BAB II

TEORI DASAR

Pada Bab II, akan dibahas teori yang mendasari dalam pembahasan matrix circulant. Untuk sub bab pertama dibahas tentang matrix secara umum. Kemudian dilanjutkan dengan operasi block. Matrix permutasi cyclic dan matrix Fourier merupakan pembahasan selanjutnya, dan sub bab terakhir dari bab II dibahas tentang kenormalan suatu matrix.

2.1. MATRIX

Definisi 2.1.1.

Matrix adalah himpunan skalar (bilangan riil atau komplek) yang disusun/dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matrix. Penulisan matrix secara umum $A = (a_{jk})$, artinya suatu matrix A yang elemen-elemennya a_{jk} dimana index j menyatakan baris ke-j dan index k menyatakan kolom ke-k dari elemen tersebut.

Suatu matrik $A = (a_{jk})$, $j = 1,2, \ldots, m$ dan $k = 1,2,\ldots,n$; yang mana berarti bahwa banyaknya baris = m serta banyaknya kolom = n. Dapat juga dituliskan matrik $A_{(m \times n)} = (a_{jk})$, m x n disebut ukuran dari matrik.

Definisi 2.1.2.

Matrik bujur sangkar adalah suatu matrix dengan banyaknya baris = banyaknya kolom $(m = n)$.

Untuk menyatakan ukuran bujur sangkar cukup menyebut ordo n atau ordo m. Dengan demikian bila dikatakan matrik bujur sangkar berordo n, yang dimaksud adalah matrix bujur sangkar berukuran $n \times n$.

Definisi 2.1.3.

Matrix Satuan (Identitas) adalah suatu matrix bujur sangkar $I = (u_{jk}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = k \\ 0, & \text{untuk } j \neq k \end{cases}$.

Definisi 2.1.4.

Matrix Diagonal adalah matrix bujur sangkar

$$D = (d_{jk}) = \begin{cases} d_{jk}, & \text{untuk } j = k \\ 0, & \text{untuk } j \neq k \end{cases}.$$

Definisi 2.1.5

Misalkan matrix $A = (a_{jk})$ berukuran $m \times n$, maka transpose dari matrix A adalah $A^t = (a_{jk})^t = (a_{kj})$, berukuran $n \times m$.

Jika matrix $A = (a_{jk})$ adalah suatu matrix komplex, maka transpose conjugate dari A adalah $A^* = (\bar{a}_{jk})^t = (\bar{a}_{kj})$.

Operasi Pada Matrix

a. Penjumlahan matrix (berlaku untuk matrix-matrix yang berukuran sama).

Jika $A = (a_{jk})$ dan $B = (b_{jk})$, dua matrix berukuran sama, maka $A + B = (a_{jk} + b_{jk}) = (c_{jk}) = C$.

Pemjumlahan matrix-matrix yang berukuran sama berlaku :

i. $A + B = B + A$ (komutatip)

ii. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (assosiatip)

b. Perkalian skalar terhadap matrix.

Jika λ suatu skalar (bilangan) dan $A = (a_{jk})$ maka matrix $\lambda A = (\lambda a_{jk})$.

Perkalian skalar terhadap matrix berlaku :

i. $\lambda A = A \lambda$ (komutatip)

ii. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$ (Distributip)

$= A \lambda + B \lambda$

$= (A + B) \lambda$

c. Perkalian pada matrix.

Matrix $A = (a_{jk})$ berukuran $p \times q$ dan matrix $B = (b_{jk})$ berukuran $q \times r$.

Syarat perkalian dua buah matrix adalah jumlah banyaknya kolom matrix pertama = jumlah banyaknya baris matrix kedua. Sehingga perkalian antara matrix A dan B adalah matrix $C = (c_{jk})$ yang berukuran $p \times r$, dimana

$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \ldots + a_{jq}b_{qk}$, untuk $j=1,2,\ldots,p$ dan $k=1,2,\ldots,r$.

Jika A,B dan C adalah matrix-matrix yang memenuhi syarat-syarat perkalian matrix, maka berlaku :

i. $A (B + C) = AB + AC$ (distributip)

$(B + C) A = BA + CA$

ii. $A (B C) = (A B) C$ (assosiatip)

iii. $AB \neq BA$, umumnya tidak komutatip.

Determinan dan invers suatu matrix.

Definisi 2.1.6.

Determinan adalah tabel bilangan yang disusun menurut baris dan kolom yang berbetnuk bujur sangkar serta mempunyai harga numerik.

Definisi 2.1.7.

Determinan minor M_{jk} dari elemen a_{jk} suatu matrix $A = (a_{jk})$ adalah det(A) dengan menghilangkan baris ke-j dan kolom ke-k.

Definisi 2.1.8.

Kofaktor dari a_{jk} ditulis A_{jk} adalah suatu skalar yagn mempunyai nilai $(-1)^{j+k}\ |M_{jk}|$.

Definisi 2.1.9.

$$\text{Nilai determinan} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\ a_{jk}\ |M_{jk}|.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\ a_{jk}\ A_{jk}\ ,\ k = \text{tetap}$$

$$\text{atau} \quad = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\ a_{jk}\ |M_{jk}|.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\ a_{jk}\ A_{jk}\ ,\ j = \text{tetap}$$

Definis 2.1.10.

Jika elemen-elemen dari suatu baris/kolom dikalikan dengan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen baris/ kolom lain, jumlahnya akan nol atau

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\ a_{jk}\ A_{ik} = |\ A\ |\ ,\ \text{bila}\ \ j = i$$

$$= 0 \quad ,\ \text{bila}\ \ j \neq i$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} A_{ji} = |A|, \text{ bila } k = i$$
$$= 0 \quad, \text{ bila } k \neq i$$

Definisi 2.1.11.

Matrix adjoin adalah matrix transpose dari matrix (A_{jk}) dengan A_{jk} adalah kofaktor dari elemen a_{jk}.

$$\text{adj. }(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.12.

Suatu matrix bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matrix B sehingga $AB = BA = I_n$, matrix B disebut invers dari matrix A, ditulis A^{-1}, merupakan matrix bujur sangkar berordo n.

Theorema 2.1.1.

Jika ada matrix bujur sangkar A berorodo n dengan $\det(A) \neq 0$, maka $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}.A}{\det(A)}$.

Bukti :

Misal $A = (a_{jk})$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$\text{adj.}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$A(\text{adj}.A) = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n} & \dots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\dots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\dots+a_{2n}A_{1n} & \dots & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\dots+a_{2n}A_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\dots+a_{nn}A_{1n} & \dots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\dots+a_{nn}A_{nn} \end{bmatrix}$$

Menurut definisi 2.1.10 didapat

$$A(\text{adj}.A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \,.\, I$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$(\text{adj}.A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$$

$$= |A| \,.\, I$$

Sehingga didapatkan

$$(\text{adj}.A)\ A = A\ (\text{adj}.A) = |A| \,.\, I$$

$$\frac{(\text{adj.}A)\,A}{|A|} = A\,\frac{(\text{adj.}A)}{|A|} = I$$

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$$

Jadi

$$A^{-1} = \frac{\text{adj.}A}{|A|}$$

2.2. OPERASI BLOCK

Suatu matrix pada kondisi tertentu dipisahkan menjadi matrix yang berukuran lebih kecil yang ditandai dengan garis putus-putus.

Contoh 2.2.1.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right], \text{ dimana}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \end{bmatrix}$$

Sehingga A dapat dituliskan sebagai,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Bentuk umum pemisahan matrix adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & & n_l \end{array} & \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nl} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_h \end{array} \end{array}$$

Dimana A_{jk} berukuran $m_j \times n_k$, untuk $j = 1,2,\dots h$; $k = 1,2,\dots,l$; m_j banyaknya baris ke-j ; n_k banyaknya kolom ke-k.

Definisi 2.2.1.

Block matrix adalah suatu matrix yang diperoleh dari pemisahan matrix, dengan demikian ukuran block matrix lebih kecil dari ukuran matrix sebelumnya.

Contoh 2.2.2.

Dari contoh 2.2.1 , A_{11}, A_{12}, A_{21} dan A_{22} merupakan block-block matrix.

Apabila matrix bujur sangkar A berordo n, dimana $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, $n_r \geq 1$, maka pemisahan matrix A menghasilkan block-block matrix A_{jk} berukuran $n_j \times n_k$, pemisahannya symetris, dan diagonal matrix A_{jj} merupakan matrix bukur sangkar berordo n_j.

Contoh 2.2.3.

$$\left[\begin{array}{cc|c|cccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} n = 6 \\ n_1 = 2 \\ n_2 = 1 \\ n_3 = 3 \end{array}$$

Pemisahan symetris dari matrix berordo 6.

Matrix bujur sangkar A berordo mn yang disusun dari block-block matrix berordo n, dikatakan sebagai (m,n) matrix.

Contoh 2.2.3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

Matrix bujur sangkar yang merupakan (2,3) matrix.

Definisi 2.2.2.

Kronecker product atau direct product dari dua matrix $A = (a_{lm})$ berukuran $L \times M$ dan $B = (b_{pq})$ berukuran $P \times Q$ adalah suatu matrix yang berukuran $J \times K$, dimana $J = L\,P$ dan $K = M\,Q$, dengan simbol $\otimes$.

$C = A \otimes B$

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1M}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2M}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{L1}B & a_{L2}B & \dots & a_{LM}B \end{bmatrix}$$

Dimana elemen a_{lm} berdiri sendiri sebagai block matrix berukuran $P \times Q$

$$a_{lm}B = \begin{bmatrix} a_{lm}b_{11} & a_{lm}b_{12} & \dots & a_{lm}b_{1q} \\ a_{lm}b_{21} & a_{lm}b_{22} & \dots & a_{lm}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{lm}b_{p1} & a_{lm}b_{p2} & \dots & a_{lm}b_{pq} \end{bmatrix}$$

Hasil elemen-elemen C berasal dari elemen-elemen A dan B, secara umum notasi $C = (c_{lp,mq})$, yang mana baris C ditunjukkan index lp dan kolom ditunjukkan index mq, sedemikian sehingga $c_{lp,mq} = a_{lm}\, b_{pq}$.

Baris-baris dan kolom C dapat ditulis dengan j dan k $(1 \le j \le J,\ 1 \le k \le K)$, sehingga $C = (c_{j,k}) = (c_{lp,mq})$

Contoh 2.2.4.

Misalkan $A = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1) & (2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \end{array}$ berukuran 3 x 2, dan

$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \end{array}$ berukuran 2 x 3, maka

direct product dari marix A dan B adalah matrix C yang berukuran 6 x 6.

$C = A \otimes B$

$$= \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \\ c\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} & d\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \\ e\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} & f\begin{bmatrix} r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ (11) \\ (12) \\ (21) \\ (22) \\ (31) \\ (32) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (11) & (12) & (13) & (21) & (22) & (23) \end{array} \\ \begin{bmatrix} ar & as & at & br & bs & bt \\ ax & ay & az & bx & by & bz \\ cr & cs & ct & dr & ds & dt \\ cx & cy & cz & dx & dy & dz \\ er & es & et & fr & fs & ft \\ ex & ey & ez & fx & fy & fz \end{bmatrix} \end{array}$$

Elemen-elemen C dari contoh 2.2.4, salah satunya dapat disajikan sebagai $(C)_{31,22} = fs = (A)_{32}\ (B)_{12}$.

Baris-baris dan kolom-kolom matrix direct product indexnya berbeda dengan index sebelumnya. Dari contoh 2.2.4 baris ketiga matrix C diberi index baris (21), untuk kolom ketiga diberi index (13). Elemen-elemen baris (21) matrix-matrix C dihasilkan dari perkalian elemen-elemen baris kedua matrix A dengan elemen-elemen baris pertama matrix B. Dengan cara yang sama, elemen-elemen kolom (13) matrix C dihasilkan dari perkalian elemen-elemen kolom pertama matrix A dengan elemen-elemen kolom ketiga matrix B.

Secara umum, baris-baris dan kolom-kolom metrix direct product ditunjukkan sebagai berikut :

$j = (l-1)\ P + p$, $k = (m-1)\ Q + q$, sehingga,

$(C)_{lp,mq} = (C)_{jk} = (C)_{(l-1)P+p,(m-1)Q+q}$

Dari contoh 2.2.4, elemen $(C)_{31,22}$ didapat bahwa l=3, p=1, m=q=2, sehingga $j = (3-1)2+1 = 5$ dan $k = (2-1)3+2 = 5$. Jadi, fs diindikasikan sebagai elemen (5,5) dari matrix direct product C.

Beberapa sifat kronector product :

i. $(\alpha A \otimes B) = (A \otimes \alpha B) = \alpha(A \otimes B)$, dimana α : skalar

ii. $(A + B) \otimes C = (A \otimes B) + (B \otimes C)$

iii. $(A \times B)\ (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

Misalkan mastrix $A = (a_{jk})$ berukuran L x M dan matrix $B = (b_{jk})$ berukuran P x Q, matrix $C = (c_{jk})$ berukuran M x N dan matrix $D = (d_{jk})$ berukuran Q x R maka perkalian dua matrix AC dan BD dapat dicari dan direct product $A \otimes B$ dan $C \otimes D$ adalah :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1M}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2M}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{L1}B & a_{L2}B & \cdots & a_{LM}B \end{bmatrix}$$

$$C \otimes D = \begin{bmatrix} c_{11}D & a_{12}D & \cdots & a_{1N}D \\ c_{21}D & a_{22}D & \cdots & a_{2N}D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{M1}D & a_{M2}D & \cdots & a_{MN}D \end{bmatrix}$$

Sehingga $(A \otimes B)(C \otimes D)$ dapat ditentukan.

Elemen-elemen ke-jk dari $(A\otimes B)(C\otimes D)$ adalah :

$$((A \otimes B)(C \otimes D))_{jk} = a_{j1}c_{1k}BD+a_{j2}c_{2k}BD+\ldots+a_{JM}c_{MK}BD$$

$$= (AC)_{jk}BD$$

Secara lengkap matrixnya dituliskan sebagai berikut :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{bmatrix} (AC)_{11}BD & (AC)_{12}BD & \cdots & (AC)_{1M}BD \\ (AC)_{21}BD & (AC)_{22}BD & \cdots & (AC)_{2M}BD \\ \vdots & \vdots & & \\ (AC)_{L1}BD & (AC)_{L2}BD & \cdots & (AC)_{LM}BD \end{bmatrix}$$

$$= (AC) \otimes (BD)$$

Dari definisi 2.2.2, $(AC) \otimes (BD)$ berukuran $LP \times NR$

2.3. MATRIX PERMUTASI CYCLIC

Misalkan N adalah himpunan semua bilangan asli dari 1 sampai dengan n. Himpunan semua permutasi pada n memiliki korespondensi satu-satu dengan suatu kelas matrix tingkat n tertentu. Kelas matrix ini dinamakan kelas matrix permutasi pada n.

Definisi 2.3.1.

Misalkan N = {1,2,...,m} dengan n tertentu.

Yang dimaksud dengan permutasi φ pada n adalah susunan $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}$, dimana $\varphi(1) = \varphi_1$ $\varphi(2) = \varphi_2, \dots, \varphi(n) = \varphi_n$, dengan φ_j di N, $j = 1,2, \dots ,n$ dan $\varphi_j \neq \varphi_k$ untuk $j \neq k$.

Definisi 2.3.2.

Misalkan $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}$ dan $\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{pmatrix}$ dua permutasi pada N. Perkalian antara kedua permutasi φ dan τ adalah permutasi

$$\varphi\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau_{\varphi_1} & \tau_{\varphi_2} & \dots & \tau_{\varphi_n} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.3.1.

Misalkan N = {1,2,3,4}, maka banyaknya permutasi pada N adalah 4!

Misal $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, dimana $\varphi(1) = 3, \varphi(2) = 2$ $\varphi(3) = 4, \varphi(4) = 1$, dan $\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, dimana $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$, $\tau(3) = 4$, $\tau(4) = 3$, adalah permutasi-permutasi pada N, maka

$$\varphi\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau_{\varphi_1} & \tau_{\varphi_2} & \tau_{\varphi_3} & \tau_{\varphi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \tau_3 & \tau_2 & \tau_4 & \tau_1 \end{pmatrix}$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.3.

Misalkan permutasi φ pada N adalah $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}$ dimana $\varphi(k) = \varphi_k$, untuk k =1,2, ... ,n dan φ_k di N. Invers permutasi dari permutasi φ pada N adalah

$\varphi^{-1}(\varphi_k) = k$, sehingga $\varphi^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi_1^{-1} & \varphi_1^{-1} & \cdots & \varphi_n^{-1} \end{pmatrix}$

dimana $\varphi^{-1}(j) = \varphi_j^{-1}$, untuk $j = 1,2,\ldots,n$ dan φ_j^{-1} di N.

Contoh 2.3.2.

Misalkan $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ adalah permutasi pada N, dimana $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 1$, maka invers permutasinya adalah $\varphi^{-1}(3) = 1, \varphi^{-1}(2)=2$ $\varphi^{-1}(4) = 3$, $\varphi^{-1}(1) = 4$, diperoleh $\varphi^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Misalkan B_j suatu matrix berukuran 1 x n yang semua elemennya bernilai 0, kecuali elemen ke-j yang bernilai 1, maka $B_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$.

Definisi 2.3.4.

Misalkan $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix}$ adalah permutasi pada N dan B_j matrix berukuran 1 x n , maka matrix

$$\begin{bmatrix} B_{\varphi_1} \\ B_{\varphi_2} \\ \vdots \\ B_{\varphi_n} \end{bmatrix}$$

disebut matrix permutasi, dan diberi simbol P_φ. Matrix P_φ merupakan matrix bujur sangkar berordo n.

Dari definisi 2.3.4, bahwa matrix permutasi P_φ berkorespondensi dengan permutasi φ pada n dengan tunggal, demikian juga sebaliknya, setiap permutasi φ pada N berkorespondensi dengan matrix permutasi dengan tunggal.

Contoh 2.3.3.

Diberikan permutasi $\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ pada N, dengan $N = \{1,2,3,4\}$, maka matrix permutasinya adalah :

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan $P_\varphi = (a_{jk})$, maka

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & k = \varphi_j \\ 0, \text{ untuk } & k \neq \varphi_j \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,\ldots,n, \text{ atau}$$

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & j = \varphi_k^{-1} \\ 0, \text{ untuk } & j \neq \varphi_k^{-1} \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,\ldots,n$$

dimana φ^{-1} adalah invers permutasi.

Misalkan K_j suatu matrix berukuran $n \times 1$ yang semua elemennya bernilai 0, kecuali ke-j yang bernilai 1, maka $P_\varphi = (K_{\varphi_1^{-1}} \quad K_{\varphi_2^{-1}} \quad \ldots \quad K_{\varphi_n^{-1}})$

Misalkan I matrix satuan berordo n, maka B_j merupakan baris ke-j dari matrix I dan K_k merupakan kolom ke-k dari matrix I. Matrix P_φ dapat diperoleh dari matrix I dengan mengganti beris ke-j matrix I dengan baris ke-φ_j, $j = 1,2,\ldots,n$; atau dengan mengganti kolom ke-k matrix I dengan kolom ke-φ_k^{-1}, untuk $k = 1,2,\ldots,n$.

Definisi 2.3.5.

Matrix $P_\varphi = (a_{jk})$, dengan

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & k = \varphi_j \\ 0, \text{ untuk } & k \neq \varphi_j \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,\ldots,n$$

Transpose dari matrix permutasi P_{φ} adalah

$(P_{\varphi}) = (\tilde{a}_{jk})$, dengan

$$\tilde{a}_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & j = \varphi_k \\ & \\ 0, \text{ untuk } & j \neq \varphi_k \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,\ldots,n$$

Contoh 2.3.4.

Diberikan permutasi : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pada N,

dengan N = {1,2,3,4}

$$P_{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ atau } \quad P_{\varphi} = (a_{jk}) \quad \text{dengan}$$

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & k = \varphi_j \\ & \\ 0, \text{ untuk } & k \neq \varphi_j \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,3,4$$

$$P_{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ atau } P_{\varphi} = (\tilde{a}_{jk}), \text{ dengan}$$

$$\tilde{a}_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & j = \varphi_k \\ & \\ 0, \text{ untuk } & j \neq \varphi_k \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,3,4$$

Elemen-elemen matrix permutasi terdiri dari elemen 0 dan 1, oleh karena itu transpose conjugate matrix permutasi sama dengan transpose matrix permutasi, sehingga $P_{\varphi}^{\,t} = P_{\varphi}^{\,*}$

Definisi 2.3.6.

Invers matrix permutasi adalah suatu matrix permutasi yang berasal dari matrix permutasi φ^{-1} pada N, atau invers dari matrix permutasi P_{φ}, dan diberi simbol $P_{\varphi^{-1}}$.

$$P_{\varphi^{-1}} = (\tilde{a}_{jk}),\ \text{dengan}\ \tilde{a}_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } k = \varphi_j^{-1} \\ 0, & \text{untuk } k \neq \varphi_j^{-1} \end{cases};$$

$k,j = 1,2,3,4.$

Contoh 2.3.5.

Diberikan permutasi φ seperti pada contoh 2.3.4,

maka $\varphi^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_{\varphi^{-1}} = (P_\varphi)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma 2.3.1.

Misalkan φ dan τ keduanya permutasi pada N, maka $P_{\varphi\tau} = P_\varphi P_\tau$.

Bukti :

Misalkan $P_\varphi P_\tau = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$, dengan E_j matrix berukuran $1 \times n$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Karena,

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} B_{\varphi_1} \\ B_{\varphi_2} \\ \vdots \\ B_{\varphi_n} \end{bmatrix},\ \text{dan}\ P_\tau = (K_{\tau_1^{-1}} \quad K_{\tau_2^{-1}} \quad \ldots \quad K_{\tau_n^{-1}})$$

Maka elemen-elemen E_j bernilai 0, kecuali elemen ke-k untuk $\varphi_j = \tau_k^{-1}$ yang bernilai 1, untuk

$j = 1,2,\ldots,n$. Dari $\varphi_j = \tau_k^{-1}$ diperoleh $k = \tau_{\varphi j}$. Jadi elemen-elemen E_j bernilai 0, kecuali elemen ke-$(\varphi\tau)_j$ yang bernilai $1, j = 1,2,\ldots,n$; dan

$$P_\varphi P_\tau = \begin{bmatrix} B_{(\varphi\tau)_1} \\ B_{(\varphi\tau)_2} \\ \vdots \\ B_{(\varphi\tau)_n} \end{bmatrix} = P_{\varphi\tau}$$

Hasil kali dua matrix permutasi juga matrix permutasi.

Contoh 2.3.6.

$\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dua permutasi pada $N = \{1,2,3,4\}$.

$$P_\varphi P_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena,

$\varphi\tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, maka $P_{\varphi\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi $P_\varphi P_\tau = P_{\varphi\tau}$.

Perhatikan kembali $P_\varphi = (a_{jk})$, dengan

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & k = \varphi_j \\ 0, \text{ untuk } & k \neq \varphi_j \end{cases} \quad ; \; k,j = 1,2,\ldots,n$$

Dari definisi 2.3.5 dan 2.3.6 diperoleh $P_\varphi^* = P_\varphi^t = P_{\varphi^{-1}} = (\tilde{a}_{jk})$

dengan $$a_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ untuk } & j = \varphi_k \text{ atau } k = \varphi_j^{-1} \\ 0, \text{ untuk } & j \neq \varphi_k \text{ atau } k \neq \varphi_j^{-1} \end{cases} ;$$

$k,j = 1,2, \ldots, n$

Jadi $P_\varphi^* = P_\varphi^t = P_{\varphi^{-1}} = P_\varphi^{-1}$, yang berarti bahwa matrix permutasi adalah suatu matrix unity.

Misalkan $i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ adalah permutasi indetitas pada N, maka $P_i = I$, matrix satuan beordo n.

Karena matrix permutasi adalah non singular dan $P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}}$ maka berlaku $P_\varphi^* \; P_\varphi = P_{\varphi^{-1}} \; P_\varphi = I$.

Misalkan matrix $A = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$, dengan X_j matrix beru-kuran 1 x m, untuk $j = 1,2, \ldots, n$, maka $P_\varphi A = \begin{bmatrix} X_{\varphi_1} \\ X_{\varphi_2} \\ \vdots \\ X_{\varphi_n} \end{bmatrix}$.

Jadi mengalikan suatu matrix A dibelakang P_φ berarti melakukan permutasi terhadap baris-baris A.

Selanjutnya,

$$(X_1\ X_2\ \ldots\ X_n)\ P_\varphi = \left[P_\varphi^{\ t} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \right]^t = \left[P_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \right]^t$$

$$= \begin{bmatrix} X_{\varphi_1^{-1}} \\ X_{\varphi_2^{-1}} \\ \vdots \\ X_{\varphi_n^{-1}} \end{bmatrix}^t$$

$$= (X_{\varphi_1^{-1}} \quad X_{\varphi_2^{-1}} \quad \ldots \quad X_{\varphi_n^{-1}})$$

Jadi mengalikan suatu matrix A yang berukuran m x n didepan P_φ berarti melakukan permutasi φ^{-1} terhadap kolom A.

Contoh 2.3.7.

Diberikan permutasi φ seperti pada contoh 2.3.4. dan matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$P_\varphi\ A\ P_\varphi^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.8.

Suatu permutasi yang mempertukarkan n bilangan secara siklis dinamai suatu siklis berordo n, atau suatu permutasi cyclic berordo n, dan diberi notasi σ

Contoh 2.3.8.

Misalkan siklis berordo 3

$$\sigma = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix}$$

Terhadap permutasi cyclic $\sigma = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{Bmatrix}$

diperoleh matrix permutasi :

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_a \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matrix P_σ diberi simbol ξ.

Himpunan $S = \{I, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ yang berasal dari permutasi-permutasi cyclic $i, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}$, merupakan group cyclic komutatip terhadap perkalian.

2.4. MATRIX FOURIER

Pada sub bab ini dibahas tetang matrix Fourier, yang mana akan diperlihatkan bahwa matrix Fourier adalah suatu matrix unity.

Definisi 2.4.1.

Matrix bujur sangkar $F = F_n = (f_{jk})$ berordo n disebut matrix Fourier berordo n, jika $f_{jk} = n^{-1/2}W^{n-(j-1)(k-1)}$ dimana k,j = 1,2, ... ,n dan $W = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Secara lengkap matrix Fourier berordo n, adalah

$$F = n^{-1/2}\begin{bmatrix} W^n & W^n & W^n & \cdots & W^n \\ W^n & W^{n-1} & W^{n-2} & \cdots & W \\ W^n & W^{n-2} & W^{n-4} & \cdots & W^{2-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^n & W & W^{2-n} & \cdots & W^{n-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

Matrix Fourier berordo n merupakan suatu matrix symetri, yaitu memenuhi $F^t = F$. Pada pembahasan selanjutnya, matrix Fourier berordo n dapat ditulis singkat sebagai matrix Fourier saja.

Catatan 2.4.1.

(1). $W^k = \exp\left(\frac{2\pi k i}{n}\right)$, k = 0,1,2,...

$W^k = (e^{2\pi i/n})^k = e^{2\pi k i/n}$

(2). $W^n = 1$

$$\begin{aligned} W^n &= (e^{2\pi i/n})^n = e^{2\pi i} \\ &= \operatorname{Cos} 2\pi + i \operatorname{Sin} 2\pi \\ &= 1 + i \cdot 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3). $W\,\overline{W} = 1$

$$\begin{aligned} W \cdot \overline{W} &= e^{2\pi i/n}\,(\overline{e^{2\pi i/n}}) \\ &= e^{2\pi i/n}\,e^{-2\pi i/n} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

(4). $\overline{W} = W^{-1}$

$$\overline{W} = e^{-2\pi i/n} = (e^{2\pi i/n})^{-1} = W^{-1}$$

(5). $\overline{W}^{\,k} = W^{-k} = W^{n-k} = (W^k)^{-1} = \overline{W}^{\,k}$

$$\overline{W}^{\,k} = (e^{-2\pi i/n})^k = (e^{2\pi i/n})^{-k} = W^{-k}$$

$$= (e^{2\pi ik/n})^{-1} = (W^k)^{-1}$$

$$= (e^{-2\pi ik/n}) = \overline{(e^{2\pi i/n})^k} = \overline{W^k}$$

$$= (e^{2\pi in/n} \,.\, e^{-2\pi ik/n}) = (e^{2\pi i(n-k)/n})$$

$$= (e^{2\pi i/n})^{n-k}$$

$$= W^{n-k}$$

Jadi $\overline{W}^{\,k} = W^{-k} = W^{n-k} = (W^k)^{-1} = \overline{W^k}$

(6). $1 + W^k + W^{2k} + \ldots + W^{k(n-1)} = 0$, untuk $k = 1,2,\ldots,n-1$.

$$W^n = 1$$

$$W^n - 1 = 0$$

$$(W-1)\ (1 + W + W^2 + \ldots + W^{(n-1)}) = 0$$

Jadi $1 + W + W^2 + \ldots + W^{n-1} = 0$

Sehingga $1 + W^k + W^{2k} + \ldots + W^{k(n-1)} = 0$

Matrix Fourier dapat pula ditulis sebagai

$$F = n^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & W^{n-1} & W^{n-2} & \ldots & W \\ 1 & W^{n-2} & W^{n-4} & \ldots & W^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W & W^2 & \ldots & W^{n-1} \end{bmatrix}$$

Karena matrix Fourier F merupakan matrix symetri, maka transpose conjugatenya adalah matrix $F^* = (\overline{f}_{jk})$, yaitu elemen baris ke-j dan kolom ke-k matrix F^* adalah conjugate elemen baris ke-j dan kolom ke-k dari matrix F, sehingga diperoleh,

$$F^{*} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{W^{n-1}} & \overline{W^{n-2}} & \dots & \overline{W} \\ 1 & \overline{W^{n-2}} & \overline{W^{n-4}} & \dots & \overline{W^{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \overline{W} & \overline{W^{2}} & \dots & \overline{W^{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$F^{*} = n^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^{2} & \dots & W^{n-1} \\ 1 & W^{2} & W^{4} & \dots & W^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{n-1} & W^{n-2} & \dots & W \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4.1.

Matrix Fourier serta transpose conjugatenya untuk $n = 2$, $n = 3$, dan $n = 4$ adalah :

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad F_2^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^{2} & W \\ 1 & W & W^{2} \end{bmatrix}, \quad F_3^{*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{W}^{2} & \overline{W} \\ W & \overline{W} & \overline{W}^{2} \end{bmatrix}$$

dengan $W = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ dan $W = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3}$;

$$F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}, \quad F_4^{*} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Theorema 2.4.1.

Matrix Fourier adalah suatu matrix unity, yaitu memenuhi $F\,F^* = F^*\,F = I$.

Bukti :

Perhatikan bahwa $F^* = (\overline{f_{jk}})$, dengan

$$\overline{f_{jk}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ \overline{W^{n-(j-1)(k-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ W^{(j-1)(k-1)}.$$

Misalkan $F\,F^* = (a_{jk})$, maka

$$a_{jk} = \sum_{r=1}^{n} f_{jr}\ \overline{f_{rk}}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\ W^{n-(j-1)(r-1)}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ W^{(r-1)(k-1)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} W^{n+(r-1)(k-j)}.$$

Dengan mengubah variabel penjumlahan diperoleh

$$a_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} W^{n+r(k-j)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} W^{r(k-j)}$$

Karena $1 + W^k + W^{2k} + \ldots + W^{k(n-1)} = 0$, maka

$$\text{diperoleh } a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } k = j \\ 0, & \text{untuk } k \neq j \end{cases}$$

jadi $F\,F^* = I$, dan dengan cara yang sama didapat $F^*\,F = I$, dengan demikian F suatu matrix unity.

Contoh 2.4.2.

Misalkan matrix Fourier dengan $n = 4$, maka

$$F_4 F_4^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+1+1+1 & 1+i-1-i & 1-1+1-1 & 1-i-1+i \\ 1-i-1+i & 1+1+1+1 & 1+i-1-i & 1-1+1-1 \\ 1-1+1-1 & 1-i-1+i & 1+1+1+1 & 1+i-1-i \\ 1+i-1-i & 1-1+1-1 & 1-i-1+i & 1+1+1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4 .$$

2.5. MATRIX NORMAL

Pada sub bab ini akan dibahas kelas matrix bujur sangkar, yaitu matrix normal. Tujuan pembahasan adalah mengungkapkan salah satu ciri khas matrix normal, yaitu di diagonalisasi oleh matrix unity.

Definisi 2.5.1.

Misalkan A suatu matrix bujur sangkar berordo n, dengan elemen-elemen komplex. Matrix A adalah matrix normal apabila berlaku $A\ A^*=A^*A$, yaitu A komutatip dengan transpose conjugatenya.

Di dalam kelas matrik normal ini dapat ditemui matrix hermit, yaitu metrix A yang memenuhi $A^*= A$, matrix skewhermit, yaitu matrix A yang memenuhi $A^* = -A$, dan matrix unity, yaitu matrix A yang memenuhi $A\ A^*= A^*A= I$.

Matrix normal didiagonalisasikan oleh suatu matrix unity, yang akan diperlihatkan pada theorema berikut.

Theorema 2.5.1.

Misalkan A matrik normal berordo n, dan misalkan pula nilai-nilai karakterestik A adalah $\lambda_1,\lambda_2,...,$

λ_n, maka ada suatu matrix unity berordo n, namakan U, sehingga berlaku $U^* A U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Bukti :

dibuktikan dengan induksi matematika.

Untuk n = 2 .

Misalkan u_1 vektor karakteristik satuan A untuk nilai karakteristik λ_1, maka $Au_1 = \lambda_1 u_1$ dan $u_1^* u_1 = 1$.

Pilih matrix kolom u_2, sehingga $u_2^* u_2 = 1$ dan $u_2^* u_1 = u_1^* u_2 = 0$.

Didefinisikan matrix block $U = (u_1 \; u_2)$, maka U suatu matrix unity.

Perhatikan bahwa

$$U^* A U = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} A \; (u_1 \; u_2)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} (Au_1 \; Au_2)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} (\lambda_1 u_1 \; Au_2)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_1^* A u_2 \\ 0 & u_2^* A u_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya berlaku

$$U^* A^* U = (U^* A \; U)^*$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ u_2^* A u_1 & u_2^* A^* u_2 \end{bmatrix}$$

Karena A matrix normal, yaitu memenuhi $A A^* = A^* A$, maka berlaku pula,

$$(U^* A U)(U^* A^* U) = (U^* A^* U)(U^* A U).$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & u_1^* A u_2 \\ 0 & u_2^* A u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ u_2^* A u_1 & u_2^* A^* u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ u_2^* A u_1 & u_2^* A^* u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_2^* A u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 + u_1^* A u_2 u_2^* A^* u_1 & u_1^* A u_2 u_2^* A^* u_2 \\ u_2^* A u_2 u_2 A^* u_1 & u_2^* A u_2 u_2^* A^* u_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_1 u_1^* A u_2 \\ u_2^* A^* u_1 & u_2^* A^* u_1 u_1^* A u_2 + u_2^* A^* u_2 u_2^* A u_2 \end{bmatrix}$$

Dengan menyatakan elemen baris pertama kolom pertama (atau elemen baris kedua kolom kedua) dari kedua matrix tersebut, diperoleh $u_1^* A u_2 u_2^* A^* u_1 = 0$, atau $(u_2^* A^* u_1)^* \; (u_2^* A^* u_1) = 0$. Sehingga $u_2^* A^* u_1 = 0$, dan juga $u_1^* \, A u_2 = 0$.

$$U^* \; A \; U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & u_2^* A u_2 \end{bmatrix} = \text{diag } (\lambda_1, \; u_2^* A u_2).$$

Berarti A similar dengan matrix diagonal diag $(\lambda_1, \; u_2^* A u_2)$. Nilai-nilai karakteristik matrix diagonal ini sama dengan nilai-nilai karakteristik A, demikian juga sebaliknya. Sehingga nilai karakteristik kedua dari A, yaitu λ_2 haruslah sama dengan $u_2^* A u_2$. Jadi $U^* \; A \; U = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2)$.

Dimisalkan sifat berlaku untuk semua matrix normal berordo r.

Misal A matrix normal berordo r + 1 dengan nilai- nilai karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{r+1}$.

Misal u_1 vektor karakteristik satuan untuk nilai karakteristik λ_1.

Kemudian pilih matrix-matrix kolom $v_1, v_2, \ldots, v_r$

yang memenuhi $v_j^* v_k = \delta_{jk}$, juga $u_1^* v_j = 0$, untuk semua j dari 1 sampai r.

Didefinisikan matrix block $U_1 = (u_1\ v_1\ v_2\ \dots\ v_r)$. Sehingga U_1 suatu matrix unity.

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{bmatrix} A (u_1 \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_r)$$

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} u_1^*Au_1 & u_1^*Av_1 & u_1^*Av_2 & \dots & u_1^*Av_r \\ v_1^*Au_1 & v_1^*Av_1 & v_1^*Av_2 & \dots & v_1^*Av_r \\ v_2^*Au_1 & v_2^*Av_1 & v_2^*Av_2 & \dots & v_2^*Av_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_r^*Au_1 & v_r^*Av_1 & v_r^*Av_2 & \dots & v_r^*Av_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_1^*Av_1 & u_1^*Av_2 & \dots & u_1^*Av_r \\ 0 & v_1^*Av_1 & v_1^*Av_2 & \dots & v_1^*Av_r \\ 0 & v_2^*Av_1 & v_2^*Av_2 & \dots & v_2^*Av_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & v_r^*Av_1 & v_r^*Av_2 & \dots & v_r^*Av_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$$

Dimana $a^t = (u_1^*Av_1 \quad u_1^*Av_2 \quad \dots \quad u_1^*Av_r)$ dan $A_r = (v_j^*Av_k)$ suatu matrix berordo r. Nilai-nilai karakteristik A_r adalah nilai-nilai karakteristik A yang lainnya, yaitu $\lambda_2, \lambda_3, \dots ,\lambda_{r+1}$.

Kenormalan A memberikan

$(U_1^* A\, U_1)\,(U_1^* A^* U_1) \;=\; (U_1^* A^* U_1)\,(U_1^* A\, U_1)$, atau

$(U_1^* A\, U_1)\,(U_1^* A\, U_1)^* \;=\; (U_1^* A\, U_1)^*\,(U_1^* A\, U_1)$

Jadi

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}^*\begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{a} & A_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ \bar{a} & A_r^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\bar{\lambda}_1 + \bar{a}\, a^t & a^t A_r^* \\ A_r\bar{a} & A_r A_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_1 a^t \\ \lambda_1\bar{a} & \bar{a}\, a^T + A_r^r A_r \end{bmatrix}$$

Dengan menyamakan elemen baris pertama kolom pertama dari kedua matrix tersebut, diperoleh $a^t\, a = 0$, atau $a^t\, a = a^*\, a = \bar{0} = 0$.

Jadi $a = 0$, dan $U_1^* A\, U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$.

Kemudian dari elemen baris kedua kolom kedua diperoleh $A_r A_r^* = A_r^* A_r$, yang berarti bahwa A_r suatu matrix normal berordo r. Dengan demikian ada suatu matrix unity U_r sehingga $U_r^* A\, U_r = \text{diag}\,(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{r+1})$. Misalkan U_{r+1} suatu matrix berordo r+1 yang di definisikan sebagai

$$U_{r+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$U_{r+1}^* U_{r+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r^* U_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$$

$$= I_{r+1}$$

$$(U_1 U_{r+1})^* A (U_1 U_{r+1}) = U_{r+1}^* (U^* A U_1) U_{r+1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U_r^* A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U^* A_r U_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \text{diag } (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{r+1}) \end{bmatrix}$$

$$= \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1})$$

Karena $(U_1 U_{r+1})^* A (U_1 U_{r+1}) = U_{r+1}^* U_1^* U_1 U_{r+1} = I_{r+1}$, maka berarti $U_1 U_{r+1}$ matrix unity berordo r+1. Dengan mengambil $U = U_1 U_{r+1}$ sehingga theorema 2.5.1 ini berlaku untuk matrix normal berordo r+1.

Misalkan A suatu matrix normal berordo n dan misal $U^* A U = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, dengan U suatu matrix unity berordo n, maka dikatakan bahwa A didiagonalisasikan oleh matrix U^*, serta matrix diagonal diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ merupakan bentuk diagonal matrix A.

Theorema 2.5.2.

Misalkan $D = \text{diag } (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dan U suatu matrix unity berordo n, maka matrix $A = UDU^*$ dan $B = U^*DU$

keduanya adalah matrix normal dengan nilai-nilai karakteristik $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Bukti :

$U^*A\,U = \text{diag}\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

$U^*A\,U = D$

$A = U\,D\,U^*$

$A^* = (U\,D\,U^*)^* = U\,D^*U^*$.

akan dibuktikan bahwa $A\,A^* = A^*A$.

$A\,A^* = U\,D\,U^*\,U\,D^*U^*$

$= U\,D\,D^*U^*$

Sedangkan $A^*A = U\,D^*U^*\,U\,D\,U$

$= U\,D^*D\,U^*$

Karena perkalian dua matrix diagonal bersifat komutatip, maka $A^*A = U\,D\,D^*U^*$.

Jadi berlaku $A^*A = A\,A^*$,sehingga A merupakan matrix normal. Demikian juga matrix $B = U^*D\,U$, dengan cara yang sama diperoleh $B\,B^* = B^*B$, yang berarti B juga matrix normal.

Akibat 2.5.1.

Misalkan A suatu matrix berordo n dengan nilai-nilai karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
A suatu matrix normal jika dan hanya jika ada suatu matrix unity U berordo n sedemikian sehingga $U^*\,A\,U = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Bukti :

Sesuai dengan theorema 2.5.1 dan 2.3.2.

Contoh 2.5.1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$ dengan nilai-nilai karakteritik

$\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 3$.

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$ matrix unity berordo 2 dan

dengan $U\,U^* = U^*U = I_2$.

Matrix A merupakan matrix normal dan dapat disajikan sebagai $U\,A\,U^* = \text{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2)$

$$U\,A\,U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{diag}\,(0,3)$$

$$= \text{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2).$$