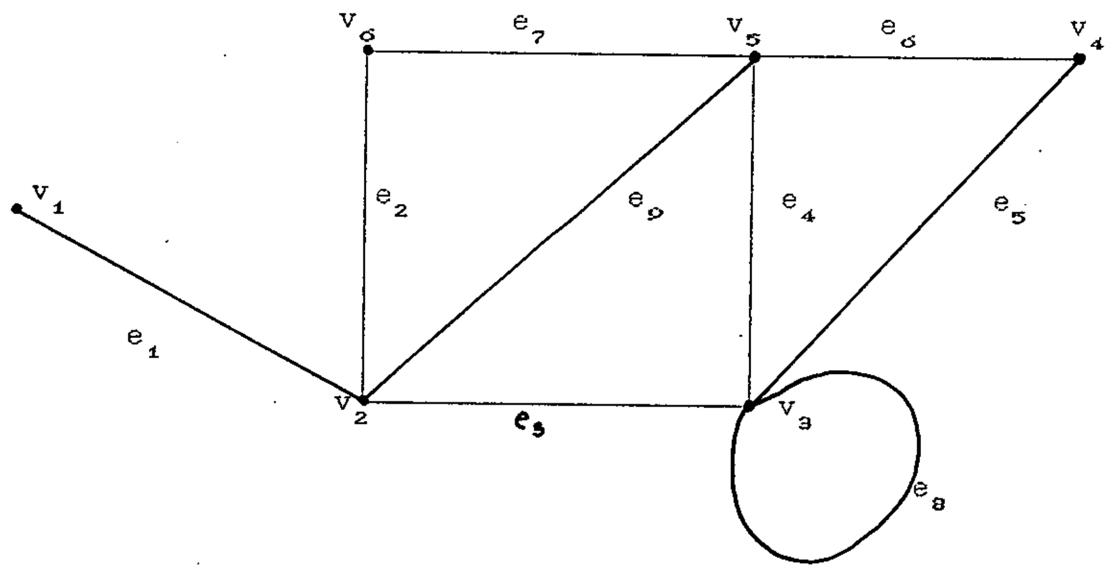
2.1. GRAPH

Definisi 2.1.1

Suatu *Graph* G=(V,E) adalah suatu himpunan terdiri dari titik-titik V=V(G) tidak kosong yang hingga dan garis-garis E=E(G).

Contoh

Gambar berikut ini adalah suatu graph G=(V,E) dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$



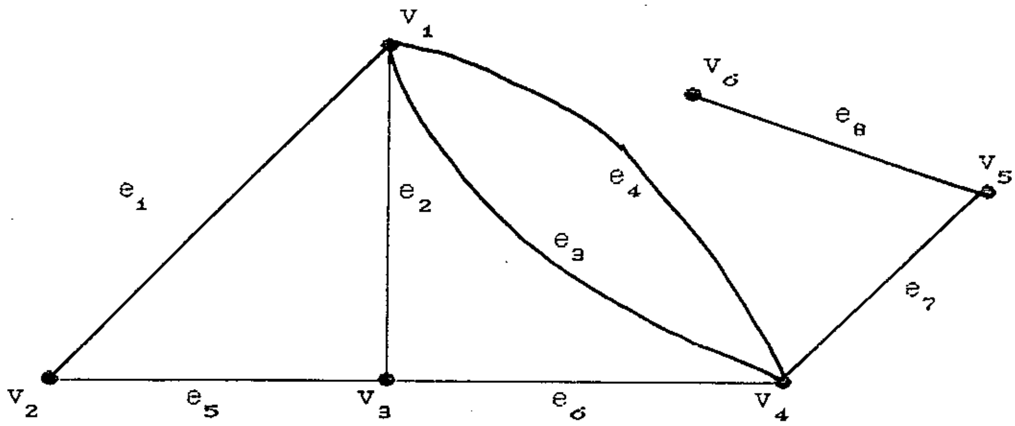
Gambar 2.1

Definisi 2.1.2

Garis Graph (garis) *Paralel* adalah garis graph (lebih dari satu) yang berasosiasi dengan sepasang titik yang diberikan.

Contoh

Pada gambar 2.2 garis graph e_3 dan e_4 adalah garis paralel.



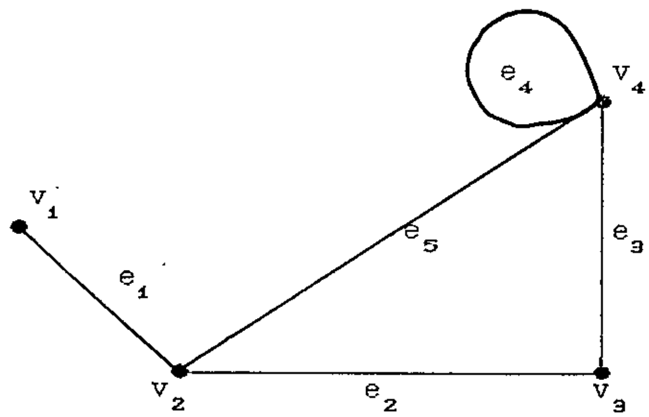
Gambar 2.2

Definisi 2.1.3

Loop adalah sebuah garis graph yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama.

Contoh

Pada gambar 2.3 e_4 merupakan loop.



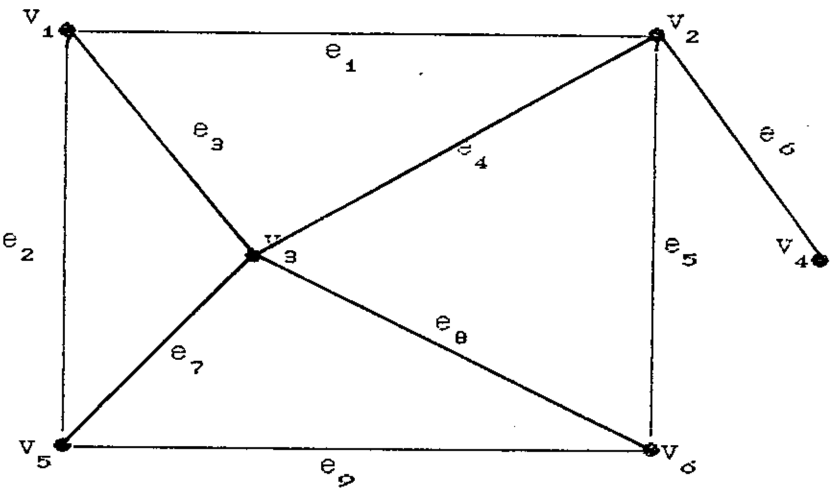
Gambar 2.3

Definisi 2.1.4

Suatu *(p,q) graph* adalah suatu graph yang mempunyai p titik dan q garis. Dan (1,0) graph adalah merupakan trivial.

Contoh

Pada gambar 2.4 adalah suatu contoh (6,9) graph.

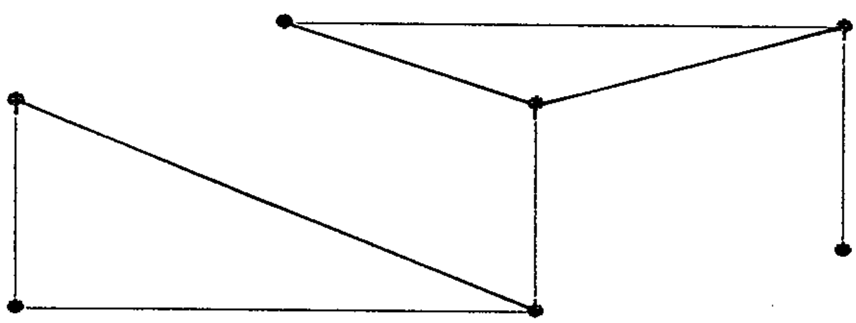


Gambar 2.4

Definisi 2.1.5

Graph sederhana (**simple graph**) adalah suatu graph G=(V,E) yang tidak mengandung garis sejajar atau loop.

Contoh:



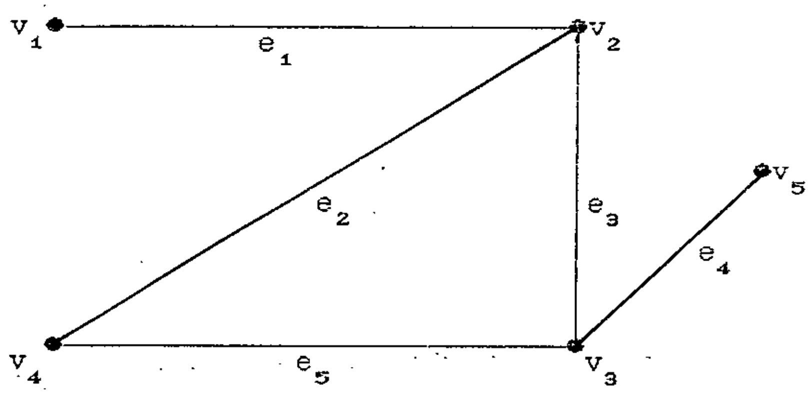
Gambar 2.5

Definisi 2.1.6

Dua titik dikatakan *adjacent* jika mereka merupakan titik akhir dari garis graph yang sama.

Contoh

Pada gambar 2.6 v_1 dan v_2 adalah adjacent , sebaliknya v_1 dan v_3 bukan adjacent.



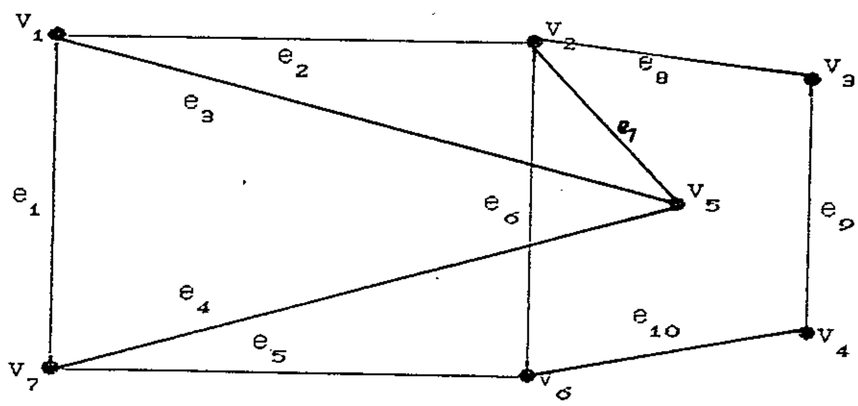
Gambar 2.6

Definisi 2.1.7

Jika sebuah titik v_i adalah titik akhir dari garis graph e_j, maka v_i dan e_j disebut *Incident* satu dengan yang lainnya.

Contoh

Pada gambar 2.7. garis graph e_9,e_{10} Incident dengan titik v_4.



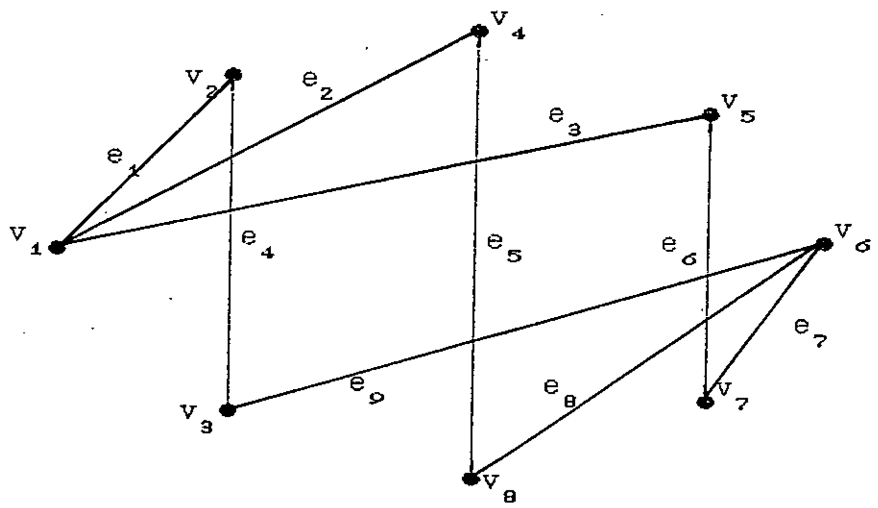
Gambar 2.7

Definisi 2.1.8

Dua garis graph non paralel dikatakan adjacent jika mereka incident dengan sebuah titik yang sama.

Contoh

Pada gambar 2.8, e_2 adjacent dengan e_1 dan e_5.



Gambar 2.8

Definisi 2.1.9

Banyaknya garis graph yang incident pada sebuah titik v_i, dengan loop dihitung dua, dikatakan *derajat* (degree) ditulis $d(v_i)$ dari titik v_i.

Contoh

Pada gambar 2.6 ,$d(v_2)=d(v_3)=3$, $d(v_4)=2$, $d(v_1)=d(v_5)=1$

Dapat diperiksa dengan mudah bahwa graph pada gambar 2.5 memiliki dua titik berderajat 1, satu titik berderajat 2, dua titik berderajat 3. Apabila dijumlahkan diperoleh $d(v_1)+d(v_2)+d(v_3)+d(v_4)+d(v_5)= 10 = 2q$ (banyaknya garis dari garis graph G).

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk suatu (p,q)-graph berlaku sifat berikut:

$$\sum_{i=1}^{p} d\ v_i = 2q \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1.)$$

Akibat langsung sifat tersebut adalah teorema dibawah ini.

Teorema 2.1.1

Banyaknya titik dengan derajat ganjil pada suatu graph G=(V,E) adalah genap.

Bukti :

Jika suatu titik dengan derajat ganjil dan derajat genap dipisahkan, ruas kiri persamaan (2.1) dapat dituliskan sebagai jumlahan dari dua jumlahnya, yang masing-masing memuat titik-titik dengan derajat ganjil dan genap.

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = \sum_{genap} d(v_j) + \sum_{ganjil} d(v_k) \qquad \ldots . \quad (2.2)$$

$$\sum_{ganjil} d(v_k) = \sum d(v_i) - \sum_{genap} d(v_j)$$

karena selisih dua bilangan genap adalah genap, berarti ruas kiri persamaan terakhir ini merupakan bilangan genap. Selanjutnya karena setiap $d(v_k)$ adalah bilangan ganjil, maka haruslah banyaknya titik (banyaknya bilangan yang dijumlahkan) itu genap agar diperoleh jumlah yang hasilnya genap.

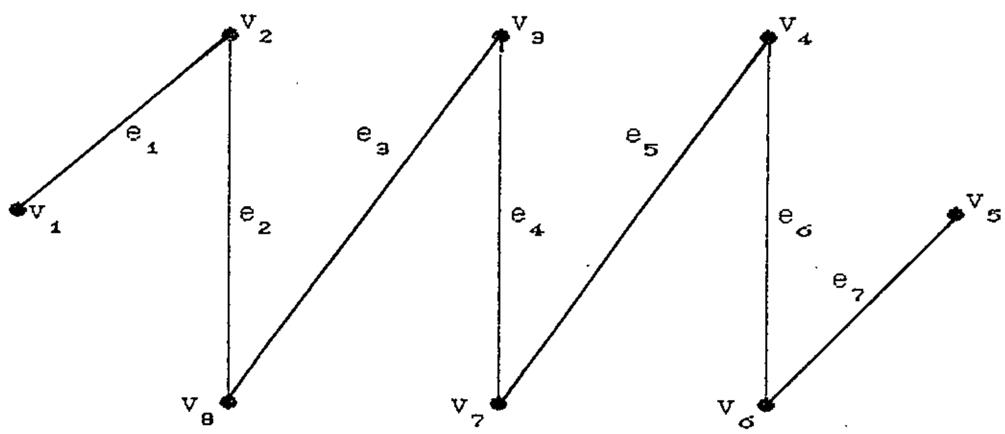
Contoh

Graph pada gambar 2.6. mempunyai 4 titik dengan masing-masing berderajat ganjil.

Definisi 2.1.10

Titik akhir (end vertex) adalah suatu titik dengan derajat satu.

Contoh: Pada gambar 2.9 , v_1 dan v_5 adalah titik akhir.



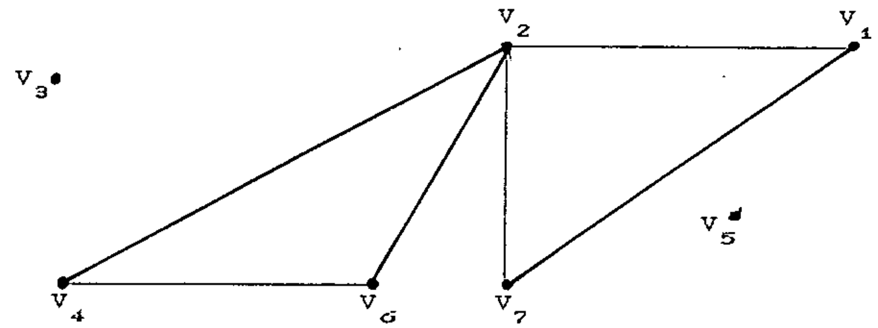
Gambar 2.9

Definisi 2.1.11

Titik terisolasi (isolated vertex) adalah titik yang tidak mempunyai incident garis graph

Contoh

Pada gambar 2.10. titik v_3 dan v_5 adalah titik terisolasi.



Gambar 2.10.

Definisi 2.1.12

Suatu graph dikatakan *terhubung* (connected), jika untuk setiap dua titik pada graph tersebut dihubungkan dengan suatu path.

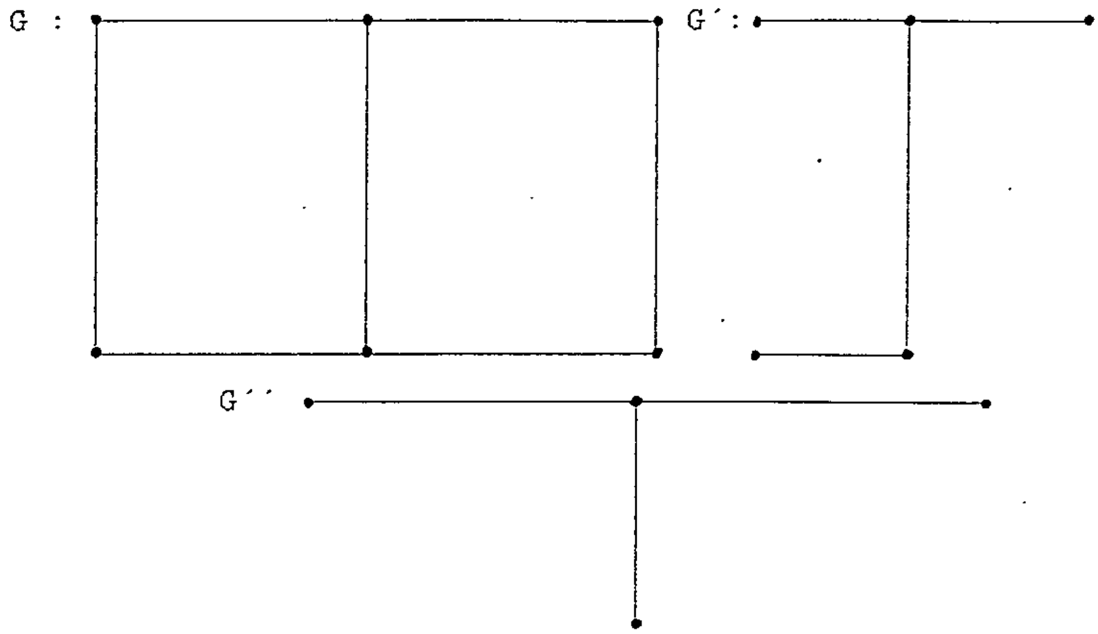
Dalam hal lain disebut graph *tak terhubung* (disconnected graph).

Definisi 2.1.13

Graph $G'=(V',E')$ disebut *subgraph* dari graph G jika semua titik dan garis dari G', juga terletak di G dan setiap garis dari G'mempunyai titik ujung yang sama dengan di G; keadaan ini dilambangkan dengan $G' \subseteq G$.

Apabila $S \subset V(G)$ maka Induced Subgraph $\langle S \rangle$ adalah suatu graph dengan himpunan titiknya S dan yang merupakan maximal subgraph dari G. Jadi 2 titik dalam $\langle S \rangle$ bersisian jika dan hanya jika titik-titiknya itu bersisian dalam G.

Contoh



Gambar 2.11.

G´ adalah subgraph dari G.

G´´ adalah Induced subgraph dari <S>.

Definisi 2.1.14

Suatu *walk* didalam G adalah deretan yang terdiri dari titik-titik dan garis secara bergantian yang hingga diawali dan diakhiri dengan titik, berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_{n-1} e_{n-1}, v_n$. Dimana setiap garis incident dengan titik v_i dan v_{i+1}

Jika titik awal dan titik akhir sama disebut tertutup.
Jika tidak demikian disebut terbuka.

Definisi 2.1.15

Apabila semua garis pada suatu walk berlainan disebut *trail*.

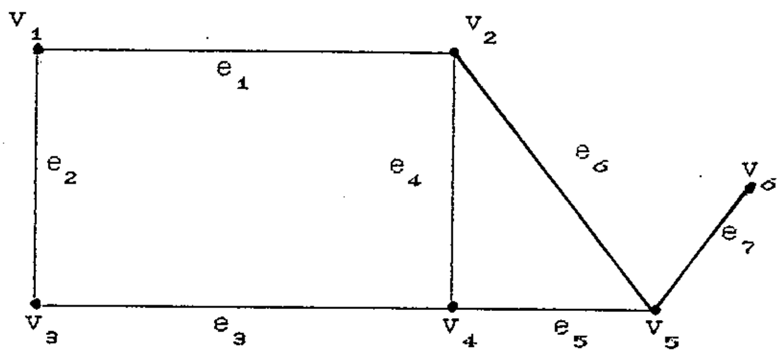
Pada suatu trail titik-titik boleh dilalui lebih dari satu kali.

Definisi 2.1.16

Suatu walk dengan garis graph dan titik tidak boleh diulang dinamakan *Path,* terkecuali Path tertutup yang disebut *cycle*.

Jadi path pasti suatu trail tetapi sebaliknya tidak. Cycle yang mempunyai *n* titik dinotasikan dengan C , cycle dengan panjang tiga disebut segitiga (triangle).

Contoh



Gambar 2.12.

Deretan titik dan garis $(v_3,e_3,v_4,e_4,v_2,e_4,v_4,e_5.v_5,e_7,v_6)$ adalah suatu walk tetapi bukan trail, karena e_4 dipakai dua kali. Deretan tersebut dapat disingkat dengan v_3,v_4,v_2,v_4,v_5,v_6. Deretan garis e_2,e_3,e_4,e_6,e_7 adalah suatu trail. Deretan titik v_1,v_2,v_5,v_4,v_3 adalah suatu path yang menghubungkan titik $v_1$dan v_3, panjangnya = 4. Deretan titik v_3,v_4,v_4,v_2,v_1,v_3 merupakan suatu cycle yang panjangnya = 5 dan deretan titik v_2,v_3,v_5,v_2 adalah sebuah segitiga.

Definisi.2.1.17

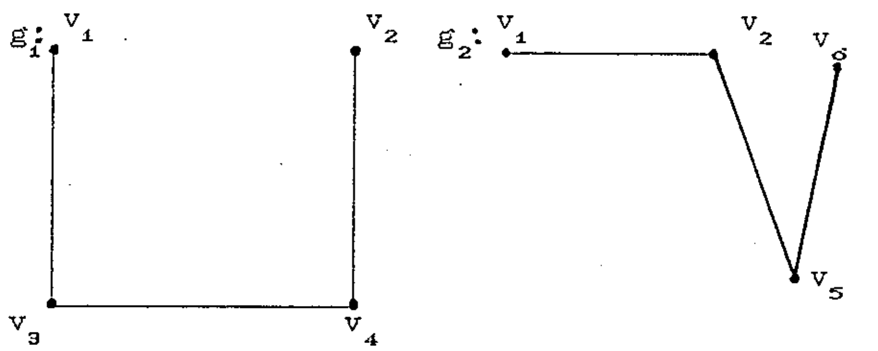
Komponen (Componen) adalah setiap subgraph yang terhubung.

Definisi.2.1.18

Dua subgraph g_1 dan g_2 dari graph G disebut *garis graph terpisah* (edge disjoint) jika g_1 dan g_2 tidak mempunyai garis graph bersama-sama.

Contoh

Dari gambar 2.12. diambil:



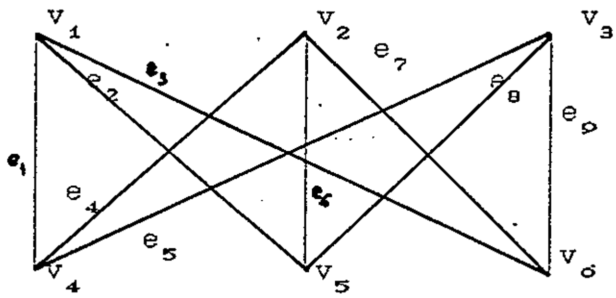
Gambar 2.13.

Definisi.2.1.19

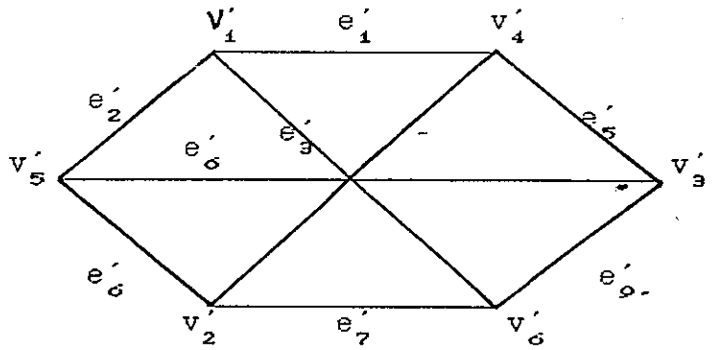
Dua graph G=(V,E) dan G′=(V′,E′) disebut *Isomorfis* jika ada korespondensi satu-satu antara elemen dari himpunan titik-titiknya dan korespondensi satu-satu antara elemen dari himpunan garis-garisnya sedemikian sehingga korespondensi titik (vertex) incident dengan korespondensi garis - graph.

Contoh

G=(V,E)



G′=(V′,E′)



Gambar 2.14.

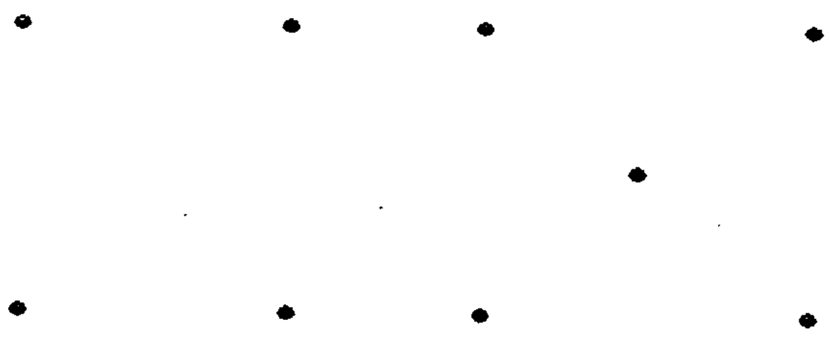
2.2. Jenis-jenis graph.

Graph dapat diklasifikasikan dalam beberapa jenis, tergantung bagaimana cara memandang kekhasan strukturnya. Berikut ini disajikan deskripsi sejumlah graph khusus yang sering dijumpai dalam teori graph.

Definisi.2.2.1

Graph nol **(null graph)** adalah suatu graph dengan himpunan garis graph E=E(G) adalah kosong.

Graph nol dengan p titik dilambangkan dengan N_p. Misalnya N_4 dan N_5 disajikan pada Gambar 2.15.



N_4 N_5

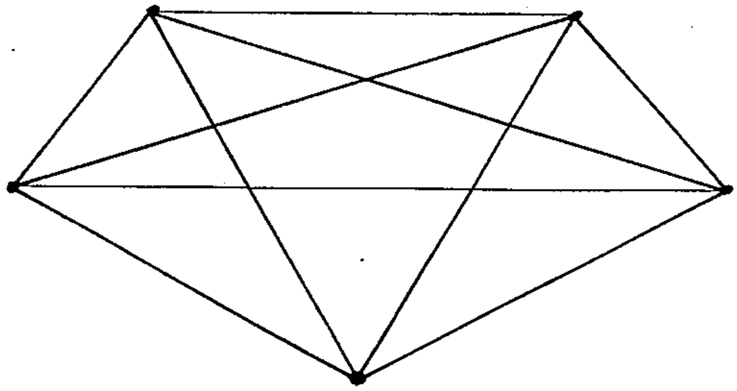
Gambar 2.15.

Definisi.2.2.2

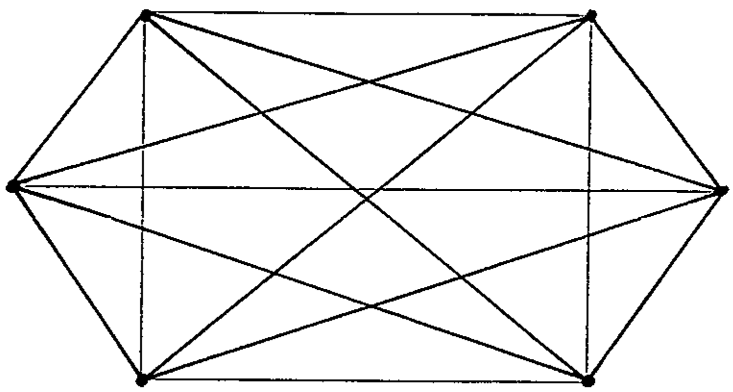
Graph lengkap (complete graph) adalah suatu graph dimana setiap titik bersisian dengan setiap titik lainnya.

Graph lengkap dengan p titik dilambangkan dengan K_p. Misalnya K_5dan K_6 disajikan pada Gambar 2.16. Kedua - graph tersebut masing-masing mempunyai sepuluh dan lima belas garis. Pada umumnya dapat dilihat dengan mudah dari contoh-contoh bahwa K_p mempunyai $\binom{p}{2}$ garis.

Contoh:



K_5



K_6

Gambar 2.16.

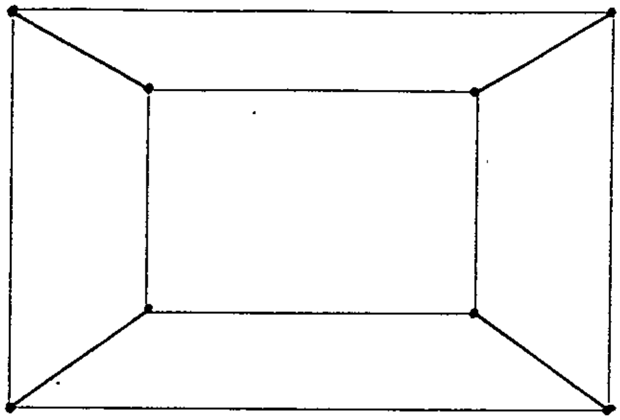
Definisi.2.2.3

Graph *regular* adalah graph yang setiap titiknya berderajat sama.

Graph G disebut graph regular berderajat r bila setiap titiknya berderajat r.

Misalnya graph pada Gambar 2.17 merupakan graph regular berderajat 3. Dengan jelas terlihat bahwa setiap graph kosong adalah graph regular berderajat nol, dan graph - lengkap adalah graph regular berderajat p-1.

Contoh

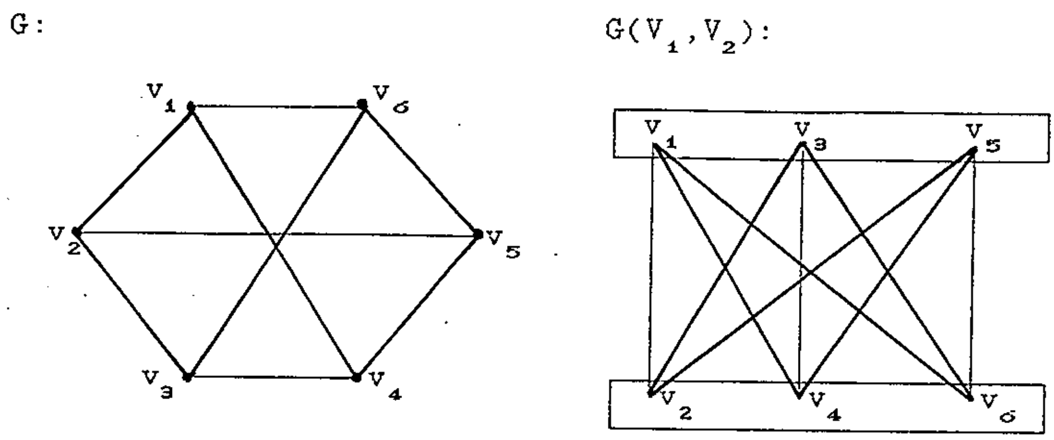


Gambar 2.17.

Definisi.2.2.4

Suatu graph G=(V,E) disebut *graph Bipartisi* bila himpunan titik-titik V disekat dalam 2 himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap garis menghubungkan suatu titik dari V_1 dengan suatu titik dari V_2. Graph ini dilambangkan dengan $G(V_1,V_2)$.

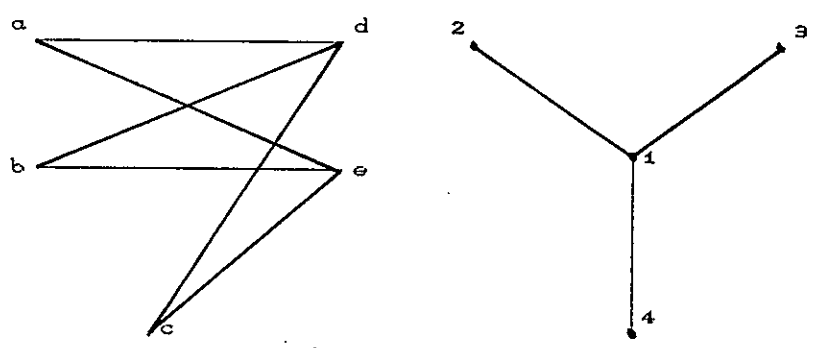
Misalnya graph pada Gambar 2.18. adalah graph bipartisi dengan himpunan titik-titinya $V=(v_1,v_3,v_5)$ dan $V=(v_2,v_4,v_6)$.



Gambar 2.18.

Jika ada garis yang menghubungkan setiap titik ke setiap titik lainnya, maka disebut sebagai graph bipartisi lengkap dilambangkan dengan $K_{m,n}$; sedangkan m dan n masing-masing ialah banyaknya titik dari V_1 dan V_2 Khususnya $K_{1,n}$ disebut bintang (*star*).

Contoh



(a) (b)

Gambar 2.19.

Gambar 2.19 (a) ——————> $K_{3,2}$ mempunyai 6 garis.

Gambar 2.19.(b) ——————> $K_{1,3}$ disebut star.

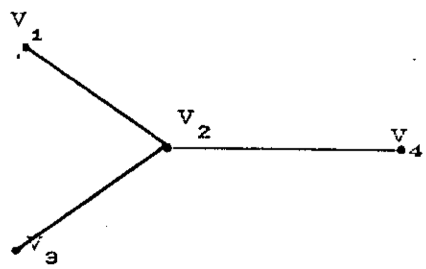
Definisi.2.2.5

Tree adalah suatu graph terhubung yang tidak - mengandung cycle.

Beberapa sifat dari tree.

1. Setiap titik dihubungkan dengan path tunggal.
2. $p = q + 1$ dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya garis.

Contoh

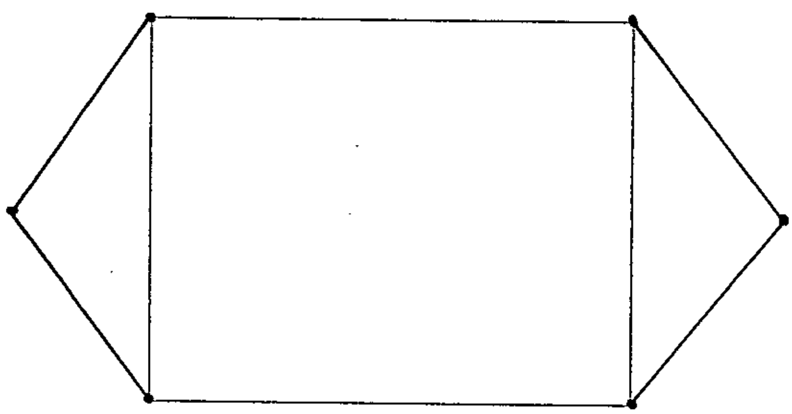


Gambar 2.20.

Definisi.2.2.6

Suatu graph terhubung disebut *Graph Euler* **(Eulerian Graph)** jika ada walk tertutup yang melalui semua titik pada setiap garis yang berbeda.

Contoh

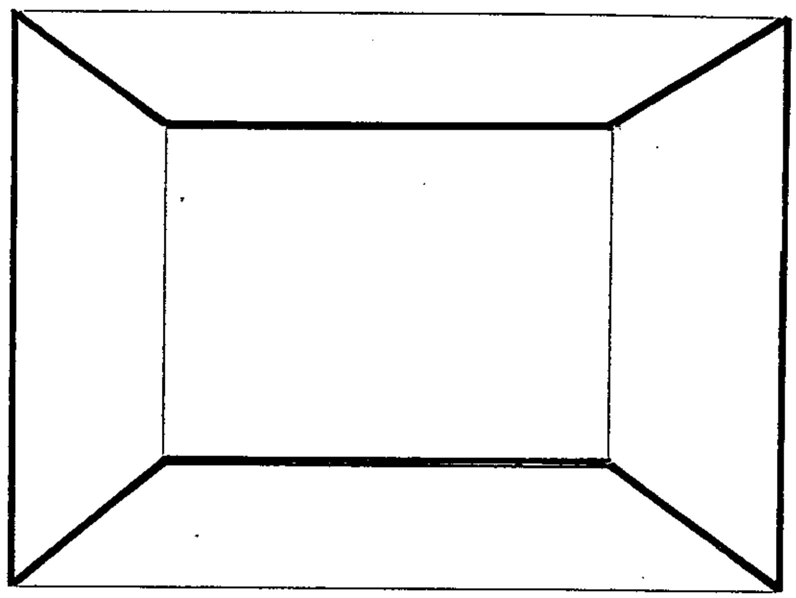


Gambar 2.21.

Definisi.2.2.7

Graph terhubung disebut *Graph hamilton* kalau ada cycle yang memuat semua titik dari G.

Sebagai ilustrasi misalnya graph pada Gambar 2.22. merupakan graph hamilton. Cyclenya digambarkan dengan garis yang tebal.



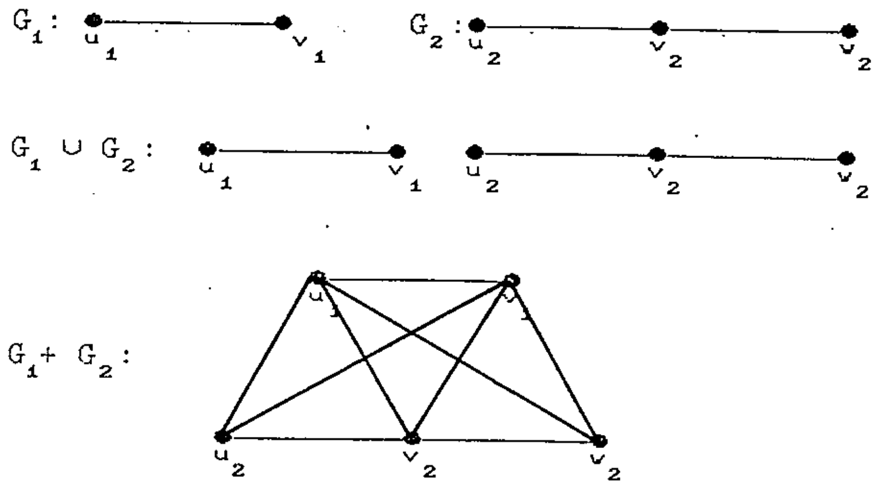
Gambar 2.22.

2.3. **Operasi-operasi pada graph.**

Dua graph G_1 dan G_2 mempunyai himpunan titik yang terpisah V_1 dan V_2 serta himpunan garis E_1 dan E_2.

1. *Union* $G=G_1\cup G_2$, terdiri dari $V=V_1\cup V_2$ dan $E=E_1\cup E_2$.
2. *Join* $G=G_1+G_2$, terdiri dari $G_1\cup G_2$ dan seluruh garis yang menghubungkan V_1 dan V_2.

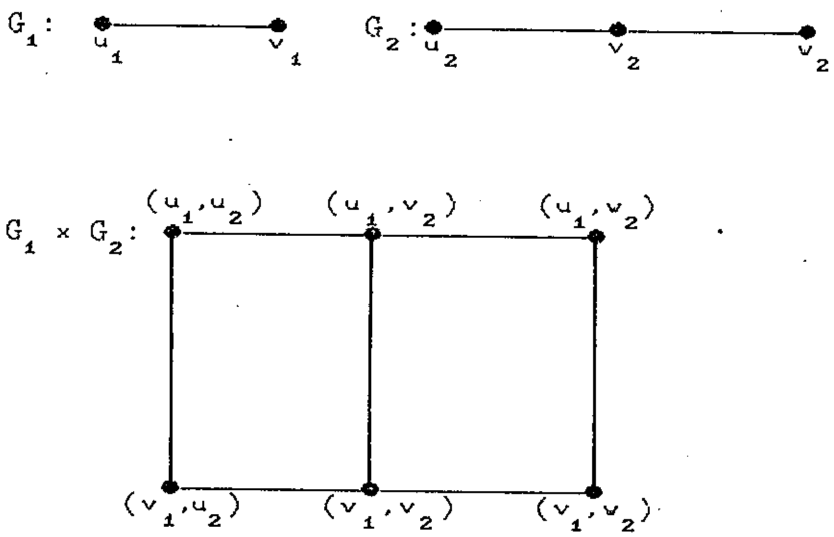
Contoh:



Gambar 2.23

3. *Product* $G=G_1xG_2$ terdiri dari pasangan titik-titik $u=(u_1,u_2)$ dan $v=(v_1,v_2)$ dalam $V=V_1xV_2$. maka u dan v adjacent dalam $G_1x\ G_2$ jika $\{u_1 =v_1$ dan u_2 adjacent $v_2\}$ atau $\{u_2= v_2$dan u_1 adjacent $v_1\}$

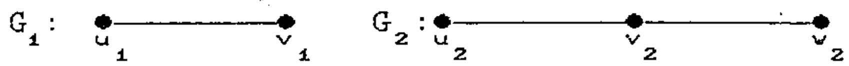
Contoh:

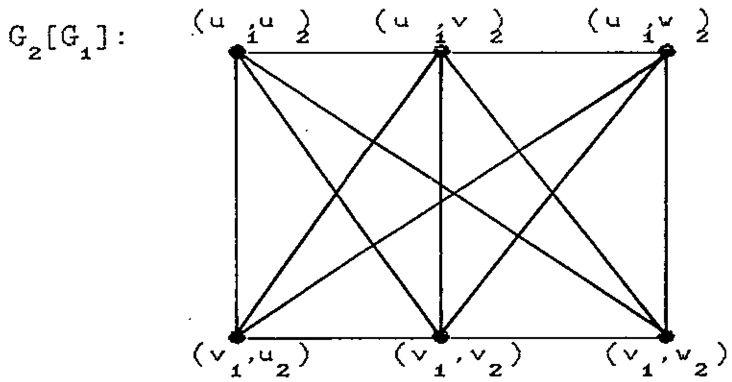


Gambar 2.24.

4. *Komposisi* $G=G_1[G_2]$,terdiri dari $V=V_1xV_2$ sebagai himpunan titik-titiknya dan $u=(u_1,u_2)$ adjacent dengan $v=(v_1,v_2)$ bilamana [$u_1$adj.v_1] atau [$u_1=v_1$dan $u_2$adjacent v_2].

Contoh





Gambar 2.25.