BAB II

KONSEP DASAR

2.1 PEMETAAN (FUNGSI)

Definisi 1

Diketahui X dan Y adalah himpunan-himpunan dan $A \subset X$. Suatu pemetaan (fungsi) T dari A ke Y adalah suatu aturan yang pada setiap anggota dari A menentukan dengan tunggal satu anggota dalam Y. Himpunan A dinamakan daerah sumber atau domain disajikan dengan D(T) dan Y disebut daerah kawan atau co domain.

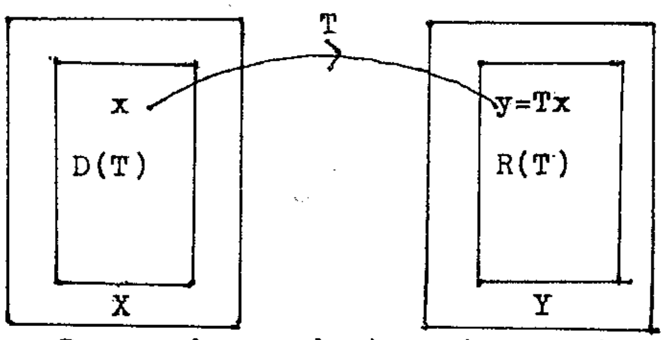
$$T : A \longmapsto Y$$
$$D(T) \longmapsto Y$$

Apabila $x \in D(T)$, maka kawannya (tunggal) $y \in Y$ disajikan dengan Tx atau ditulis $y = Tx$, dikatakan bahwa x dibawa ke Tx

$$T : D(T) \longmapsto Y$$
$$x \longmapsto Tx$$

Dan himpuan-anggota-anggota dari Y yang mempunyai kawan dalam D(T) disebut daerah hasil atau range disajikan dengan R(T).

$$R(T) = \{ y \in Y \;/\; y = Tx \text{ untuk setiap } x \in D(T) \}$$



gb 1 : Penggambaran dari suatu pemetaan

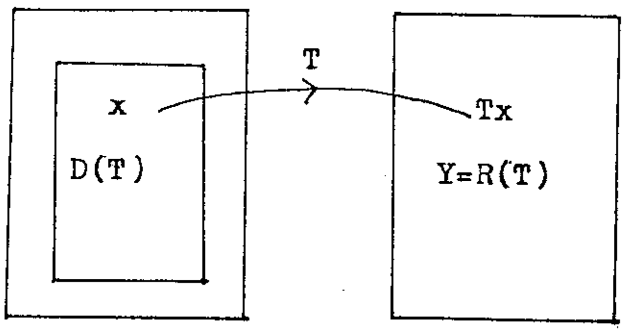
Definisi 2

Diketahui X dan Y adalah himpunan-himpunan dan $A \subset X$. Jika setiap $y \in Y$ mempunyai kawan didalam D(T) atau dengan kata lain jika setiap $y \in Y$ berasal dari suatu $x \in D(T)$ maka fungsi ini disebut dengan fungsi A onto Y dengan A=D(T) sehingga berlaku Y=R(T) (daerah hasil (range) berhimpit dengan daerah kawan (co domain)).

Definisi 3

a. Pemetaan (fungsi) yang onto disebut juga pemetaan surjektif.

$$T : D(T) \longrightarrow R(T)$$
$$x \longrightarrow Tx$$

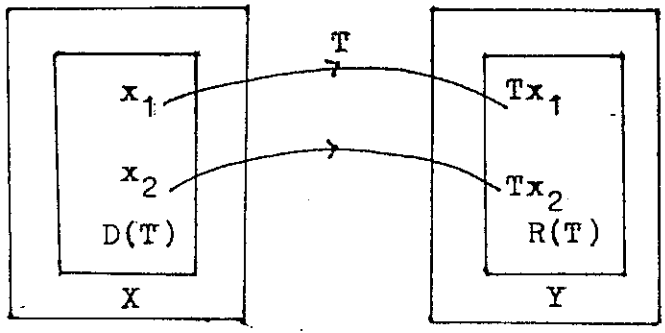


Gb 2 : Pemetaan surjektif

b. Pada pemetaan dengan sifat bahwa $y \in Y$ hanya mempunyai satu kawan saja dalam D(T) disebut fungsi injektif. Sehingga pada suatu fungsi injektif untuk setiap pasangan $x_1, x_2 \in D(T)$ berlaku :

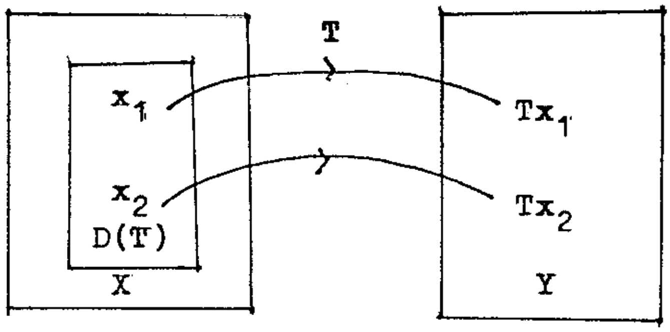
$Tx_1 = Tx_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$, dengan kontraposisinya

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow Tx_1 \neq Tx_2$



Gb 3 : Pemetaan injektif

c. Pemetaan (fungsi) injektif dan sekaligus surjektif disebut dengan pemetaan bijektif.



Gb 4 : Pemetaan bijektif

2.2 Ruang Metrik

Definisi 4

Jika X adalah suatu himpunan yang tidak kosong, dibentuk fungsi $d = XxX \longmapsto R$ dengan sifat untuk sembarang x,y,z X berlaku :

1. $d(x,y) \geqslant 0$
2. $d(x,y) > 0$ untuk $x \neq y$
3. $d(x,y) = 0$ untuk $x = y$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

dengan d disebut fungsi jarak atau metrik dari X. Maka pasangan (X,d) disebut ruang metrik dan disingkat X.

Contoh 1

(R,d) dengan R adalah sistim bilangan riil dan metrik d dinamakan metrik biasa yang didefinisikan sebagai :

$$d(x,y) = |x - y| \quad \forall x,y \in R$$

2.3 HIMPUNAN TERBUKA DAN HIMPUNAN TERTUTUP

Definisi 5

Misalkan X = (X,d) adalah suatu ruang metrik.

Untuk sembarang $x_o \in X$ dan setiap $r > 0$, himpunan-himpunan

a. $B(x_o,r) = \{x \in X \,/\, d(x,x_o) < r\}$ disebut bola terbuka

b. $\bar{B}(x_o,r) = \{x \in X \,/\, d(x,x_o) \leq r\}$ disebut bola tertutup.

c. $S(x_o,r) = \{x \in X \,/\, d(x,x_o) = r\}$ disebut bola atau sphere.

Dalam keadaan diatas x_o adalah pusat dan r adalah jari-jari.

Contoh 2

Diketahui ruang metrik (R,d) dengan metrik

$d(x,y) = |x - y|$

$B(0,1) = \{y \in R \,/\, -1 < y < 1\}$ adalah bola terbuka dengan pusat 0 dan jari-jari 1.

Definisi 6

Misalkan X ruang metrik dan $x_o \in X$ maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ bola terbuka $B(x_o, \varepsilon)$ dengan jari-jari ε disebut persekitaran titik x_o.

Definisi 7

Misalkan M adalah himpunan bagian dari suatu ruang metrik X maka titik $x_o \in X$ disebut titik limit dari M jika setiap persekitaran dari x_o memuat suatu titik $y \in M$ yang berlainan dengan x_o atau titik $x_o \in X$ disebut titik limit dari M jika untuk setiap $r > 0$, $B(x_o,r) \cap M - \{x_o\} \neq \emptyset$

Contoh 3

$M = \{x \in R \,/\, 0 < x \leq 3\}$, R adalah himpunan bilangan riil. Maka :

Titik 0 adalah titik limit dari M dan $0 \notin M$

Titik 3 adalah titik limit dari M dan $3 \in M$

Definisi 8

Misal $M \subset X$, himpunan M disebut himpunan tertutup jika M memuat semua titik limitnya.

Dan himpunan $K \subset X$ disebut himpunan terbuka jika $K = M^c$ dengan M himpunan tertutup.

Definisi 9

Himpunan yang terdiri atas titik-titik dari M dan titik-titik limit dari M disebut penutup M dengan notasi $\overline{M}$. Jadi $\overline{M} = M \cup M^d$ dengan M^d = himpunan semua titik limit dari M

Definisi 10

Suatu himpunan bagian M dari suatu ruang metrik X dikatakan rapat (dense) dalam X jika $\overline{M} = X$.
Sedangkan X dikatakan terpisah (separable) jika X mempunyai himpunan bagian terbilang yang mana adalah rapat dalam X.

2.4 KEKONVERGENAN DARI RUANG METRIK

Definisi 11

Barisan (x_n) dalam ruang metrik X dikatakan konvergen ke $x \in X$ ditulis $x_n \longrightarrow x$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk $n > N$ $d(x_n, x) < \varepsilon$ atau $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Definisi 12

Diameter $\delta(M)$ dari himpunan bagian yang tidak kosong M dalam ruang metrik X adalah batas atas terkecil atau supremum dari $d(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$ atau ditulis

$$\delta(M) = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

M dikatakan terbatas jika $\delta(M) < \infty$ (diameternya berhingga).

Definisi 13

Barisan (x_n) dalam ruang metrik X adalah terbatas jika terdapat suatu bilangan positif $c > 0$, sedemikian sehingga $|x_n| \leq c$ dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$

Teorema 1

Misalkan X adalah ruang metrik. Maka suatu barisan konvergen dalam X adalah terbatas dan mempunyai limit tunggal.

Bukti :

Andaikata $x_n \longrightarrow x$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $d(x_n,x) < \varepsilon$ untuk $n > N$ (sesuai definisi 9).

Ambil $= 1$ sehingga $d(x_n,x) < 1$

Misal $c = \max \{1,\ d(x_1,x),\ d(x_2,x),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ d(x_n,x)\}$

maka jelas $d(x_n,x) \leq c$ untuk $n=1,2,\ldots.$

jadi terbukti barisan (x_n) terbatas.

Sekarang akan dibuktikan barisan konvergen mempunyai limit tunggal.

Misal $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_1$

Maka menurut definisi 11, jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapatlah bilangan asli N_1 dan N_2 sedemikian sehingga untuk $n > N_1$ maka $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$,

dan untuk $n > N_2$ maka $d(x_n,x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

Ambil $N = \max \{N_1,N_2\}$ maka untuk $n > N$ diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,x_1) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,x_1) \quad \text{(sesuai definisi 4 butir 4)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sembarang maka diperoleh $d(x,x_1)=0$ dan menurut definisi 4 butir 2 maka

$d(x,x_1) = 0$ jika dan hanya jika $x = x_1$

Jadi terbukti limit suatu barisan konvergen adalah tunggal.

Definisi 14

Barisan (x_n) di ruang metrik X disebut cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ untuk $m,n > N$

Contoh 4

Barisan (x_n) di ruang metrik (R,d) dengan $d(x_m,x_n) = |x_m - x_n|$

dan $x_n = \frac{1}{n}$, n= 1,2, ... adalah barisan cauchy.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $\frac{1}{n} < \varepsilon$

untuk $m,n > N$ dan untuk $n > N$ berlaku :

$$
\begin{aligned}
d(x_m,x_n) &= |x_m - x_n| \\
&= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \\
&= \left|\frac{m-n}{mn}\right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Definisi 15

Ruang metrik X disebut lengkap jika setiap barisan cauchy di X konvergen.

Teorema 2

M himpunan bagian dari ruang metrik X dan $\overline{M}$ adalah penutup dari himpunan M maka $x \in \overline{M}$ jika dan hanya jika ada barisan (x_n) di M sedemikian sehingga $x_n \longrightarrow \bar{x}$ dengan n= 1,2,.....

Bukti :

a. ($\Longrightarrow$)

$x \in \overline{M}$ maka menurut definisi 9, $x \in M$. Jika $x \in M$ maka jelas ada barisan $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ di M yang konvergen ke x. Jika $x \notin M$ berarti x adalah titik limit dari M maka setiap bola terbuka $B(x, \frac{1}{n})$ dengan $n = 1, 2, \ldots$ mengandung $x_n \in M$. Sehingga jelas $x_n \longrightarrow x$ sebab $\frac{1}{n} \to 0$ untuk $n \to \infty$

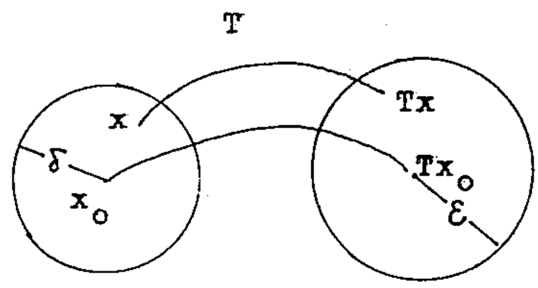
b. ($\Longleftarrow$)

Jika barisan (x_n) di M dan $x_n \longrightarrow x$ maka menurut definisi 7, $x \in M$ atau setiap persekitaran dari x mengan - dung $x_n \neq x$, jadi x adalah titik limit dari M.
Maka terbukti $x \in \overline{M}$ (sesuai definisi 9)

2.5 PEMETAAN KONTINU

Definisi 16

Suatu fungsi $T : X \longmapsto Y$ (dengan $X=(X,d)$ dan $Y=(Y,\tilde{d})$ adalah ruang metrik) dikatakan kontinu di titik $x_o \in X$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\tilde{d}(Tx, Tx_o) < \varepsilon$ untuk semua x memenuhi $d(x, x_o) < \delta$
Sedangkan fungsi T dikatakan kontinu di X jika kontinu di titik $x_o \in X$



Gb 5 : Pertidaksamaan dalam definisi 16 , digambarkan dalam hal pada bidang Euclid $X=R^2$ dan $Y=R^2$

Teorema 3

Suatu pemetaan $T : X \longmapsto Y$ dari suatu ruang me - trik $X=(X,d)$ ke dalam ruang metrik $Y=(Y,\bar{d})$ adalah kontinu pada setiap titik $x_o \in X$ jika dan hanya jika

$$x_n \longrightarrow x_o \text{ maka } Tx_n \longrightarrow Tx_o$$

Bukti :

a. $(\Longrightarrow)$

Misal T kontinu di x_o, menurut definisi 16, jika dibe rikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d(x,x_o) < \delta \text{ maka } \bar{d}(Tx,Tx_o) < \varepsilon$$

Misal $x_n \longrightarrow x_o$ maka menurut definisi 11 jika untuk $\delta > 0$ terdapat suatu N sedemikian sehingga untuk semua $n > N$ didapat

$$d(x_n,x_o) < \delta$$

Dari sini untuk semua $n > N$ maka $\bar{d}(Tx,Tx_o)$

Ini menunjukkan bahwa $Tx_n \longrightarrow Tx_o$

b. $(\Longleftarrow)$

Diasumsikan bahwa $x_n \longrightarrow x_o$ maka $Tx_n \longrightarrow Tx_o$ dan akan dibuktikan bahwa T adalah kontinu di x_o.

Andaikata pernyataan ini salah maka terdapatlah suatu $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat suatu $x \neq x_o$ memenuhi

$$d(x,x_o) < \delta \quad \text{tetapi } \bar{d}(Tx,Tx_o) \geq \varepsilon$$

Dalam kenyataan, untuk $\delta = \frac{1}{n}$ terdapat suatu x_n memenuhi

$$d(x_n,x_o) < \frac{1}{n} \quad \text{tetapi } \bar{d}(Tx_n,Tx_o) \geq \varepsilon$$

jelas $x_n \longrightarrow x_o$ tetapi barisan (Tx_n) tidak konvergen ke Tx_o. Terjadi kontradiksi, sehingga $Tx_n \longrightarrow Tx_o$

2.6 KELENGKAPAN DARI RUANG METRIK

Definisi 17

Misalkan $X=(X,d)$ dan $\breve{X}=(\breve{X},\breve{d})$ adalah suatu ruang metrik maka :

a. Suatu pemetaan $T : X \longmapsto \breve{X}$ dikatakan isometri jika untuk semua $x,y \in X$, $\breve{d}(Tx,Ty) = d(x,y)$

b. Ruang metrik X dikatakan isometri dengan ruang $\breve{X}$ jika terdapat isometri bijektif dari X onto $\breve{X}$. Ruang X dan $\breve{X}$ kemudian dikatakan ruang isometri.

Definisi 18

Misalkan $X=(X,d)$ sembarang ruang metrik. Ruang metrik lengkap $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ disebut kelengkapan untuk (X,d) jika dipenuhi :

a. $X=(X,d)$ isometri dengan $\hat{X}_o=(\hat{X}_o,\hat{d}) \subset (\hat{X},\hat{d})$

b. $\hat{X}_o$ rapat dalam $\hat{X}$

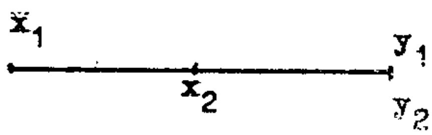
2.7 TEOREMA BOLZANO WEIRSTRASS

Teorema 4

Setiap kumpulan terbatas yang memuat titik tak berhingga banyaknya mempunyai paling sedikit satu titik limit.

Bukti :

Kumpulan terbatas, jadi dapat diletakkan di suatu selang $[x_1,y_1]$. Bagilah selang tersebut menjadi 2 bagian yang sama



Paling sedikit satu dari kedua bagian itu memuat titik tak berhingga banyaknya. Sebutlah selang ini $[x_2,y_2]$. Selang ini akan dibagi lagi menjadi 2 bagian yang sama dst.

Kita peroleh selang $[x_1,y_1], [x_2,y_2], \ldots\ldots, [x_n,y_n], \ldots$

Selang $[x_n,y_n]$ terletak didalam selang $[x_{n-1},y_{n-1}]$ dan memuat tak berhingga banyak titik. Karena panjang selang $[x_n,y_n]$ sama dengan $\left(\frac{x_1-y_1}{2^{n-1}}\right)$ maka panjang selang ini menuju ke nol. Jelas ada satu titik z yang terletak di semua selang $[x_n,y_n]$ dengan n= 1,2,...

Disekitar titik z kita mengambil selang (p,q) dan didalam (p,q) ada selang $[x_n,y_n]$, yang didalamnya terletak titik tak berhingga banyaknya. Jadi z merupakan titik limit.

jadi teorema terbukti.

2.8 KEKOMPAKAN DARI RUANG METRIK

Definisi 19

Suatu ruang metrik X=(X,d) dikatakan kompak jika setiap barisan dalam X mempuyai barisan bagian yang konvergen. Suatu himpunan bagian M dari X dikatakan kompak jika M adalah kompak dipandang sebagai suatu ruang bagian dari X, yaitu jika setiap barisan dalam M mempunyai suatu barisan bagian konvergen yang mana limitnya adalah suatu elemen dari M.

Teorema 5

Suatu himpunan bagian kompak M dari suatu ruang metrik adalah tertutup dan terbatas.

Bukti :

Untuk setiap $x \in \overline{M}$ terdapat suatu barisan (x_n) didalam M sedemikian sehingga $x_n \longrightarrow x$ menurut teorema 2. Karena M adalah kompak maka $x \in M$. Oleh karena itu M adalah tertutup karena $x \in \overline{M}$ diambil sembarang.

Akan dibuktikan bahwa M adalah terbatas.

Jika M tidak terbatas, M ini akan memuat suatu barisan tidak terbatas (y_n) sedemikian sehingga $d(y_n, b) > n$, dimana b adalah sembarang elemen tertentu. Barisan ini tidak dapat mempunyai suatu barisan bagian yang konvergen. Karena suatu barisan bagian konvergen haruslah terbatas menurut teorema 1.

2.9 MATRIKS

Definisi 20

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil /komplex) yang disusun secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matriks.

Contoh 5

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{Baris } 2 \\ \end{array} \\ \begin{array}{rcccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Kolom} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \end{array}$$

Definisi 21

Suatu matriks diberi notasi dengan huruf besar A,B,dan lain-lain , secara lengkap ditulis matriks $A = (\alpha_{ij})$ artinya suatu matiks A yang elemen-elemennya α_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.

Definisi 22

Operasi-operasi pada matriks adalah sebagai berikut:

a. Penjumlahan matriks (berlaku untuk matriks-matriks berukuran sama)

Jika $A=(\alpha_{ij})$ dan $B=(\beta_{ij})$ maka A + B adalah suatu matriks $C=(\gamma_{ij})$ dimana $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$ untuk semua i dan j.

b. Perkalian skalar dan matriks

Kalau λ suatu skalar dan $A=(\alpha_{ij})$ maka matriks $\lambda A=(\lambda\alpha_{ij})$ dengan perkataan lain, matriks A diperoleh dengan mengalikan semua elemen A dengan

c. Perkalian Matriks

Kalau $A=(\alpha_{ij})$ berukuran (pxq) dan $B=(\beta_{ij})$ berukuran (qxr) maka perkalian AB adalah suatu matriks $C=(\gamma_{ij})$ berukuran (pxr) dimana $\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\ldots\ldots+\alpha_{iq}\beta_{qj}$

untuk $i= 1,2,\ldots,p$

$j= 1,2,\ldots,r$

Contoh 6

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.3+2.1+1.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\end{bmatrix}$$

(1x3) (3x1)

2.10 RUANG VEKTOR

Definisi 23

Suatu ruang vektor X lewat lapangan K adalah himpunan X yang tidak kosong yang terdiri atas vektor-vektor x,y,.. dan memenuhi 2 operasi aljabar yaitu operasi penjumlahan vektor dan operasi pergandaan vektor dengan skalar. Yang mempunyai sifat-sifat sbb :

1. Terhadap penjumlahan
   a. $x+y = y+x$
   b. $x+(y+z) = (x+y)+z$
   c. $x+0 = x$
   d. $x+(-x) = 0$
2. Terhadap pergandaan vektor dan skalar
   a. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   b. $1.x = x$
   c. $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$
   d. $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$

Definisi 24

Himpunan m buah vektor $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ disebut bergantung linier bila terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0$$

Definisi 25

Himpunan m buah vektor $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ disebut bebas linier apabila $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_m x_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$

Contoh 7

Himpunan 2 buah vektor $\{[2,3], [1,3]\}$ adalah bebas linier karena $\alpha_1[2,3] + \alpha_2[1,3] = [0,0]$ dengan $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Definisi 26

Suatu vektor x dikatakan kombinasi linier dari vektor vektor $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ bila terdapat skalar-skalar $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sedemikian sehingga $x = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$

Definisi 27

Suatu himpunan vektor-vektor $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ disebut sistim pembentuk dari ruang vektor X, ditulis $X = L\{x_1, \ldots, x_n\}$ bila setiap vektor $x \in X$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Definisi 28

Suatu ruang vektor X dikatakan berdimensi hingga atau dim n bila dapat diketemukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in$ X yang bebas linier, sedangkan setiap himpunan (n+1) vektor selalu bergantung linier, dengan perkataan lain, banyaknya maksimum vektor-vektor $\in$ X yang bebas linier adalah n. Sedangkan jika X bukan berdimensi hingga maka X dikatakan berdimensi tak hingga.

Definisi 29

Setiap sistim pembentuk yang bebas linier disebut basis dari ruang vektor tersebut atau setiap himpunan n vektor vektor yang bebas linier $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n disebut basis dari ruang vektor.

Teorema 6

Apabila $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ basis dari ruang vektor X berdimensi n, maka setiap vektor $y \in X$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier dari $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Bukti :

Karena $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ basis maka menurut definisi 29 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ merupakan sistim pembentuk yang bebas linier sehingga y adalah kombinasi linier dari $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sesuai definisi 27. Tinggal ditunjukkan ketunggalannya. Misalkan $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ dan juga $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_n x_n$. Sehingga

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \\ y &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \\ \hline 0 &= (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)x_n \end{aligned}$$

Dan karena $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bebas linier maka $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_3 - \beta_3 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$, berarti $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$

2.11 RUANG NORM

Definisi 30

Norm pada ruang vektor lewat lapangan K adalah suatu fungsi $f : X \longmapsto R$ dimana setiap $x \in X$ menentukan dengan tunggal $\|x\| \in R$, dan memenuhi aksioma-aksioma :

1. $\|x\| > 0$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dimana x,y adalah sembarang vektor di X dan α adalah sembarang skalar ($\alpha \in K$).

Definisi 31

Ruang norm adalah suatu ruang vektor dengan suatu norm yang didefinisikan padanya.

Definisi 32

Ruang norm X merupakan ruang metrik dengan metrik pada X didefinisikan sbb :

$$d(x,y) = \|x - y\| \quad \forall x,y \in X$$

Definisi 33

Ruang banach adalah ruang norm yang lengkap.

Definisi 34

Suatu barisan (x_n) dalam ruang norm X adalah konvergen jika X memuat suatu x sedemikian sehingga

$\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ atau ditulis $x_n \longrightarrow x$ atau x limit dari (x_n).

Definisi 35

Suatu barisan (x_n) dalam ruang norm X adalah cauchy jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu N sedemikian sehingga

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \text{ untuk } \forall\, m,n > N$$

Definisi 36

Misalkan X adalah ruang norm. Suatu himpunan vektor - vektor $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ adalah bebaslinier jika terdapat suatu bilangan $c > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ didapat

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq c\ (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|\ )$$

Teorema 7

Misalkan X adalah ruang norm dan dim X = n. jika sembarang himpunan bagian M adalah tertutup dan terbatas maka M adalah kompak.

Bukti :

Diketahui dim X = n dan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ adalah basis dari X. Pandang sembarang barisan (x_m) dalam M maka menurut teorema 6, setiap x_m dapat dinyatakan dengan

$$x_m = \varepsilon_1^{(m)} e_1 + \ldots + \varepsilon_n^{(m)} e_n, \text{ dengan } \varepsilon_j^{(m)} = \text{skalar ke-}j$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Karena M adalah terbatas maka (x_m) juga terbatas, katakan $\|x_m\| \leq k$ untuk semua m. Menurut definisi 36 maka :

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \varepsilon_1^{(m)} e_1 + \varepsilon_2^{(m)} e_2 + \ldots + \varepsilon_n^{(m)} e_n \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{(m)} e_j \right\|$$

$$\geq c \sum_{j=1}^{n} \left| \varepsilon_j^{(m)} \right| \qquad \text{dimana } c > 0$$

Oleh karena itu barisan bilangan $(\varepsilon_j^{(m)})$ untuk j tertentu adalah terbatas. Dan menurut teorema 4 maka barisan bilangan $(\varepsilon_j^{(m)})$ mempunyai titik limit ε_j ; disini $1 \leq j \leq n$. Sehingga dapat disimpulkan (x_m) adalah mempunyai barisan bagian (z_m) yang mana konvergen ke $z = \sum \varepsilon_j e_j$. Karena M adalah tertutup maka $z \in M$. Karena barisan (x_m) adalah sembarang barisan dalam M yang mempunyai barisan bagian yang mana adalah konvergen dalam M, oleh karena itu menurut definisi 19 maka M adalah kompak.

2.12 RUANG EUCLIDEAN R^n DAN RUANG BARISAN HILBERT l^2

Definisi 37

Ruang euclidean R^n atau disingkat R^n adalah ruang yang diperoleh dari himpunan n tupel berurutan bilangan riil, ditulis $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dst yang membentuk ruang vektor dan dilengkapi dengan norma yang didefinisikan dengan $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Definisi 38

Ruang barisan Hilbert l^2 atau disingkat l^2 adalah suatu ruang dimana setiap elemen dalam ruang ini adalah suatu barisan bilangan $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots)$ sedemikian sehingga $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots$ konvergen. Jadi $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty$ dan normanya didefinisikan dengan

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.13 OPERATOR LINIER

Definisi 39

Operator adalah suatu pemetaan didalam ruang vektor sedangkan operator yang onto adalah suatu pemetaan yang onto didalam ruang vektor.

Definisi 40

Misalkan $D(T) \subset X$ dan $R(T) \subset Y$ dimana X dan Y adalah ruang vektor atas lapangan K. Suatu operator $T: D(T) \longmapsto R(T)$ disebut operator linier bila memenuhi :

1. Domain D(T) dari T adalah suatu ruang vektor atas lapangan K dan range R(T) juga berada dalam ruang

vektor atas lapangan K

2. $\forall x,y \in D(T)$ dan skalar α berlaku

$T(x+y) = Tx + Ty$

$T(\alpha x) = \alpha Tx$

contoh 8

Suatu matriks $A=(\alpha_{jk})$ dengan r baris dan n kolom, didefinisikan suatu operator $T : R^n \longmapsto R^r$ dengan $y= Ax$ dimana $x=(\xi_j)$ mempunyai n komponen dan $y=(\eta_j)$ mempunyai r komponen dan kedua vektor ditulis sebagai vektor kolom. Buktikan bahwa T adalah linier.

Bukti :

1. Karena $T : R^n \longmapsto R^r$, sedangkan R^n dan R^r merupakan ruang vektor atas lapangan K jadi D(T) dan R(T) merupakan ruang vektor atas lapangan K.

2. $\forall x,z \in D(T)$ dan skalar λ dimana

$x = (\xi_j)$ mempunyai n komponen

$z = (\beta_j)$ mempunyai n komponen

maka berlaku :

$T(x+z) = (\alpha_{jk})(\xi_j + \beta_j)$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 + \beta_1 \\ \xi_2 + \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$T(x+z) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \alpha_{r1} & \cdots\cdots & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \beta_1 \\ \varepsilon_2 + \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\varepsilon_1+\beta_1) + \alpha_{12}(\varepsilon_2+\beta_2) + \cdots + \alpha_{1n}(\varepsilon_n+\beta_n) \\ \alpha_{21}(\varepsilon_1+\beta_1) + \alpha_{22}(\varepsilon_2+\beta_2) + \cdots + \alpha_{2n}(\varepsilon_n+\beta_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{r1}(\varepsilon_1+\beta_1) + \alpha_{r2}(\varepsilon_2+\beta_2) + \cdots + \alpha_{rn}(\varepsilon_n+\beta_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\varepsilon_1 + \alpha_{12}\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_{1n}\varepsilon_n \\ \alpha_{21}\varepsilon_1 + \alpha_{22}\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_{2n}\varepsilon_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{r1}\varepsilon_1 + \alpha_{r2}\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_{rn}\varepsilon_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \cdots + \alpha_{1n}\beta_n \\ \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{2n}\beta_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{r1}\beta_1 + \alpha_{r2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{rn}\beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{Tx} + \mathbf{Tz}$$

$$T(\lambda x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & & & \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & & \alpha_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\varepsilon_1 \\ \lambda\varepsilon_2 \\ \cdot \\ \lambda\varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$T(\lambda x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\ \lambda\varepsilon_1 + \alpha_{12}\ \lambda\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_{1n}\ \lambda\varepsilon_n \\ \alpha_{21}\ \lambda\varepsilon_1 + \alpha_{22}\ \lambda\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_{2n}\ \lambda\varepsilon_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{r1}\ \lambda\varepsilon_1 + \alpha_{r2}\ \lambda\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_{rn}\ \lambda\varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11}\ \varepsilon_1 + \alpha_{12}\ \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1n}\ \varepsilon_n \\ \alpha_{21}\ \varepsilon_1 + \alpha_{22}\ \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n}\ \varepsilon_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{r1}\ \varepsilon_1 + \alpha_{r2}\ \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \alpha_{rn}\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots\alpha_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots\cdots\alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$T(\lambda x) = \lambda Tx$

Dari (1) dan (2) terbukti T adalah linier menurut definisi 40.

Teorema 8

Misalkan $T : D(T) \longmapsto R(T)$ adalah suatu operator linier maka :

a. Range R(T) adalah ruang vektor

b. Jika dim $D(T)=n < \infty$ maka dim $R(T) \leq n$

Bukti :

a. Ambil sembarang $y_1, y_2 \in R(T)$ dan akan ditunjukkan

$\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ untuk suatu skalar α, β

Karena $y_1, y_2 \in R(T)$, didapat $y_1 = Tx_1$; $y_2 = Tx_2$ untuk $x_1, x_2 \in D(T)$ dan karena D(T) suatu ruang vektor maka $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$. T adalah operator linier sehingga :

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2$$
$$= \alpha y_1 + \beta y_2$$

Dengan demikian $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$, karena $y_1, y_2 \in R(T)$ adalah sembarang dan juga skalar α, β .

Jadi terbukti R(T) adalah ruang vektor.

b. Pilih n+1 elemen-elemen $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ sembarang dari R(T) maka didapat $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$, ... , $y_{n+1} = Tx_{n+1}$ untuk $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in D(T)$. Karena dim D(T) = n , himpunan $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ harus bergantung linier . Dengan demikian $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$ untuk skalar-skalar α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ tidak semuanya sama dengan nol. Karena T adalah operator linier dan TO = 0 didapat

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}$$
$$= 0$$

Ini menunjukkan bahwa $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ adalah suatu himpunan yang bergantung linier sebab tidak semua $\alpha_i = 0$ .Mengingat himpunan bagian dari R(T) ini diambil sembarang, dapat disimpulkan bahwa R(T) tidak mempunyai himpunan bagian yang bebas linier yang terdiri dari n+1 atau lebih elemen-elemen. Dengan definisi 28 berarti dim $R(T) \leq n$

2.14 OPERATOR LINIER KONTINU DAN OPERATOR LINIER TERBATAS

Definisi 41

Misalkan X dan Y adalah ruang norm dan $D(T) \subset X$

$T : D(T) \longmapsto Y$ adalah operator linier. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil c sedemikian sehingga untuk semua $x \in D(T)$, $\|Tx\| \leq c\,\|x\|$.

Rumusan ini menunjukkan bahwa suatu operator linier terbatas memetakan himpunan-himpunan terbatas dalam D(T) onto himpunan terbatas dalam Y. Perlu dicatat bahwa dengan $c = \|T\|$ didapat, $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$

Teorema 9

Jika suatu ruang norm X berdimensi hingga maka setiap operator linier pada X adalah terbatas.

Bukti :

Misalkan dim X = n dan $\{e_1, \ldots, e_n\}$ adalah basis untuk X. Ambil sembarang $x = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j$, dengan ε_j = skalar ke-j untuk j=1,2,...,n dan sembarang operator linier T pada X. Karena T adalah linier maka menurut definisi 40

$$\|Tx\| = \left\|T \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|\varepsilon_j T e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j|\,\|Te_j\|$$

$$\leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j|$$

Sedangkan menurut definisi 36 berlaku

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j| \leq \frac{1}{c} \left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j\right\| = \frac{1}{c}\|x\| \quad \text{sehingga,}$$

$$\|Tx\| \leq \max_k \|Te_k\| \frac{1}{c}\|x\| \quad \text{atau} \quad \|Tx\| \leq \gamma\|x\|$$

$$\text{dimana } \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

Menurut definisi 41 maka operator linier T adalah terbatas

Definisi 42

Suatu operator $T : D(T) \longmapsto Y$, dimana $D(T) \subset X$ dan X,Y adalah ruang norm. Maka operator T adalah kontinu pada suatu $x_o \in D(T)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|Tx - Tx_o\| < \varepsilon$ untuk semua $x \in D(T)$ memenuhi $\|x - x_o\| < \delta$

Definisi 43

Operator T adalah kontinu jika T kontinu pada setiap $x \in D(T)$.

Teorema 10

Misalkan $T : D(T) \longmapsto Y$ adalah operator linier, dimana $D(T) \subset X$ dan X,Y adalah ruang norm. Jika operator linier T adalah terbatas maka operator linier T adalah kontinu.

Bukti :

Pandang sembarang $x_o \in D(T)$ dan ambil sembarang $\varepsilon > 0$ Karena operator linier T adalah terbatas maka untuk setiap $x \in D(T)$ sedemikian sehingga $\|x - x_o\| < \delta$ dimana $\delta = \frac{\varepsilon}{T}$ didapat

$$\|Tx - Tx_o\| = \|T(x - x_o)\| \leq \|T\| \, \|x - x_o\|$$
$$< \|T\| \, \delta = \varepsilon$$

Karena x_o diambil sembarang maka menurut definisi 42, T adalah kontinu.

Teorema 11

Misalkan $T : D(T) \longmapsto R(T)$ adalah suatu operator linier terbatas , maka

$$x_n \longrightarrow \bar{x} \Longrightarrow Tx_n \longrightarrow Tx \quad \text{untuk } x_n, x \in D(T).$$

Bukti :

Karena T adalah operator linier terbatas maka menurut teorema 10, T adalah operator linier kontinu. Karena T operator linier kontinu maka menurut teorema 3 jika $x_n \longrightarrow x$ maka $Tx_n \longrightarrow Tx$, untuk $x_n, x \in D(T)$.

Definisi 44

Misal $T : D(T) \longmapsto Y$ dan $M \supset D(T)$, suatu operator $\hat{T} : M \longmapsto Y$ merupakan perluasan operator T untuk himpunan M apabila memenuhi

$\hat{T}x = Tx$ untuk semua $x \in D(T)$.

Teorema 12

Misalkan $T : D(T) \longmapsto Y$ adalah operator linier terbatas, dimana D(T) terletak dalam ruang norm X dan Y adalah ruang banach. Maka T mempunyai suatu perluasan $\hat{T} : \overline{D(T)} \longmapsto Y$ dimana $\hat{T}$ adalah operator linier terbatas dengan $\|\hat{T}\| = \|T\|$

Bukti :

Pandang sembarang $x \in \overline{D(T)}$. Menurut teorema 2, terdapat suatu barisan (x_n) dalam D(T) sedemikian sehingga $x_n \longrightarrow x$. Karena T operator linier terbatas, didapat

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \; \|x_n - x_m\|$$

Ini memperlihatkan bahwa (Tx_n) adalah cauchy karena (x_n) konvergen. Dari yang diketahui Y adalah lengkap, sehingga

(Tx_n) konvergen, katakan, $Tx_n \longrightarrow y \in Y$. Kita definisikan $\tilde{T}$ dengan $\tilde{T}x=y$. Akan diperlihatkan bahwa definisi ini tidak tergantung pada pemilihan partikel suatu barisan dalam $D(T)$ yang konvergen ke x. Andaikata $x_n \longrightarrow x$ dan $z_n \longrightarrow x$, maka $v_m \longrightarrow x$, dimana (v_m) adalah barisan $(x_1,z_1,x_2,z_2,\ldots)$ Oleh karena itu (Tv_m) konvergen menurut teorema 11, dan barisan bagian (Tz_n) dan (Tx_n) dari (Tv_m) mempunyai limit yang sama. Terbukti $\tilde{T}$ didefinisikan secara tunggal pada setiap $x \in \overline{D(T)}$. $\tilde{T}$ adalah linier dan $\tilde{T}x=Tx$ untuk setiap $x \in D(T)$, sehingga $\tilde{T}$ adalah perluasan dari T. Sekarang kita gunakan $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$ dengan $n \to \infty$. Jadi $Tx_n \longrightarrow y=\tilde{T}x$. Karena $x \longrightarrow \|x\|$ merupakan pemetaan kontinu, jadi dihasilkan $\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\|$. Oleh karena itu $\tilde{T}$ adalah terbatas dan $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Tentu saja $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ karena norm didefinisikan dengan supremum tidak dapat menurun dalam suatu perluasan. Jadi didapat $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

2.15 RUANG DUAL DAN OPERATOR ADJOINT

Definisi 45

Suatu fungsional linier f adalah suatu operator linier dengan domain dalam ruang vektor X dan range dalam lapangan K dari X. Maka

$$f : D(f) \longmapsto K$$

Definisi 46

Suatu fungsional linier terbatas f adalah suatu operator linier terbatas dengan domain dalam ruang norm X dan range dalam lapangan K dari X. Jadi terdapat suatu bilangan riil c sedemikian sehingga untuk semua $x \in D(f)$

$$\|f(x)\| \leq c \|x\|$$

Definisi 47

Misalkan X adalah ruang norm, maka himpunan semua fungsional linier terbatas pada X memuat suatu ruang norm dengan norm didefinisikan oleh

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

dinamakan ruang dual dari X dan dinotasikan dengan X'[5]

Definisi 48

Ruang dual X' dari suatu ruang norm X adalah suatu ruang banach.

Definisi 49

Misalkan $T: X \longmapsto Y$ adalah suatu operator linier terbatas, dimana X dan Y adalah ruang norm. Maka operator adjoint $T^{x} : Y' \longmapsto X'$ dari T didefinisikan dengan

$$f(x) = (T^{x}g)(x) = g(Tx) \text{ dengan } g \in Y'$$

dimana X' adalah ruang dual dari X

Y' adalah ruang dual dari Y

Definisi 50

Misalkan B(X,Y) adalah ruang dari semua operator-operator linier terbatas dari X ke Y, dimana X dan Y adalah ruang norm. Suatu barisan operator $(T_n) \in B(X,Y)$ dikatakan operator konvergen seragam jika barisan (T_n) konvergen dalam B(X,Y). Atau terdapat suatu operator $T: X \longmapsto Y$ sedemikian sehingga $\|T_n - T\| \longmapsto 0$ atau T limit dari (T_n).

Teorema 13

Jika $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ dan $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ bilangan-bilangan riil maka ketidaksamaan schwarz

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \eta_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \quad \sum_{j=1} \eta_j^2$$

Bukti :

Jika $E = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2$, $N = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^2$ dan $M = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \eta_j$

Jika N = 0 maka $\eta_j = 0$ untuk semua j, sehingga kedua ruas ketidaksamaan menjadi nol dan teorema diatas benar.

Jika $N \neq 0$ jadi $N > 0$, maka

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} (N \varepsilon_j - M \eta_j)^2 &= N^2 \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 - 2NM \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \eta_j + M^2 \sum_{j=1}^{n} \eta_j^2 \\ &= EN^2 - 2NM^2 + M^2N \\ &= EN^2 - NM^2 \\ &= N(EN - M^2)\end{aligned}$$

Karena $\sum_{j=1}^{n} (N\varepsilon_j - M\eta_j)^2$ adalah non negatif dan $N > 0$

maka $EN - M^2$ harus non negatif atau $M^2 \leq EN$

Jadi $\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \eta_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2\right)$