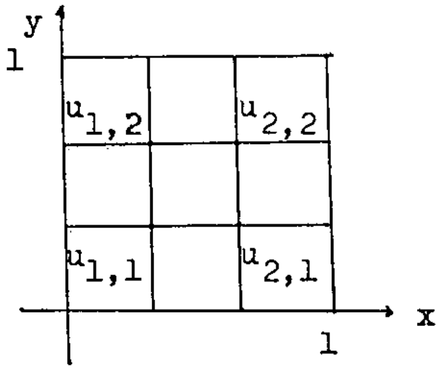
Lampiran

Aplikasi pada metode iterasi

Pandang persamaan diferensial eliptis sederhana :

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad (1)$$

pada daerah seperti gambar 1, dengan sarat batas seperti di bawah ini :



$u_{(1,y)} = 1$

$u_{(x,0)} = 0$

$u_{(x,1)} = 0$

$u_{(0,y)} = 0$

$0 \leqslant x \leqslant 1 \;,\; 0 \leqslant y \leqslant 1.$

Gambar 1.

Penyelesaian pendekatan diperoleh dengan metode finite difference. Dengan metode ini daerah tersebut dibagi atas - sembilan bagian, dengan koordinat :

$$x_i = ih \;,\; y_j = jh \quad i,j = 0,1,2,3. \qquad h = 1/3.$$

pendekatan bentuk (1) dengan finite difference memberikan - persamaan

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

$$U_{i,j} = 1/4(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \quad \ldots(2)$$

dimana $U_{i,j}$ nilai pendekatan u pada titik (x_i, y_j).

Persamaan (2) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$4\,U_{1,1} - U_{0,1} - U_{1,0} - U_{1,2} - U_{2,1} = 0$$

$$4\,U_{1,2} - U_{0,2} - U_{1,1} - U_{1,3} - U_{2,2} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$4\,U_{2,1} - U_{1,1} - U_{2,0} - U_{2,2} - U_{3,1} = 0$$

$$4\,U_{2,2} - U_{1,2} - U_{2,1} - U_{2,3} - U_{3,2} = 0$$

apabila kemudian disubstitusikan sarat batas berikut :

$$\begin{array}{ll} U_{3,1} = U_{3,2} = 1 \quad , & U_{1,0} = U_{2,0} = 0 \\ U_{1,3} = U_{2,3} = 0 \quad , & U_{0,1} = U_{0,2} = 0 \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

akan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{array}{rrrrl} 4\,U_{1,1} - & U_{1,2} - & U_{2,1} & 0 & = 0 \\ -\,U_{1,1} + & 4\,U_{1,2} & 0 & -\;U_{2,2} & = 0 \\ -\,U_{1,1} & 0 & +\,4\,U_{2,1} - & U_{2,2} & = 1 \\ 0 & -\,U_{1,2} - & U_{2,1} - & 4\,U_{2,2} & = 1 \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

persamaan (5) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matrik:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,1} \\ U_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

dapat diperlihatkan bahwa matrik :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

matrik A (7) adalah matrik Cyclic-2 order tetap atau matrik blok tridiagonal setelah dipartisi. Dengan persamaan (4.32) untuk p = 2 dan harga $\rho(M_j) = 0{,}5$ maka akan didapat harga w_b sebagai berikut :

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1,p} \\ A_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix}$$

jadi matrik $M_{j1\pi}$ dari persamaan (4.6) merupakan matrik Cyclic lemah indek $p > 1$.

Dengan mengambil $N = 2$, maka matrik $M_{j2\pi}$ dari (4.7) seperti dibawah ini :

$$M_{j2} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1,2} \\ A_{2,1} & 0 \end{bmatrix}$$

sesuai definisi 4.1.1., $M_{j2\pi}$ ukuran 2X2 adalah matrik Cyclic lemah indek 2, tetapi secara umum matrik $M_{j2\pi}$ ukuran NXN seperti (4.7) adalah matrik Cyclic lemah dengan indek 2, untuk jelasnya, akan diterangkan pada Graph Cyclic-p.

Definisi 4.1.2

Jika matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$ (4.3) dari matrik blok A (4.2) adalah matrik Cyclic lemah untuk indek $p \geq 2$, maka A_π adalah matrik Cyclic-p yang partisinya berkaitan dengan matrik A_π (4.2)

Contoh 4.1.2

Dengan mengambil matrik blok Jacobi yang Cyclic-p lemah yaitu $M_{j1\pi}$ seperti pada (4.6), akan dicari matrik A_π yang Cyclic-p, dengan $p \geq 2$.

Penyelesaian

Sesuai persamaan (4.6) dimana matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$

mempunyai rumus, seperti pada persamaan (4.3) sebagai berikut

$$M_{j\pi} = -D_\pi^{-1} A_\pi + I_\pi$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & A_{1,p} \\ A_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & A_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{A_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \frac{-1}{A_{2,2}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{A_{N,N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & A_{1,p} \\ A_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & A_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-A_{12}}{A_{1,1}} & \cdots & \frac{-A_{1,N}}{A_{1,1}} \\ \frac{-A_{2,1}}{A_{2,2}} & -1 & & \frac{-A_{2,N}}{A_{2,2}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{-A_{N,1}}{A_{N,N}} & & \cdots & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

akan didapat bahwa :

$$A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = \cdots = A_{N,N} \neq 0$$

persamaan itu dipenuhi apabila $p = N$, dan didapat pula :

$$A_{2,1} = A_{3,2} = \cdots = A_{N,N-1} = A_{1,N} \neq 0$$

selain harga diatas adalah nol, sehingga bentuk matrik A_π yang Cyclic-p adalah sebagai berikut :

$$A_{I\pi} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots 0 & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix}$$

jadi matrik-matrik khusus pada persamaan(4.4) dan (4.5) adalah bentuk dari matrik Cyclic dengan indek $p \geqslant 2$.

4.2 <u>Graph Cyclic-p dari sebuah matrik</u>

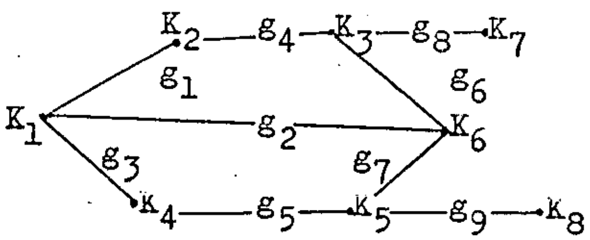
Penggunaan teori Graph disini, adalah untuk membantu menentukan apakah matrik komplek A ukuran nxn adalah Cyclic dengan indek p, atau secara sama apakah matrik A_{π} (4.2) adalah Cyclic dengan indek p, sebelum membahas lebih jauh akan dijelaskan beberapa definisi dan teorema yang mendukung Graph Cyclic-p sebagai berikut :

Definisi 4.2.1

Path adalah barisan titik dan garis bergantian, dimulai dan diakhiri dengan titik, dimana titik dan garis berlainan.

Contoh 4.2.1

Terlihat gambar dibawah ini sebagai berikut



dengan K_i = titik dan g_i = garis , $1 \leqslant i \leqslant 8$

jadi :

$K_1 g_1 K_2 g_4 K_3 g_8 K_7$ adalah Path

$K_1 g_1 K_2 g_4 K_3 g_6 K_6 g_2 K_1 g_3 K_4$ adalah bukan Path

Definisi 4.2.2

Cycle adalah Path tertutup.

Contoh 4.2.2

Dari gambar diatas didapat bahwa :

$K_1 g_1 K_2 g_4 K_3 g_6 K_6 g_2 K_1$ adalah Cycle (Path tertutup)

Gambaran secara geometris dari sembarang matrik komplek A ukuran nXn , dengan mempertimbangkan suatu harga n titik yang berbeda $K_1, K_2, \ldots, K_n$ dikatakan sebagai titik.untuk setiap anggota a_{ij} yang tidak nol dari matrik, dapat di - hubungkan titik K_i ke titik K_j dengan sebuah Path $\overrightarrow{K_iK_j}$ langsung dari K_i ke K_j ($K_i \longrightarrow K_j$), sehingga setiap matrik A ukuran nXn , dapat dihubungkan oleh sebuah Graph langsung berhingga G(A)

Definisi 4.2.3

Sebuah Graph langsung yang benar-benar terhubung, jika suatu urutan pasangan dari titik K_i dan K_j seperti dibawah :

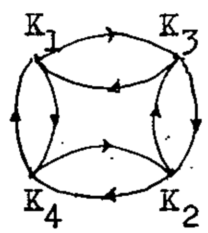
$$\overrightarrow{K_iK_{h1}} \quad \overrightarrow{K_{h1}K_{h2}} \quad \ldots \quad \overrightarrow{K_{hr-1}K_{hr=j}}$$

disana ada path langsung yang menghubungkan K_i ke K_j .

Contoh 4.2.3.1

Ambil matrik B ukuran 4X4 seperti dibawah ini, untuk mencari Graph langsung yang benar-benar terhubung :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{maka} \quad G(B) :$$

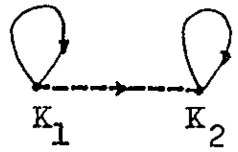


terlihat G(B) adalah Graph yang benar-benar terhubung

Contoh 4.2.3.2

Ambil matrik A ukuran 2X2 seperti dibawah :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \text{maka} \quad G(A) :$$



sehingga G(A) tidak benar-benar terhubung, sebab disana tidak ada Path dari K_2 ke K_1

Teorema 4.1

Misal $A = (a_{i,j}) \geqslant 0$, sebuah matrik irreducibel ukuran nXn, dengan $G(A)$ sebagai Graph langsungnya. Untuk tiap titik K_i dari $G(A)$, dipertimbamgkan semua Path tertutupnya, yang menghubungkan K_i ke dirinya sendiri. Jika S_i himpunan semua panjang dari Path tertutup ini (m_i), misal p_i adalah pembagi persekutuan terbesar (the greatest common divisor) dengan panjang yakni ;

$$p_i = \underset{m_i \in S_i}{\mathrm{PPT}} \{ m_i \} \qquad , 1 \leqslant i \leqslant n$$

maka $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p$, jika $p = 1$ maka A adalah sederhana (primitive), dan apabila $p > 1$ maka A adalah Cyclic dengan indek p.

Bukti

Misal $A^r = (a_{i,j}^{r})$ dengan r = panjang Path, $r \geqslant 1$. Ambil m_1 dan m_2 dua bilangan bulat positip dalam himpunan S_i, dengan $a_{i,i}^{m_1}$ dan $a_{i,i}^{m_2}$ **adalah bilangan** real positip, sehingga

$$a_{i,i}^{m_1+m_2} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{m_1} . a_{k,i}^{m_2} \geqslant a_{i,i}^{m_1} . a_{i,i}^{m_2} > 0 .$$

berikutnya bahwa $(m_1 + m_2) \in S_i$, membuktikan bahwa tiap himpunan S_i adalah sebuah himpunan bilangan bulat positip yang tertutup terhadap penjumlahan. Diketahui bahwa himpunan S_i memuat semua tetapi dalam jumlah yang berhingga, untuk melipatgandakan pembagi persekutuan terbesar p_i. Jika beberapa $p_i = 1$, maka $a_{i,i}^{r} > 0$ untuk semua r yang cukup besar, dari definisi 4.1.1 sehingga A tidak dapat Cyclic, jadi A sederhana (primitive). Jika A sederhana $a_{j,j}^{r} > 0$ untuk setiap $1 \leqslant j \leqslant n$

dan semua r yang cukup besar, sehingga :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_n = p = 1$$

sekarang diasumsikan bahwa beberapa $p_i > 1$, sehingga ini menyatakan secara tak langsung bahwa $a_{i,i}^{r}$ adalah tidak positip untuk semua r yang cukup besar, maka sesuai definisi 4.1.1 A adalah Cyclic dengan indek $v > 1$. Akan didapat bahwa pangkat dari matrik A mempunyai anggota diagonalpositip, adalah berbentuk A^{rv}, didapat kenyataan sub matrik diagonal bujur sangkar C_i, $1 \leq i \leq p$ dari matrik A adalah sederhana, maka A^{rv} memiliki semua anggota diagonalnya positip,untuk semua r yang cukup besar, jadi

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p = v$$

Definisi 4.2.4

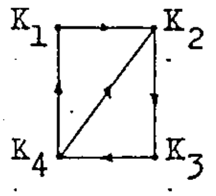
Jika G adalah sebuah Graph langsung berhingga,, yang benar-benar terhubung, maka G adalah Graph Cyclic dengan indek $p > 1$ atau sebuah Graph sederhana, apabila pembagi persekutuan terbesar dari semua panjang Path tertutupnya adalah berturut-turut $p > 1$ atau $p = 1$

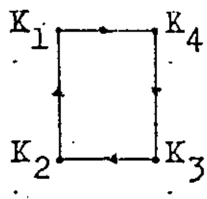
Contoh 4.2.4

Dengan mempertimbangkan matrik-matrik dibawah ini,apakah Cyclic atau sederhana(primitive) yaitu :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,4} \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}$$

yang Graph langsungnya berturut-turut sebagai berikut :

$G(B_1)$: 

$G(B_2) =$ 

pengamatan pada Graph $G(B_2)$ dulu, dari teorema 4.1 dan definisi 4.2.4 didapat pembagi persekutuan terbesar adalah :

$$p_1 = \text{PPT} \{4, 8, 12, \ldots\} = 4$$

sehingga akan didapat

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 4$$

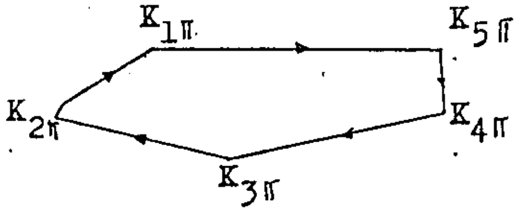
Jadi matrik B_2 adalah Cyclic dengan indek 4, Pada Graph $G(B_1)$ menunjukkan path tertutup yang memghubungkan K_4 ke dirinya sendiri adalah dengan panjang 3 dan 4, sehingga pembagi persekutuan terbesar adalah satu, jadi $p_4 = 1$ maka B_1 bukan matrik Cyclic.

Secara sama juga berlaku untuk matrik blok, kapan ma- trik A_π (4.2) adalah Cyclic-p atau secara sama kapan matrik blok Jacobinya $M_{j\pi}$ (4.3) adalah Cyclic lemah **dengan indek** p. Pada blok matrik hanya mengganti n titik dengan N titik untuk Graph langsungnya, Sekarang ambil N titik $K_{1\pi}, K_{2\pi}, \ldots K_{N\pi}$, dengan N adalah jumlah submatrik diagonal dari partisi matrik A_π(4.2). Jika submatrik $\mathbf{M}_{i,j}$ dari partisi matrik $M_{j\pi}$ memiliki sekurang-kurangnya satu anggota non zero(tidak nol) sehingga dapat menghubungkan titik $K_{i\pi}$ ke titik $K_{j\pi}$ dengan sebuah Path langsung dari $K_{i\pi}$ ke $K_{j\pi}$. Sesuai penjelasan diatas dan beberapa definisi serta teorema 4.1, maka matrik blok tersebut **dibawah ini** juga **matrik** Cyclic **indek p.**

Contoh

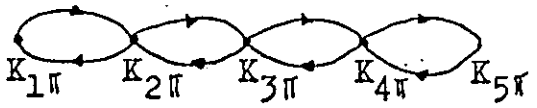
Ambil matrik $M_{j1\pi}$(4.6) dan matrik $M_{j2\pi}$(4.7) dengan p=5 diambil untuk matrik $M_{j1\pi}$ dan $N = 5$ untuk $M_{j2\pi}$, maka akan didapat Graph blok langsung sebagai berikut :

$G_\pi(M_{j1\pi})$:



dan

$G_\pi(M_{j2\pi})$:



pada $G_\pi(M_{j1\pi})$ jelas PPT $= \{5,10,15, \ldots\} = 5$ jadi sebuah Graph Cyclic indek 5, sedang pada $G_\pi(M_{j2\pi})$ PPT $= \{2,4,6,\ldots\}$ $= 2$ yang merupakan Graph Cyclic indek 2 (Cyclic-2).

4.3 Matrik-matrik Cyclic-p order tetap (Consistently Ordered)

Definisi 4.3.1

Jika matrik A_π dari(4.2) adalah Cyclic-p (indek p) maka A_π adalah order tetap (consistently ordered), jika semua eigenvalue dari matrik :

$$M_{j\pi}(\alpha) = \alpha L_\pi + \alpha^{-(p-1)} U_\pi$$

didapat dari matrik blok Jacobi $M_{j\pi} = L_\pi + U_\pi$, adalah berdiri sendiri dari α , untuk $\alpha \neq 0$, dimana L_π dan U_π berturut-turut matrik-matrik segitiga lengkap bawah dan atas.Kemudian juga dikatakan bahwa matrik $M_{j\pi}$ adalah order tetap.

Contoh 4.3.1.a

Dengan mengambil matrik $A_{1\pi}$ akan didapat matrik $M_{j\pi}$ setelah masuk ke persamaan (4.3), yang berbentuk sesuai persamaan (4.6)kemudian dengan mengambil matrik $M_{j\pi}(\alpha)$ seperti dibawah ini, dengan pengujian langsung memakai pergandaan maka :

$M^p_{j\pi}(\alpha) = M^p_{j\pi}$ untuk semua $\alpha \neq 0$, dengan indek $p > 1$, sehingga eigenvalue dari $M_{j\pi}(\alpha)$ berdiri sendiri, sehingga matrik $A_{1\pi}$ (4.4) adalah Cyclic-p order tetap.

$$M_{j\pi}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \alpha^{-(p-1)} A_{1,p} \\ \alpha A_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha A_{3,2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \alpha A_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

Contoh 4.3.1.b

Secara sama dengan contoh 4.3.1.a, tapi dengan matrik $A_{2\pi}$ (4.5) akan didapat matrik $M_{j2\pi}$ setelah dimasukkan ke persamaan (4.3) dan akan memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$M_{j2\pi}(\alpha)\, X = \lambda\, X\ ,\ X \neq 0 \qquad (4.9)$$

dengan $M_{j2\pi}(\alpha)$ berbentuk seperti dibawah :

$$M_{j2\pi}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} A_{1,2} & \cdots & 0 \\ \alpha A_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha^{-1} A_{N-1,N} \\ 0 & 0 \cdots & \alpha A_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

maka persamaan (4.9) dapat dijabarkan menjadi persamaan himpunan yaitu

$$\alpha A_{j,j-1} X_{j-1} + \frac{1}{\alpha} A_{j,j+1} X_{j+1} = \lambda X_j\ ,\ 1 \leq j \leq N \qquad (4.10)$$

untuk :

$$\begin{array}{ll} j=1 & \alpha A_{1,0} X_0 + \frac{1}{\alpha} A_{1,2} X_2 = \lambda X_1 \\ j=2 & \alpha A_{2,1} X_1 + \frac{1}{\alpha} A_{2,3} X_3 = \lambda X_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$j=N \qquad \alpha A_{N,N-1}X_{N-1} + \frac{1}{\alpha} A_{N,N+1}X_{N+1} = \lambda X_N$$

dengan mengambil matrik $A_{1,0}$ dan $A_{N,N+1}$ adalah matrik-matrik nol, maka persamaan (4.10) memenuhi persamaan (4.9). Dengan substitusi akan dibuktikan bahwa $M_{j2\pi}(\alpha) = M_{j2\pi}$, ambil :

$$Z_j = \left(\frac{1}{\alpha^{j-1}}\right) X_j \text{ maka } X_j = \alpha^{j-1} Z_j \quad , 1 \leqslant j \leqslant N \quad (4.11)$$

untuk :

$$\begin{array}{ll} j = 1 & X_1 = \alpha^0 Z_1 \backsim X_1 = Z_1 \\ j = 2 & X_2 = \alpha^1 Z_2 \\ j = 3 & X_3 = \alpha^2 Z_3 \\ \vdots & \vdots \\ j = N & X_N = \alpha^{N-1} Z_N \end{array}$$

persamaan (4.11) masuk ke persamaan (4.10), dengan matrik $A_{1,0}$ dan $A_{N,N+1}$ adalah matrik-matrik nol, akan didapat :

$$\frac{1}{\alpha} A_{1,2} \cdot \alpha Z_2 = \lambda Z_1$$

$$\alpha A_{2,1} Z_1 + \frac{1}{\alpha} A_{2,3} \alpha^2 Z_3 = \lambda \alpha Z_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha A_{N,N-1} \cdot \alpha^{N-2} Z_{N-1} = \lambda \alpha^{N-1} Z_N$$

dan dapat ditulis juga sebagai berikut :

$$A_{1,2} Z_2 = \lambda Z_1$$

$$A_{2,1} Z_1 + A_{2,3} Z_3 = \lambda Z_2$$

$$A_{3,2} Z_2 + A_{3,4} Z_4 = \lambda Z_3$$

$$\vdots$$

$$A_{N,N-1} Z_{N-1} = \lambda Z_N$$

maka akan didapat seperti berikut ini :

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ A_{2,1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & A_{3,2} & \ddots & \ddots & A_{N-1,N} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \qquad (4.12)$$

dari persamaan (4.9) dan (4.12) terlihat bahwa matrik $M_{j2\pi}(\alpha)$ tidak tergantung pada α, dengan $\alpha \neq 0$, ini menunjukkan bahwa secara umum, matrik $A_{2\pi}$ maupun matrik $M_{j2\pi}$ adalah matrik yang Cyclic-2 order tetap.

Teorema 4.2 (Teorema Romanovsky)

Misal $A_\pi = (A_{i,j})$ sebuah matrik Cyclic lemah dengan indek $p > 1$ dengan ukuran NXN maka :

$$\phi(t) = \det(\lambda I - A_\pi) = \prod_{i=1}^{N} (t - \lambda_i)$$

$$= t^m \prod_{i=1}^{r} (t^p - \sigma_i^p), \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Bukti

Jika λ suatu eigenvalue dari A_π yang tidak nol, maka semua akar dari $t^p - \lambda^p = 0$, adalah juga eigenvalue dari A_π, menurut (2.4), dengan derajat N maka akan memiliki N akar karakteristik (eigenvalue), sehingga akan diperoleh polinomial dalam t :

$$\phi(t) = \det(\lambda I - A_\pi) = \prod_{i=1}^{N} (t - \lambda_i), \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots N$$

karena tidak semua λ_i non zero (tidak nol), $1 \leq i \leq N$, dimana setiap σ_i adalah non zero, dan sebab matrik A_π Cyclic-p maka tepat memiliki p eigenvalue dari modulus $\rho(A_\pi)$ sehingga :

$$\phi(t) = \det(\lambda I - A_\pi) = \prod_{i=1}^{N} (t - \lambda_i) = t^m \prod_{i=1}^{r} (t^p - \sigma_i^p).$$

Teorema 4.3

Misal $M_{j\pi} = L_\pi + U_\pi$ sebuah order tetap dari matrik Cyclic lemah indek p, maka untuk sembarang bilangan komplek α, β, γ :

$$\det(\gamma I_\pi - \alpha L_\pi - \beta U_\pi) = \det(\gamma I_\pi - (\alpha^{p-1}\beta)^{\frac{1}{p}}(L_\pi + U_\pi)) \quad \ldots (4.13)$$

Bukti

Akibat langsung dari definisi 4.3.1, sehingga diketahui untuk sembarang bilangan komplek konstan α, β, γ

$$\det(\gamma I_\pi - \alpha L_\pi - \beta U_\pi) = \prod_{i=1}^{N} (\gamma - \sigma_i) \quad \ldots (4.14)$$

$$\det(\gamma I_\pi - (\alpha^{p-1}\beta)^{\frac{1}{p}}(L_\pi + U_\pi)) = \prod_{i=1}^{N} (\gamma - \tau_i)$$

para σ_i dan τ_i adalah berturut-turut eigenvalue dari matrik-matrik $\alpha L_\pi + \beta U_\pi$ dan $(\alpha^{p-1}\beta)^{\frac{1}{p}}(L_\pi + U_\pi)$, akan ditunjukkan himpunan :

$\{\sigma_i\}$ dan $\{\tau_i\}$ adalah sama, untuk $1 \leqslant i \leqslant N$.

Jika salah satu α atau β berharga nol maka $\alpha L_\pi + \beta U_\pi$ adalah matrik segitiga lengkap, yang menyatakan setiap σ_i berharga nol sesuai definisi 3.7, jelas untuk setiap τ_i juga berharga nol, jadi dua determinant dari(4.13) harganya sama.

Sekarang apabila α dan β kedua-duanya tidak berharga nol, ambil :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}} = v$$

maka persamaan (4.13) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\alpha L + \beta U = (\alpha^{p-1}\beta)^{\frac{1}{p}} (vL_{\pi} + v^{-(p-1)}U_{\pi})$$

dengan hipotesa $M_{j\pi} = L_{\pi} + U_{\pi}$ adalah matrik Cyclic lemah order tetap dengan indek p, ambil harga v = 1 dapat ditarik kesimpulan himpunan eigenvalue $\{\sigma_i\}$ dan $\{\tau_i\}$ dengan $1 \leq i \leq N$, adalah sekali lagi sama .

4.4 Analisa iterasi pada matrik Cyclic-p order tetap dan pemakaian faktor relaxasi w untuk metode SOR .

Pada bab ini akan diperkenalkan tiga metode iterasi saja dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, seperti pada persamaan(1.2) dengan koefisien matriknya adalah matrik Cyclic-p order tetap, yang akan memudahkan analisa secara teoritis dari metode iterasi SOR (Successive Overrelaxation), ketiga metode iterasi tersebut adalah :

1.Metode iterasi blok Jacobi

2.Metode iterasi blok Gauss Seidel

3.Metode iterasi blok SOR (Successive Overrelaxation)

Pertama dengan mengambil matrik A_{π}(4.2) dan dipartisi menjadi matrik blok diagonal D_{π} non singular dan matrik segitiga bawah/atas lengkap E_{π} dan F_{π}, didapat penguraian :

$$A_{\pi} = D_{\pi} - E_{\pi} - F_{\pi}$$

ketentuan pemisahan pada matrik $A_{\pi} = M_{\pi} - N_{\pi}$, dengan $M_{\pi} = D_{\pi}$ $N_{\pi} = E_{\pi} + F_{\pi}$, yang memberikan metode iterasi blok Jacobi :

$$D_{\pi}X^{(m+1)} = (E_{\pi} + F_{\pi})X^{(m)} + B_{\pi}, \quad m \geq 0 \qquad (4.15)$$

apabila $(D_{\pi} - E_{\pi})$ non singular, maka akan memberikan metode iterasi blok Gauss Seidel sebagai berikut :

$$(D_{\pi} - E_{\pi})\, X^{(m+1)} = F_{\pi}\, X^{(m)} + B_{\pi}, \quad m \geq 0 \qquad (4.16)$$

Secara sama, pemisahan $A_\pi = M_{1\pi} - N_{1\pi}$ dimana :

$$M_{1\pi} = \frac{1}{w}(D_\pi - wE_\pi),\ N_{1\pi} = \frac{1}{w}((wF_\pi + (1-w)D_\pi)$$

dengan w faktor relaxasi yang tidak nol $(w \neq 0)$ maka akan memberikan metode iterasi blok SOR untuk $1 < w < 2$ sebagai berikut :

$$(D_\pi - wE_\pi)X^{(m+1)} = (wF_\pi + (1-w)D_\pi)X^{(m)} + wB_\pi,\ m \geqslant 0 \quad (4.17)$$

dengan mengambil $L_\pi = D_\pi^{-1}E_\pi$ dan $U_\pi = D_\pi^{-1}F_\pi$, maka metode iterasi persamaan (4.15),(4.16) dan (4.17) menjadi :

$$X^{(m+1)} = (L_\pi + U_\pi)\ X^{(m)} + D_\pi^{-1}B_\pi,\quad m \geqslant 0 \qquad (4.15')$$

kemudian

$$X^{(m+1)} = (I_\pi - L_\pi)^{-1}U_\pi X^{(m)} + (I - L_\pi)^{-1}D_\pi^{-1}B_\pi,\ m \geqslant 0 \quad (4.16')$$

dan

$$X^{(m+1)} = (I_\pi - wL_\pi)^{-1}(wU_\pi + (1-w)I_\pi)X^{(m)} + (I_\pi - wL_\pi)^{-1}wD_\pi^{-1}B_\pi,$$
$$m \geqslant 0 \quad \ldots \quad (4.17')$$

kemudian ketiga metode iterasi dapat dibawa kebentuk umum :

$$X^{(m+1)} = M_\pi\ X^{(m)} + C_\pi,\quad m \geqslant 0 \qquad (4.18)$$

dengan M_π matrik iterasi blok yang tergantung pada partisi dari matrik A_π(4.2), dimana $X^{(m+1)}$ dan $X^{(m)}$ adalah pendekatan ke X pada iterasi ke (m+1) kali dan (m) kali, kemudian C_π adalah vektor kolom blok.

diasumsikan bahwa matrik blok A_π adalah matrik Cyclic-p order tetap, maka hasil pokok pada bagian ini adalah hubungan fungsional dari persamaan (4.21) pada teorema 4.4 antara eigenvalue μ dari matrik blok Jacobi :

$$M_{J\pi} = L_\pi + U_\pi \qquad (4.19)$$

dan eigenvalue λ dari matrik blok SOR :

$$\mathcal{L}_{w\pi} = (I_\pi - wL_\pi)^{-1}(wU_\pi + (1-w)I_\pi) \qquad (4.20)$$

Dari hubungan fungsional matrik blok Jacobi(4.19) dan matrik blok SOR akan mendapatkan suatu hasil yang berguna sebagai dasar untuk menentukan dengan tepat dari nilai w yang meminimalkan $\rho(\mathcal{L}_{w\pi})$.

Teorema 4.4

Misal matrik A_π(4.2) adalah sebuah matrik Cyclic-p order tetap, dengan $A_{i,i} \neq 0$, $1 \leq i \leq N$, jika $w \neq 0$ dan λ eigen value non zero dari $\mathcal{L}_{w\pi}$(4.20) dan jika μ memenuhi :

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda^{p-1} w^p \mu^p \tag{4.21}$$

maka μ eigenvalue dari matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$(4.19). Sebaliknya jika μ eigenvalue $M_{j\pi}$(4.19) dan λ memenuhi (4.21) maka λ eigenvalue dari $\mathcal{L}_{w\pi}$(4.20).

Bukti

Eigenvalue dari $\mathcal{L}_{w\pi}$ adalah akar-akar polinomial karakteristiknya :

$$\det(\lambda I_\pi - \mathcal{L}_{w\pi}) = 0 \tag{4.22}$$

karena $(I_\pi - wL_\pi)$ non singular, maka persamaan(4.22) seperti bukti pada teorema 3.6 akan sama dengan :

$$\det(I_\pi - wL_\pi).\det(\lambda I_\pi - \mathcal{L}_{w\pi}) = 0$$

$$\det((\lambda + w - 1)I_\pi - \lambda w L_\pi - wU_\pi) = 0 \tag{4.23}$$

sekarang ambil polinomial karakteristik dalam :

$$\phi(\lambda) = \det((\lambda + w - 1)I_\pi - \lambda w L_\pi - wU_\pi) \tag{4.24}$$

dengan menggunakan teorema 4.3 langsung ke (4.24) akan didapatkan :

$$\phi(\lambda) = \det((\lambda + w - 1)I_\pi - \lambda^{\frac{p-1}{p}} w M_{j\pi}) \tag{4.25}$$

karena dari hipotesa, A_π adalah matrik Cyclic-p order tetap, maka $\lambda^{\frac{p-1}{p}} w M_{j\pi}$ adalah matrik Cyclic lemah dengan indek p jadi akan didapat, dari pemakaian teorema 4.2 (Teorema Romanovsky) sebagai berikut :

$$\phi(\lambda) = (\lambda + w-1)^m \prod_{i=1}^{r} ((\lambda + w-1)^p - \lambda^{p-1} w^p \mu_i^p) \qquad (4.26)$$

dimana μ_i non zero jika $r \geqslant 1$.

Untuk bukti bagian pertama dari teorema ini adalah : misal $w \neq 0$ dan λ eigenvalue dari $\mathcal{L}_{w\pi}$, sehingga sekurang-kurangnya satu faktor dari (4.26) lenyap (vanishes). Jika $\mu \neq 0$ dan μ memenuhi (4.21) maka $(\lambda + w-1) \neq 0$, jadi dari (4.26) didapat :

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda^{p-1} w^p \mu_i^p \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r$$

dimana μ_i non zero, persamaan diatas masuk ke persamaan(4.21) didapat :

$$\lambda^{p-1} w^p \mu_i^p = \lambda^{p-1} w^p \mu^p$$

$$\lambda^{p-1} w^p (\mu_i^p - \mu^p) = 0$$

sebab λ dan w non zero, maka :

$$\mu_i^p - \mu^p = 0 \qquad \mu_i^p = \mu^p \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r$$

jadi μ eigenvalue dari matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$. Jika $\mu = 0$ dan $w \neq 0$, λ eigenvalue dari $\mathcal{L}_{w\pi}$ yang non zero, untuk harga $\mu = 0$ memenuhi (4.21), maka harus menunjukkan bahwa $\mu = 0$ adalah eigenvalue dari $M_{j\pi}$, tetapi dengan hipotesa ini, jelas dari (4.25) bahwa $\phi(\lambda) = 0 = \det M_{j\pi}$, membuktikan bahwa $\mu = 0$ adalah eigenvalue dari matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$.

Untuk bukti bagian kedua dari teorema ini adalah, dengan μ sebuah eigenvalue dari $M_{j\pi}$ dan λ memenuhi (4.21), dari bukti bagian pertama didapat $\mu = \mu_i$, sehingga dapat lenyap satu faktor dari μ setelah dikaitkan antara persamaan(4.21) dan (4.26), akan terbukti bahwa λ adalah eigenvalue dari matrik blok SOR $\mathcal{L}_{w\pi}$.

Dengan memilih $w = 1$ didapat $\mathcal{L}_{1\pi}$ diturunkan ke matrik blok Gauss Seidel. Sebagai akibat langsung teorema 4.4 di dapat corollary 4.4 berikut :

Corollary 4.4

Misal matrik A_π (4.2) adalah matrik Cyclic-p order tetap, dengan $A_{i,i} \neq 0$, $1 \leq i \leq N$. Jika μ sebuah eigenvalue dari matrik blok Jacobi (4.19) maka μ^p adalah eigenvalue dari matrik blok Gauss Seidel $\mathcal{L}_{1\pi}$, jadi jika λ sebuah eigenvalue non zero dari $\mathcal{L}_{1\pi}$, maka $\lambda = \mu^p$ dengan μ sebuah eigenvalue dari matrik $M_{j\pi}$, jadi apabila metode iterasi blok Jacobi konvergen, maka metode iterasi blok Gauss Seidel konvergen ,sehingga :

$$\rho(\mathcal{L}_{1\pi}) = (\rho(M_{j\pi}))^p < 1 \qquad (4.27)$$

kemudian didapat :

$$R_\infty(\mathcal{L}_{1\pi}) = p\, R_\infty(M_{j\pi}) \qquad (4.28)$$

Dengan mempertimbangkan corollary 4.4 di atas, dengan asumsi awal matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$(4.19) adalah matrik lrreducibel yang konvergen dan non negatip, maka dari teorema 3.5 (Teorema Stein Rosenberg) bahwa :

$$0 < \rho(\mathcal{L}_{1\pi}) < \rho(M_{j\pi}) < 1 \qquad (4.29)$$

sehingga dari teorema 3.8 didapat :

$$- \ln \rho(\mathcal{L}_{1\pi}) > - \ln \rho(M_{j\pi})$$

$$R_\infty(\mathcal{L}_{1\pi}) > R_\infty(M_{j\pi}) \qquad (4.30)$$

Dengan mempertimbangkan dua metode iterasi blok Jacobi dan blok Gauss Seidel yang menggunakan sebuah persamaan $A_{\pi}X = B_{\pi}$, dengan matrik A_{π} adalah Cyclic dengan indek 2 order tetap, maka ditarik kesimpulan secara teoritis , bahwa dari (4,28) angka asimtotik konvergensi dari metode iterasi Gauss seidel adalah dua kali metode iterasi Jacobi

4.5 <u>Ketentuan secara teoritis dari faktor relaxasi optimum w (w_b) pada matrik Cyclic-p order tetap</u> .

Dengan mengambil matrik A_{π}(4.2) adalah matrik Cyclic-p order tetap, dengan sub matrik diagonal $A_{i,i} \neq 0$, $1 \leq i \leq N$. Kemudian untuk menyelidiki dan menentukan faktor relaxasi optimum w (w_b) yang memaksimalkan angka asimtotik konvergensi $R_\infty(\mathcal{L}_{w\pi})$ atau secara sama dapat mencari :

$$\underset{1 < w < 2}{\text{Minimal}} \; \rho(\mathcal{L}_{w\pi}) = \rho(\mathcal{L}_{w_b\pi}) \qquad (4.31)$$

jika eigenvalue dari $M_{j\pi}^{p}$ adalah real dan non negatip maka faktor relaxasi w_b untuk (4.31) adalah benar-benar khusus (unique) dan menentukan dengan tepat, sebagai akar-akar bilangan real positip yang khusus (unique) yang besarnya kurang dari $\frac{p}{p-1}$ dengan persamaan :

$$(\rho(M_{j\pi})\, w_b)^p = (p^p\, (p-1)^{1-p} (w_b - 1)) \qquad (4.32)$$

dimana $\rho(M_{j\pi})$ jari-jari spectral dari matrik blok Jacobi . Untuk membuktikan faktor relaxasi w_b yang akan memberikan penyelesaian pada (4.31), maka diambil masalah yang khusus , untuk dibawa nantinya ke masalah yang umum. Dengan mengambil p = 2, dari matrik Cyclic-p order tetap, maka faktor relaxasi

w_b dapat dicari sebagai berikut, setelah dimasukkan $p = 2$ ke persamaan (4.32) :

$$(\rho(M_{j\pi})\, w_b)^2 = 4\,(w_b - 1)$$

akan dapat dinyatakan secara sama sebagai berikut :

$$w_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(M_{j\pi})}} \tag{4.33}$$

Sekarang akan dipertimbangkan hubungan fungsional dari eigenvalue dari matrik blok Jacobi dan blok SOR, untuk mendapatkan faktor relaxasi w yang optimum. Dengan mengambil matrik blok Jacobi yang Cyclic lemah indek 2, jika eigenvalue dari $M_{j\pi}^2$ adalah non negatip dan real sesuai definisi 4.1.2 bahwa matrik blok Jacobi $M_{j\pi}$ itu, eigenvalue yang non zero terdapat sepasang, yaitu :

$$-\rho(M_{j\pi}) \leqslant \mu_i \leqslant \rho(M_{j\pi}) < 1$$

dari teorema 4.4 eigenvalue λ dari matrik blok SOR dan eigen value dari matrik blok Jacobi μ berkaitan terus yaitu :

$$(\lambda + w - 1)^2 = \lambda w^2 \mu^2 \tag{4.34}$$

pada harga ini akan ditemukan akar dari persamaan kuadrat untuk menentukan parameter optimum w_b. Akar kuadrat keseluruhan (4.34) untuk $w \neq 0$ menghasilkan :

$$\frac{\lambda + w - 1}{w} = \pm \lambda^{\frac{1}{2}} \mu \tag{4.35}$$

kemudian didefinisikan sebagai fungsi λ :

$$g_w(\lambda) = \frac{\lambda + w - 1}{w}, \quad w \neq 0 \tag{4.36}$$

dan

$$m(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} \mu, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \rho(M_{j\pi}) < 1 \tag{4.37}$$

$g_w(\lambda)$ adalah garis lurus sepanjang (1,1) yang turun

$$w_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(M_j)}} = 1,071797$$

dari permasalahan diatas akan diselesaikan dengan tiga metode iterasi yaitu metode iterasi Jacobi, Gauss seidel dan SOR dengan toleransi kesalahan 10^{-5} dan iterasi akan berhenti apabila telah menghasilkan kesalahan yang lebih kecil dari 10^{-5}.

Dalam perhitungan ini kesalahan setelah iterasi ke - m dapat didefinisikan sebagai :

$$\underset{1 \leqslant i \leqslant 4}{\text{maks}} \left| X_i^{(m+1)} - X_i^{(m)} \right|$$

apabila nilai pendekatan U_i diganti dengan X_i maka penjabaran rumus dari masing-masing iterasi adalah sebagai berikut :

1. Metode iterasi Jacobi :

$$X_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j^{(m)} + C_i$$

dimana :

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & , \text{ setiap } i \neq j \\ 0 & , \text{ setiap } i = j \end{cases}$$

$$C_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad , \text{ setiap } i,j = 1,2,\ldots,n.$$

dimana $\rho(M_j) = 0,5 < 1$, syarat kekonvergenan dipenuhi .

2. Metode iterasi Gauss seidel :

$$X_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} X_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} X_j^{(m)} + C_i$$

dimana :

Tabel 3.1 Iterasi Jacobi

Iterasi ke-m / Harga pendekatan	0	1	2	-	10	-	17
x_1	0	6,641760	9,317760	-	12,41155	-	12,423592
x_2	0	5.352000	8,672880	-	11,55254	-	11.563745
Harga error $\varepsilon^{(m)}$	16.972632	8,486316	4,243158	-	0,008284	-	0.000129

ke-m	18	19	20	21	22	-
x_1	12.423633	12,423658	12,423668	12,423674	12,423677	-
x_2	11,563796	11,563816	11,563829	11,563834	11.563837	-
$\varepsilon^{(m)}$	0,000065	0,000032	0,000016	0,000008	0,000004	-

2. Dengan mengambil metode iterasi Gauss seidel, maka matrik Gauss seidelnya sesuai definisi 2.1.4.2 adalah :

$$M = \mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$C = (D-E)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,641760 \\ 5,352000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,641760 \\ 8,672880 \end{bmatrix}$$

sehingga metode Gauss seidel ke-m adalah :

$$X^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} X^{(m)} + \begin{bmatrix} 6,641760 \\ 8,672880 \end{bmatrix}$$

dengan memberi vektor percobaan awal $X^{(0)} = [0 \quad 0]^T$, akan di dapat harga pendekatan vektor X ke-1 sebagai berikut :

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,641760 \\ 8,672880 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,641760 \\ 8,672880 \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{, setiap } i \neq j \\ 0 & \text{, setiap } i = j \end{cases}$$

$$C_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{, setiap } i,j = 1,2,\ldots,n.$$

dimana $\rho(\mathcal{L}_1) = 0,25 < 1$, syarat kekonvergenan di penuhi.

3. Metode iterasi Succesive Overrelaxation (SOR) :

$$X_i^{(m+1)} = w_b \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} X_j^{(m+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} X_j^{(m)} + C_i \right\} + (1-w_b)\, X_i^{(m)}$$

dimana :

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{, setiap } i \neq j \\ 0 & \text{, setiap } i = j \end{cases}$$

$$C_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{, setiap } i,j = 1,2,\ldots,n.$$

$w_b = 1,071797$

jadi $\rho(\mathcal{L}_{w_b}) = w_b - 1 = 0,071797 < 1$, syarat ke - konvergenan dipenuhi .

Kemudian perhitungan akhir metode iterasi Jacobi , Gauss seidel dan SOR diselesaikan dengan komputer , yang menggunakan bantuan program fortran, untuk hasil dan bentuk programnya seperti pada halaman berikutnya, dari halaman ini . dari hasil iterasi tersebut, terlihat metode SOR paling sedikit jumlah iterasinya, dengan toleransi kesalahan yang sama. Jadi metode SOR adalah metode yang lebih baik dibanding de - ngan dua metode lainnya yang diperkenalkan, untuk w_b optimum.

```
TYPE CONTOH1.FOR
C2345677
C**** PROGRAM JACOBI ***
C
      DIMENSION A(10,10),X(10),Z(10)
      OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
      OPEN(6,FILE='LPT1')
      N=4
      ITMAK=100
      EPS=0.00001
      WRITE(6,1)
 1    FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA :',/,
     A        '===================='/)
C**** BACA DAN CETAK DATA ****
C
      DO 10 I=1,N
      READ(5,2)(A(I,J),J=1,N+1)
      WRITE(6,15)(A(I,J),J=1,N+1)
      Z(I)=0
 10   CONTINUE
  2   FORMAT(5F8.5)
15    FORMAT(5F10.5)
      WRITE(6,3)
  3   FORMAT(//,'             HASIL PERHITUNGAN'/,
     B        '-----------------------------------------------------------'/,
     C        'ITERASI KE    X(1)          X(2)        X(3)        X(4)
     * '/,
     D        '-----------------------------------------------------------'/
      DO 20 I=1,N
      Y=A(I,I)
      DO 30 J=1,N+1
  30  A(I,J)=A(I,J)/Y
  20  CONTINUE
C*** MULAI PROSES ITERASI ***
C
      DO 40 ITER=1,ITMAK
      XMAK=0.
      DO 35 I=1,N
      AWL=Z(I)
      X(I)=A(I,N+1)
      DO 50 J=1,N
      IF(J.EQ.I)GOTO 50
      X(I)=X(I)-A(I,J)*Z(J)
 50   CONTINUE
      IF(ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK)GO TO 35
      XMAK=ABS(AWL-X(I))
 35   CONTINUE
      DO 55 I=1,N
 55   Z(I)=X(I)
 C    CETAK HASIL TIAP ITERASI
      WRITE(6,4)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
      IF(XMAK.LT.EPS)GO TO 500
 40   CONTINUE
      WRITE(6,5)
 5    FORMAT('PROSES TIDAK KONVERGEN')
      GOTO 6
 4    FORMAT(I6,4F12.5)
```

```
500    WRITE(6,102)
102    FORMAT('-------------------------------------------------------',
      *//,'HASIL AKHIR YANG DIPEROLEH =',/)
       DO 65 I=1,N
65     WRITE(6,103)I,X(I)
103    FORMAT(/,'X(',I2,')=',F13.5)
       STOP
6      END

B:\>
```

```
MATRIK PERBESARANNYA :
====================

   4.00000  -1.00000  -1.00000   0.00000   0.00000
  -1.00000   4.00000   0.00000  -1.00000   0.00000
  -1.00000   0.00000   4.00000  -1.00000   1.00000
   0.00000  -1.00000  -1.00000   4.00000   1.00000
```

HASIL PERHITUNGAN

ITERASI KE	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
1	0.00000	0.00000	0.25000	0.25000
2	0.06250	0.06250	0.31250	0.31250
3	0.09375	0.09375	0.34375	0.34375
4	0.10938	0.10938	0.35938	0.35938
5	0.11719	0.11719	0.36719	0.36719
6	0.12109	0.12109	0.37109	0.37109
7	0.12305	0.12305	0.37305	0.37305
8	0.12402	0.12402	0.37402	0.37402
9	0.12451	0.12451	0.37451	0.37451
10	0.12476	0.12476	0.37476	0.37476
11	0.12488	0.12488	0.37488	0.37488
12	0.12494	0.12494	0.37494	0.37494
13	0.12497	0.12497	0.37497	0.37497
14	0.12498	0.12498	0.37498	0.37498
15	0.12499	0.12499	0.37499	0.37499

```
HASIL AKHIR YANG DIPEROLEH =

X( 1)=        0.12499

X( 2)=        0.12499

X( 3)=        0.37499

X( 4)=        0.37499
```

```
TYPE CONTOH2.FOR
C2345677
C**** PROGRAM GAUSS SEIDEL ****
      DIMENSION A(10,10),X(10)
      OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
      OPEN(6,FILE='LPT1')
      N=4
      ITMAK=100
      EPS=0.00001
      WRITE(6,9)
 9    FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA :',/,
     A        '======================'/)
C**** BACA DAN CETAK DATA ****
C
      DO 10 I=1,N
      READ(5,100)(A(I,J),J=1,N+1)
      WRITE(6,99)(A(I,J),J=1,N+1)
      X(I)=0
 10   CONTINUE
      PAUSE
 100  FORMAT(5F8.5)
 99   FORMAT(5F10.5)
      WRITE(6,101)
 101  FORMAT(//,'                HASIL PERHITUNGAN'/,
     B       '------------------------------------------------------------------'/
     C       'ITERASI KE     X(1)          X(2)          X(3)          X(4)
     *  '/,
     D       '------------------------------------------------------------------'/
      DO 20 I=1,N
      Y=A(I,I)
      DO 30 J=1,N+1
  30  A(I,J)=A(I,J)/Y
  20  CONTINUE
C*** MULAI PROSES ITERASI ***
C
      DO 40 ITER=1,ITMAK
      XMAK=0.
      DO 35 I=1,N
      AWL=X(I)
      X(I)=A(I,N+1)
      DO 50 J=1,N
      IF(J.EQ.I)GOTO 50
      X(I)=X(I)-A(I,J)*X(J)
 50   CONTINUE
      IF(ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK)GO TO 35
      XMAK=ABS(AWL-X(I))
 35   CONTINUE
      WRITE(6,400)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
      IF(XMAK.LT.EPS) GOTO 500
 40   CONTINUE
      WRITE(6,300)
 300  FORMAT('TIDAK KONVERGEN')
 400  FORMAT(I5,4F13.5)
 500  WRITE(6,102)
 102  FORMAT('------------------------------------------------------------------
     *')
```

```
      DO 60 I=1,N
60    WRITE(6,600)I,X(I)
600   FORMAT(/,'X(',I2,') = ',F13.5)
      END
```

B:\>

MATRIK PERBESARANNYA :

4.00000	-1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	4.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
-1.00000	0.00000	4.00000	-1.00000	1.00000
0.00000	-1.00000	-1.00000	4.00000	1.00000

HASIL PERHITUNGAN

ITERASI KE	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
1	0.00000	0.00000	0.25000	0.31250
2	0.06250	0.09375	0.34375	0.35938
3	0.10938	0.11719	0.36719	0.37109
4	0.12109	0.12305	0.37305	0.37402
5	0.12402	0.12451	0.37451	0.37476
6	0.12476	0.12488	0.37488	0.37494
7	0.12494	0.12497	0.37497	0.37498
8	0.12498	0.12499	0.37499	0.37500
9	0.12500	0.12500	0.37500	0.37500
10	0.12500	0.12500	0.37500	0.37500

X(1) = 0.12500

X(2) = 0.12500

X(3) = 0.37500

X(4) = 0.37500

```
C2345678
C      METODE ITERASI SUCCESSIVE OVERRELAXATION (SOR)
       DIMENSION A(10,10),X(10)
       OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
       OPEN(6,FILE='CON')
       N=4
       W=1.071797
       ITMAX=100
       EPS =0.00001
       WRITE(6,3)
 3     FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA :',/,
      A       '======================')
C*** BACA DAN CETAK DATA ***
C
       DO 10 I=1,N
       READ(5,11)(A(I,J),J=1,N+1)
       WRITE(6,11)(A(I,J),J=1,N+1)
       X(I)=0
 10    CONTINUE
 11    FORMAT(5F8.5)
       WRITE(6,12)
 12    FORMAT(//,'        HASIL PERHITUNGAN'/,
      B       '-------------------------------------------------------------------',/,
      C       'ITERASI KE     X(1)           X(2)           X(3)           X(4) '/,
      D       '-------------------------------------------------------------------')
       DO 20 I=1,N
       Y=A(I,I)
       DO 30 J=1,N+1
 30    A(I,J)=A(I,J)/Y
 20    CONTINUE
C*** MULAI PROSES ITERASI ***
C
       DO 60 ITER=1,ITMAX
       XMAK=0
       DO 80 I=1,N
       AWL=X(I)
       X(I)=W*A(I,N+1)
       DO 50 J=1,N
       IF(J.EQ.I) GOTO 50
       X(I)=X(I)-W*A(I,J)*X(J)
 50    CONTINUE
       X(I)=X(I)+(1-W)*AWL
       IF(ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK) GOTO 80
       XMAK=ABS(AWL-X(I))
 80    CONTINUE
       WRITE(6,400)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
       IF(XMAK.LT.EPS) GOTO 500
 60    CONTINUE
       WRITE(6,300)
 300   FORMAT('TIDAK KONVERGEN')
 400   FORMAT(I5,4F13.5)
 500   WRITE(6,102)
 102   FORMAT('-------------------------------------------------------------------')
       DO 90 I=1,N
 90    WRITE(6,600)I,X(I)
 600   FORMAT(/,'X(',I2,') =',F13.5)
       END
```

MATRIK PERBESARANNYA :
=====================

```
 4.00000-1.00000-1.00000 0.00000 0.00000
-1.00000 4.00000 0.00000-1.00000 0.00000
-1.00000 0.00000 4.00000-1.00000 1.00000
 0.00000-1.00000-1.00000 4.00000 1.00000
```

HASIL PERHITUNGAN

ITERASI KE	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
1	0.00000	0.00000	0.26795	0.33975
2	0.07180	0.11027	0.35898	0.36929
3	0.12058	0.12334	0.37344	0.37455
4	0.12445	0.12485	0.37484	0.37495
5	0.12496	0.12499	0.37499	0.37500
6	0.12500	0.12500	0.37500	0.37500
7	0.12500	0.12500	0.37500	0.37500

X(1) = 0.12500

X(2) = 0.12500

X(3) = 0.37500

X(4) = 0.37500

```
C2345678
C      UNTUK HARGA W < Wb
C      METODE ITERASI SUCCESSIVE OVERRELAXATION (SOR)
       DIMENSION A(10,10),X(10)
       OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
       OPEN(6,FILE='CON')
       N=4
       W=0.9000
       ITMAX=100
       EPS =0.00001
       WRITE(6,3)
3      FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA :',/,
      A       '======================'/)
C*** BACA DAN CETAK DATA ***
C
       DO 10 I=1,N
       READ(5,11)(A(I,J),J=1,N+1)
       WRITE(6,11)(A(I,J),J=1,N+1)
       X(I)=0
10     CONTINUE
11     FORMAT(5F8.5)
       WRITE(6,12)
12     FORMAT(//,'      HASIL PERHITUNGAN'/,
      B       '-------------------------------------------------------------'/,
      C       'ITERASI KE     X(1)          X(2)          X(3)          X(4) '/,
      D       '-------------------------------------------------------------'/)
       DO 20 I=1,N
       Y=A(I,I)
       DO 30 J=1,N+1
30     A(I,J)=A(I,J)/Y
20     CONTINUE
C*** MULAI PROSES ITERASI ***
C
       DO 60 ITER=1,ITMAX
       XMAK=0
       DO 80 I=1,N
       AWL=X(I)
       X(I)=W*A(I,N+1)
       DO 50 J=1,N
       IF(J.EQ.I) GOTO 50
       X(I)=X(I)-W*A(I,J)*X(J)
50     CONTINUE
       X(I)=X(I)+(1-W)*AWL
       IF(ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK) GOTO 80
       XMAK=ABS(AWL-X(I))
80     CONTINUE
       WRITE(6,400)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
       IF(XMAK.LT.EPS) GOTO 500
60     CONTINUE
       WRITE(6,300)
300    FORMAT('TIDAK KONVERGEN')
400    FORMAT(I5,4F13.5)
500    WRITE(6,102)
102    FORMAT('-------------------------------------------------------------')
       DO 90 I=1,N
90     WRITE(6,600)I,X(I)
600    FORMAT(/,'X(',I2,') =',F13.5)
       END
```

MATRIK PERBESARANNYA :
====================

```
 4.00000-1.00000-1.00000 0.00000 0.00000
-1.00000 4.00000 0.00000-1.00000 0.00000
-1.00000 0.00000 4.00000-1.00000 1.00000
 0.00000-1.00000-1.00000 4.00000 1.00000
```

HASIL PERHITUNGAN

ITERASI KE	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)
1	0.00000	0.00000	0.37500	0.51563
2	0.14063	0.24609	0.43359	0.37207
3	0.18457	0.08569	0.36694	0.35870
4	0.07745	0.12071	0.35509	0.37407
5	0.13970	0.13231	0.39012	0.38387
6	0.12606	0.12507	0.37117	0.36915
7	0.12306	0.12204	0.37400	0.37644
8	0.12449	0.12683	0.37585	0.37528
9	0.12626	0.12467	0.37515	0.37479
10	0.12430	0.12483	0.37458	0.37488
11	0.12513	0.12509	0.37521	0.37517
12	0.12505	0.12504	0.37498	0.37492
13	0.12498	0.12494	0.37497	0.37501
14	0.12498	0.12502	0.37501	0.37501
15	0.12502	0.12500	0.37501	0.37500
16	0.12499	0.12500	0.37499	0.37500
17	0.12500	0.12500	0.37500	0.37500

X(1) = 0.12500

X(2) = 0.12500

X(3) = 0.37500

X(4) = 0.37500

```
C2345678
C      UNTUK HARGA W > Wb
C      METODE ITERASI SUCCESSIVE OVERRELAXATION (SOR)
       DIMENSION A(10,10),X(10)
       OPEN(5,FILE='DATA-03.DAT')
       OPEN(6,FILE='LPT1')
       N=4
       W=1.5
       ITMAX=100
       EPS =0.00001
       WRITE(6,3)
 3     FORMAT('MATRIK PERBESARANNYA :',/,
      A       '=====================')
C*** BACA DAN CETAK DATA ***
C
       DO 10 I=1,N
       READ(5,11)(A(I,J),J=1,N+1)
       WRITE(6,11)(A(I,J),J=1,N+1)
       X(I)=0
 10    CONTINUE
 11    FORMAT(5F8.5)
       WRITE(6,12)
 12    FORMAT(//,'      HASIL PERHITUNGAN'/,
      B       '------------------------------------------------------------'/,
      C       'ITERASI KE    X(1)         X(2)         X(3)         X(4) '/,
      D       '------------------------------------------------------------')
       DO 20 I=1,N
       Y=A(I,I)
       DO 30 J=1,N+1
 30    A(I,J)=A(I,J)/Y
 20    CONTINUE
C*** MULAI PROSES ITERASI ***
C
       DO 60 ITER=1,ITMAX
       XMAK=0
       DO 80 I=1,N
       AWL=X(I)
       X(I)=W*A(I,N+1)
       DO 50 J=1,N
       IF(J.EQ.I) GOTO 50
       X(I)=X(I)-W*A(I,J)*X(J)
 50    CONTINUE
       X(I)=X(I)+(1-W)*AWL
       IF(ABS(AWL-X(I)).LE.XMAK) GOTO 80
       XMAK=ABS(AWL-X(I))
 80    CONTINUE
       WRITE(6,400)ITER,X(1),X(2),X(3),X(4)
       IF(XMAK.LT.EPS) GOTO 500
 60    CONTINUE
       WRITE(6,300)
 300   FORMAT('TIDAK KONVERGEN')
 400   FORMAT(I5,4F13.5)
 500   WRITE(6,102)
 102   FORMAT('------------------------------------------------------------')
       DO 90 I=1,N
 90    WRITE(6,600)I,X(I)
 600   FORMAT(/,'X(',I2,') =',F13.5)
       END
```

sebab $X^{(0)} = [0 \quad 0]^T$, maka seperti pada iterasi Jacobi di - dapat :

$$\|\mathcal{E}^{(0)}\| = \|X^{(0)} - X\| = 16,972632$$

didapat juga :

$$\|\mathcal{E}^{(1)}\| = \|X^{(1)} - X\| = \sqrt{(6,641760-12,423680)^2+(8,67288-11,56384)^2}$$

$$= 6,464383$$

Apabila perhitungan diteruskan akan didapat seperti pada tabel 3.2 iterasi Gauss seidel seperti dibawah ini :

Tabel 3.2 Iterasi Gauss seidel

Iterasi ke-m / Harga pendekatan	0	1	2	-	8	9
x_1	0	6,641760	10,97820	-	12,42333	12,42359
x_2	0	8,672880	10,84110	-	11,56366	11,56379
Harga error $\mathcal{E}^{(m)}$	16,972632	6,464383	1,616096	-	0,000395	0,000099

ke-m	10	11	12	-
x_1	12,423658	12,423674	12,423679	-
x_2	11,563829	11,563837	11,563839	-
$\mathcal{E}^{(m)}$	0,000025	0,000006	0,0000015	-

3. Dengan mengambil metode iterasi SOR (Successive Over relaxation) dengan faktor relaxasi w dalam interval $1 < w < 2$ ambil $w = 1,071797$ maka matrik SOR sesuai definisi 2.1.4.3 adalah :

$$\mathcal{L}_w = (D - wE)^{-1}(wF + (1-w)D)$$