BAB III

TAPIS KALMAN

Pada bagian ini diberikan teori tapis Kalman untuk waktu diskrit. Ciri khusus dari tapis Kalman adalah persamaan matematikanya dibawa ke dalam model state space, dan menggunakan perhitungan secara rekursi.

3.1. Pernyataan-pernyataan Dalam Permasalahan Tapis Kalman

Pandang suatu vektor **x**(n) yang mempunyai dimensi M, menyatakan vektor proses untuk waktu n, vektor **y(n)** dengan dimensi N, menyatakan vektor pengamatan waktu n. Vektor-vektor **x**(n) dan **y**(n) merupakan vektor peubah acak.

Vektor-vektor peubah acak **y**(1), **y**(2), ..., **y**(n -1) secara berturut-turut menyatakan vektor pengamatan waktu ke 1, waktu ke 2, sampai dengan waktu ke n-1. Vektor-vektor pengamatan ini dinyatakan dalam bentuk ruang $\mathcal{Y}_{n-1}$. Suatu taksiran kuadrat rata-rata vektor proses **x**(n) jika diberikan vektor-vektor pengamatan **y**(1), **y**(2), ..., **y**(n-1) dinyatakan dalam bentuk $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$. Taksiran satu tahap **y**(n) jika diberikan vektor-vektor pengamatan **y**(1), **y**(2), ..., **y**(n -1) dinyatakan dengan $\hat{\mathbf{y}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$.

Model dalam tapis Kalman mempunyai dua persamaan

1. Persamaan proses

$$\mathbf{x}(n+1) = \Phi\,(n+1,n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n) \tag{3.1}$$

2. Persamaan pengamatan

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_2(n) \tag{3.2}$$

Model-model persamaan (3.1) dan (3.2) dikenal dengan persamaan model state space.

Dibawah ini diberikan asumsi-asumsi dan pernyataan yang berhubungan dengan kedua persamaan tersebut.

1. $\mathbf{x}(n)$ = Vektor proses untuk waktu n, mempunyai dimensi (M x 1).
2. $\Phi(n+1,n)$ = Matriks transisi proses dari waktu n ke n+1, mempunyai dimensi (M x M) dan determinannya tidak boleh sama dengan nol, $|\Phi(n+1,n)| \neq 0$.
3. $\mathbf{v}_1(n)$ = Vektor gangguan proses, mempunyai dimensi (M x 1) dan diasumsikan mempunyai rataan nol dan kovariansi matriks

$$E\left[\mathbf{v}_1(k)\,\mathbf{v}_1^T(n)\right] = \begin{cases} \mathbf{Q}_1(n) & \text{untuk } k=n \\ 0 & \text{untuk } k\neq n \end{cases} \tag{3.3}$$

4. $\mathbf{y}(n)$ = Vektor pengamatan waktu ke n, mempunyai dimensi N x 1.
5. $\mathbf{v}_2(n)$ = Vektor gangguan pengamatan, mempunyai dimensi N x 1.

Diasumsikan mempunyai rataan nol dan kovariansi matriks

$$E\left[\mathbf{v}_2(k)\,\mathbf{v}_2^T(n)\right] = \begin{cases} \mathbf{Q}_2(n) & \text{untuk } k=n \\ 0 & \text{untuk } k \neq n \end{cases} \tag{3.4}$$

6. **C**(n) = Matriks pengamatan untuk waktu n, mempunyai dimensi (N x M).
7. Vektor proses awal yaitu vektor proses untuk n=0, (**x**(0)), vektor gangguan proses $\mathbf{v}_1(n)$ dan vektor gangguan pengamatan $\mathbf{v}_2(n)$ adalah saling independen.

$$E\left[\mathbf{x}(0)\,\mathbf{v}_1^T(n)\right]=0 \tag{3.5}$$

$$E\left[\mathbf{x}(0)\,\mathbf{v}_2^T(n)\right]=0 \tag{3.6}$$

8. Vektor gangguan proses $\mathbf{v}_1(n)$, vektor gangguan pengamatan $\mathbf{v}_2(n)$ dan perkiraan vektor galat proses $\varepsilon(n,n-1) = \mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$ diasumsikan saling independen.

$$E\left[\varepsilon(n,n-1)\,\mathbf{v}_1^T(n)\right] = E\left[\mathbf{v}_1(n)\,\varepsilon^T(n,n-1)\right]=0 \tag{3.7}$$

$$E\left[\varepsilon(n,n-1)\,\mathbf{v}_2^T(n)\right] = E\left[\mathbf{v}_2(n)\,\varepsilon^T(n,n-1)\right]=0 \tag{3.8}$$

$$E\left[\mathbf{v}_1(n)\;\mathbf{v}_2^T(n)\right] = E\left[\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_1^T(n)\right]=0 \tag{3.9}$$

9. Vektor pengamatan, vektor gangguan proses pada saat n = 0 atau sebelumnya diasumsikan sama dengan nol

$\mathbf{y}(n) = 0$ untuk $n \leq 0$ (3.10)

$\mathbf{v}_1(n) = 0$ untuk $n \leq 0$ (3.11)

3.2. Proses Inovasi.

Pandang suatu vektor $\hat{\mathbf{y}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$, adalah vektor taksiran satu tahap waktu ke n jika diberikan vektor-vektor pengamatan dari waktu n = 1 sampai n = n - 1, vektor-vektor pengamatan $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$, ..., $\mathbf{y}(n-1)$ dinyatakan dalam bentuk ruang $\mathcal{Y}_{n-1}$. Proses inovasi waktu ke n , $\alpha(n)$, dinyatakan sebagai perbedaan antara vektor pengamatan $\mathbf{y}(n)$ dan taksiran satu tahap $\hat{y}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$

$$\alpha(n) = \mathbf{y}(n) - \hat{y}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) \tag{3.12}$$

Vektor inovasi $\alpha(n)$ ini mempunyai dimensi (M x 1), yang memberikan informasi baru dalam data pengamatan $\mathbf{y}(n)$. Proses inovasi $\alpha(n)$, yang dihubungkan dengan data pengamatan $\mathbf{y}(n)$ untuk waktu n adalah ortogonal dengan pengamatan-pengamatan sebelumnya $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$, ..., $\mathbf{y}(n-1)$ sehingga:

$$E\left[\alpha(n)\mathbf{y}^T(k)\right] = 0 \quad , 1 \leq k \leq n-1 \tag{3.13}$$

Dari prinsip ortogonalitas diketahui bahwa Proses inovasi yang memuat barisan vektor-vektor barisan peubah acak adalah ortogonal satu sama lainnya sehingga

$$E\left[\alpha(n)\alpha^{T}(k)\right] = 0 \quad , 1 \le k \le n-1 \tag{3.14}$$

3.3. Kovariansi matriks proses inovasi .

Untuk menyatakan kovariansi matriks proses inovasi, langkah pertama yaitu menguraikan persamaan (3.1) secara rekursi. Dengan menggunakan asumsi bahwa vektor proses awal adalah $\mathbf{x}(0)$ dan vektor gangguan proses $\mathbf{v}_1(n)$ sama dengan nol untuk $n \le 0$ sehingga persamaan (3.1) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(n+1) = \Phi(n+1,n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n)$$

Jika diuraikan untuk n = 0 sampai n = k maka

$$\mathbf{x}(1) = \Phi(1,0)\,\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \Phi(2,1)\,(\Phi(1,0)\,\mathbf{x}(0)) + \mathbf{v}_1(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \Phi(3,2)\,(\Phi(2,1)\,\Phi(1,0)\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{v}_1(1)) + \mathbf{v}_1(2)$$

$$\mathbf{x}(4) = \Phi(4,3)\,(\Phi(3,2)\,\Phi(2,1)\Phi(1,0)\,\mathbf{x}(0) + \Phi(3,2)\,\mathbf{v}_1(1) + \mathbf{v}_1(2)) + \mathbf{v}_1(3)$$

....

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) = {} & \Phi(k,k-1)\ldots\Phi(1,0)\,\mathbf{x}(0) + \Phi(k,k-1)\ldots\Phi(3,2)\,\mathbf{v}_1(1) + {} \\ & \Phi(k,k-1)\ldots\Phi(4,3)\,\mathbf{v}_1(2) + \Phi(k,k-1)\ldots\Phi(5,4)\,\mathbf{v}_1(3) + \ldots + {} \\ & \Phi(k,k-1)\,\Phi(k-1,k-2)\,\mathbf{v}_1(k-3) + \Phi(k,k-1)\,\mathbf{v}_1(k-2) + \Phi(k,k)\,\mathbf{v}_1(k-1).\end{aligned}$$

Jika perkalian matriks-matriks transisi dapat ditulis $\Phi(k,k-1)$ $\Phi(k-1,k-2)$ $\Phi(k-2,k-3)$ ... $\Phi(i+1,i) = \Phi(k,i)$ dan $\Phi(k,k) = \mathbf{I}$, maka rekursi ke k persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\,\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \Phi(k,i+1)\,\mathbf{v}_1(i) \qquad (3.15)$$

Dengan mengalikan kedua sisi persamaan (3.15) dengan $\mathbf{v}_2^T(n)$ dan karena persamaan (3.6) yaitu proses awal $\mathbf{x}(0)$ ortogonal dengan $\mathbf{v}_2^T(n)$, kemudian dengan memandang persamaan (3.9), maka harga harapan dari perkalian persamaan (3.15) dengan $\mathbf{v}_2^T(n)$ adalah

$$E\left[\mathbf{x}(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right] = E\left[\Phi(k,0)\mathbf{x}(0)\mathbf{v}_2^T(n)\right] + E\sum_{i=1}^{k-1}\left[\Phi(k,i+1)\mathbf{v}_1(i)\mathbf{v}_2^T(n)\right]$$

$$E\left[\mathbf{x}(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right] = 0\,, \quad \text{untuk } k,\, n \geq 0 \qquad (3.17)$$

Kemudian pandang persamaan (3.2)

$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_2(k)$

kalikan kedua sisi persamaan (3.2) dengan $\mathbf{v}_2^T(n)$ dan diambil nilai harapannya :

$$E\left[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right] = E\left[\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k).\mathbf{v}_2^T(n)\right] + E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right]$$

$$E\left[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right] = \mathbf{C}(k)\,E\left[\mathbf{x}(k).\mathbf{v}_2^T(n)\right] + E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right]$$

$$= E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right]$$

Dengan memandang persamaan (3.4) yaitu $E\left[\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_2^T(k)\right] = 0$, maka

$$E\left[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_2^T(n)\right] = 0\,, \quad \text{untuk } 0 \leq k \leq n-1 \qquad (3.18)$$

Selanjutnya pandang persamaan (3.2). Kalikan persamaan ini dengan $\mathbf{v}_1^T(n)$. Kemudian diambil nilai harapannya sehingga dihasilkan persamaan sebagai berikut:

$$E\left[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right] = E\left[\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k).\mathbf{v}_1^T(n)\right] + E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right]$$

$$= \mathbf{C}(k)\, E\left[\mathbf{x}(k).\mathbf{v}_1^T(n)\right] + E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right]$$

$$= \mathbf{C}(k)E[(\Phi(k,o)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{k-1}(\Phi(k,i+1)))\mathbf{v}_1(i)\mathbf{v}_1^T(\mathbf{n})\ ] +$$

$$E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right]$$

$$= \mathbf{C}(k)\, E\left[\Phi(k,0)\mathbf{x}(0)\mathbf{v}_1^T(n)\right] + \mathbf{C}(k)E[\sum_{i=1}^{k-1}(\Phi(k,i+1)\mathbf{v}_1(i)\mathbf{v}_1^T(n))]$$

$$+\ E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right]$$

Secara berturut-turut dari persamaan-persamaan (3.5), (3.3), (3.4) diketahui bahwa

$$\left.\begin{aligned} E\left[\mathbf{x}(0)\mathbf{v}_1^T(n)\right] &= 0 \\ E\left[\mathbf{v}_1(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right] &= 0 \\ E\left[\mathbf{v}_2(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right] &= 0 \end{aligned}\right] \quad \text{untuk } 0 \le k \le n-1$$

Sehingga mengakibatkan perkalian dari harapan **y**(k) dan $\mathbf{v}_1^T(n)$ sama dengan nol.

$$E\left[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right] = 0 \qquad (3.19)$$

Jika diberikan vektor-vektor pengamatan **y**(1), **y**(2), ... , **y**(n-1) yang dinyatakan dalam bentuk ruang $\mathcal{Y}_{n-1}$, maka dari persamaan (3.2) dapat dicari taksiran satu tahap **y** (n)

$$\hat{\mathbf{y}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) = \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) + \hat{\mathbf{v}}_2(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) \tag{3.20}$$

Dari persamaan (3.18) ditunjukkan bahwa vektor-vektor pengamatan **y** (1), **y**(2), ..., **y** (n-1) ortogonal dengan vektor gangguan pengamatan. Sehingga taksiran:

$\hat{\mathbf{v}}_2(n \mid \mathcal{Y}_{n-1})$ sama dengan nol. Dan persamaan (3.20) menjadi

$$\hat{\mathbf{y}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) = \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) \tag{3.21}$$

Subtitusikan persamaan (3.21) ke dalam persamaan (3.12), sehingga dihasilkan persamaan proses inovasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= \mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) \\ &= \mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.2) ke persamaan (3.22), maka proses inovasinya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= \mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) \\ &= \mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_2(n) - \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1}) \\ &= \mathbf{C}(n)\,(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_{n-1})) + \mathbf{v}_2(n) \\ &= \mathbf{C}(n)\,\varepsilon(n,n-1) + \mathbf{v}_2(n) \qquad (3.23)\end{aligned}$$

$\varepsilon(n,n-1)$ adalah perkiraan vektor galat proses untuk waktu n jika diberikan vektor pengamatan sampai waktu n -1. Perkiraan vektor galat proses ini merupakan perbedaan antara vektor proses **x**(n) dan taksiran kuadrat rata-rata vektor $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$.

$$\varepsilon(n,n-1) = \mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) \tag{3.24}$$

Kovariansi matriks vektor inovasi ($\Sigma(n)$) dinyatakan dengan

$$\Sigma(n) = E\left[\alpha(n)\alpha^T(n)\right] \tag{3.25}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan persamaan (3.23) ke dalam persamaan (3.25) maka dihasilkan kovariansi matriks proses inovasi sebagai berikut:

$$\Sigma(n) = E\left[(C(n)\varepsilon(n,n-1)+v_2(n))(C(n)\varepsilon(n,n-1)+v_2(n))^T\right]$$

$$\Sigma(n) = E\left[(C(n)\varepsilon(n,n-1)(C(n)\varepsilon(n,n-1))^T\right] + E\left[\mathbf{v}_2(n)(C(n)\varepsilon(n,n-1))^T\right]$$

$$+ E\left[C(n)\varepsilon(n,n-1)\mathbf{v}_2^T(n)\right] + E\left[\mathbf{v}_2(n)\mathbf{v}_2^T(n)\right] \tag{3.26}$$

Dari persamaan (3.8) diketahui bahwa perkiraan vektor galat proses $\varepsilon(n,n-1)$ saling independen dengan $\mathbf{v}_2^T(n)$, dan dengan memandang bahwa $\mathbf{Q}_2(n)$ adalah kovariansi matriks vektor gangguan pengamatan dan **k**(n,n-1) adalah kovariansi matriks perkiraan vektor galat proses maka persamaan (3.26) ini dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\Sigma(n) = \mathbf{C}(n)\, E\left[\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^T(n,n-1)\right]\mathbf{C}^T(n) + \mathbf{C}^T(n)\, E\left[v_2(n)\varepsilon^T(n,n-1)\right] +$$

$$\mathbf{C}(n)\, E\left[\varepsilon(n,n-1)v_2^T(n)\right] + \mathbf{Q}_2(n)$$

$$= \mathbf{C}(n)\, \mathbf{k}(n,n\text{-}1)\, \mathbf{C}^T(n) + \mathbf{Q}_2(n) \qquad (3.27)$$

dengan

$$\mathbf{k}(n,n\text{-}1) = E\left[\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^T(n,n-1)\right] \qquad (3.28)$$

3.4. Taksiran Kuadrat Rata-rata Vektor State Dengan Menggunakan Proses Inovasi

Pada bagian ini diberikan penyelesaian permasalahan penurunan taksiran kuadrat rata-rata vektor proses $\mathbf{x}(i)$ dari proses inovasi.

Definisi 3.4.1:

Taksiran kuadrat rata-rata vektor proses $\mathbf{x}(i)$ merupakan kombinasi linier dari barisan vektor-vektor proses inovasi $\alpha(1), \alpha(2), \ldots \alpha(n)$

$$\hat{\mathbf{x}}(i|\mathcal{Y}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_i(k)\, \alpha(k) \qquad (3.29)$$

dimana $\mathbf{B}_i(k)$ adalah matriks (M x N) yang telah diketahui. Karena vektor galat proses ε (i, n) ortogonal dengan proses inovasi $\alpha^T(m)$, m = 1, 2, ..., n, maka :

$$E[\varepsilon(i,n)\alpha(m)] = E\left[(\mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{x}}(i|\mathcal{Y}_n))\, \alpha^T(m)\right]$$

$$= 0 \qquad , m = 1,2,\ldots,n$$

$$E[\mathbf{x}(i)\,\alpha^T(m)] = E[\hat{\mathbf{x}}(i|\mathcal{Y}_n))\,\alpha^T(m)] \qquad (3.30)$$

Subtitusi persamaan (3.29) ke persamaan (3.30) memberikan

$$E[\mathbf{x}(i)\,\alpha^T(m)] = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_i(k)\,\alpha(k)\right)\alpha^T(m)\right] \qquad (3.31)$$

$m = 1, 2, 3, \ldots, n$

Karena persamaan (3.14) yaitu $E\left[\alpha(n)\alpha^T(k)\right] = 0 \quad, 1 \le k \le n-1$ maka

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_i(k)\,\alpha(k))\,\alpha^T(m)\right] = E\left[\mathbf{B}_i(m)\,\alpha(m)\,\alpha^T(m)\right] \qquad (3.32)$$

Dengan demikian persamaan (3.31) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(i)\,\alpha^T(m)] &= E\left[\mathbf{B}_i(m)\,\alpha(m)\,\alpha^T(m)\right] \\ &= \mathbf{B}_i(m)\,E\left[\alpha(m)\,\alpha^T(m)\right] \\ &= \mathbf{B}_i(m)\,\Sigma(m) \qquad (3.33) \end{aligned}$$

dengan $\Sigma(m)$ adalah kovariansi matriks proses inovasi, dan kovariansi matriks proses inovasi ini determinannya tidak boleh sama dengan nol, $|\Sigma(m)| \neq 0$, sehingga dapat dicari invers matriksnya. Kemudian dengan mengalikan kedua sisi persamaan (3.33) dengan invers matriks kovariansi matriks inovasi $\Sigma^{-1}(m)$, maka dihasilkan:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(i)\,\alpha^T(m)]\Sigma^{-1}(m) &= \mathbf{B}_i(m)\,\Sigma(m)\,\Sigma^{-1}(m) \\ &= \mathbf{B}_i(m) \qquad (3.34) \end{aligned}$$

Akhirnya dengan mensubtitusikan peramaan (3.34) ke persamaan (3.29) dihasilkan taksiran kuadrat rata-rata $\hat{\mathbf{x}}(i|\mathcal{Y}_n)$ dengan menggunakan proses inovasi sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{x}}(i|\mathcal{Y}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_i(k)\,\alpha(k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(i|\mathcal{Y}_n) = \sum_{k=1}^{n} E[\,\mathbf{x}(i)\alpha^T(k)]\Sigma^{-1}(k)\alpha(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} E[\mathbf{x}(i)\alpha^T(k)]\Sigma^{-1}(k)\alpha(k) + E[\,\mathbf{x}(i)\alpha^T(n)]\Sigma^{-1}(n)\alpha(n) \qquad (3.35)$$

Untuk i = n +1 maka persamaan (3.35) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) = \sum_{k=1}^{n-1} E[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(k)]\Sigma^{-1}(k)\alpha(k) + E[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(n)]\Sigma^{-1}(n)\alpha(n)$$

(3.36)

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.1) ke nilai harapan persamaan (3.36) maka dihasilkan

$$E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] = E\left[\,(\Phi\,(n+1,n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n))\,\alpha^T(k)\,\right]$$

$$= E\left[\,(\Phi\,(n+1,n)\,\mathbf{x}(n)\,\alpha^T(k)\,\right] + E\left[\mathbf{v}_1(n)\alpha^T(k)\right]$$

$$= \Phi\,(n+1,n)\,E\left[\,\mathbf{x}(n)\,\alpha^T(k)\,\right] + E\left[\mathbf{v}_1(n)\alpha^T(k)\right] \qquad (3.37)$$

Dalam persamaan (3.19) diketahui bahwa

$$E\left[\mathbf{y}(k)\mathbf{v}_1^T(n)\right] = 0 \qquad \text{,untuk } 0 \le k \le n-1 \text{ sehingga}$$

$$E\left[\mathbf{v}_1(n)\alpha^T(k)\right] = E\left[\,(\,\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k|\mathcal{Y}_{k-1}))\,\mathbf{v}_1^T(n)\,\right]$$

$$= 0 \qquad \text{,untuk } 0 \le k \le n-1$$

Dengan demikian persamaan (3.37) menjadi

$$E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] = \Phi(n+1,n)\,E\left[\,\mathbf{x}(n)\,\alpha^T(k)\,\right] \qquad (3.38)$$

Subtitusikan kembali persamaan (3.38) ke bagian jumlahan sisi kanan dalam persamaan (3.36)

$$\sum_{k=1}^{n-1} E\left[\ \mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)\right]\Sigma^{-1}(k)\ \alpha(k)\ \Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \Phi(n+1,n)\, E\left[\ \mathbf{x}(n)\,\alpha^T(k)\ \right]\Sigma^{-1}(k)\ \alpha(k)$$

$$= \Phi(n+1,n) \sum_{k=1}^{n-1} E\left[\ \mathbf{x}(n)\,\alpha^T(k)\ \right]\Sigma^{-1}(k)\ \alpha(k)$$

$$= \Phi(n+1,n)\ \hat{\mathbf{x}}(n|\ \mathcal{Y}_{n-1}) \qquad (3.39)$$

Akhirnya persamaan (3.36) dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1|\ \mathcal{Y}_n) = \Phi(n+1,n)\ \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + E[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(n)]\Sigma^{-1}(n)\alpha(n) \qquad (3.40)$$

Persamaan (3.40) ini dikenal sebagai persamaan taksiran kuadrat rata-rata vektor proses waktu (n+1) jika diberikan vektor-vektor pengamatan **y**(1), **y**(2), ..., **y**(n).

3.5. Keuntungan Kalman

Ditentukan suatu matriks (M x N)

$$\mathbf{G}(n) = E[\ \mathbf{x}(n+1)\ \alpha^T(n)]\Sigma^{-1}(n) \qquad (3.41)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.41), maka persamaan (3.40) dapat ditulis sebagai:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1|\ \mathcal{Y}_n) = \Phi(n+1,n)\ \hat{\mathbf{x}}(n|\ \mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{G}(n)\ \alpha(n) \qquad (3.42)$$

Persamaan (3.42) menunjukkan bahwa taksiran kuadrat rata-rata $\hat{\mathbf{x}}(n+1|\ \mathcal{Y}_n)$ dapat dicari dari taksiran sebelumnya $\hat{\mathbf{x}}(n|\ \mathcal{Y}_{n-1})$ yang dikalikan dengan matriks transisi $\Phi(n+1,n)$ dan ditambahkan dengan faktor koreksi $\mathbf{G}(n)\,\alpha(n)$. Faktor koreksi ini adalah perkalian antara $\alpha(n)$ dan $\mathbf{G}(n)$. Matriks $\mathbf{G}(n)$ ini dikenal dengan Kalman gain atau keuntungan Kalman.

Yang menjadi permasalahan pada bagian 3.5 ini yaitu menentukan keuntungan Kalman itu sendiri. Untuk menentukan nilai keuntungan Kalman ini dapat dicari dengan mensubtitusikan persamaan (3.23) ke persamaan (3.38).

$$
\begin{aligned}
E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] &= \Phi(n+1,n)\,E\left[\,\mathbf{x}(n)\,\alpha^T(k)\,\right] \\
&= \Phi(n+1,n)\,E\left[\,\mathbf{x}(n)\,(\,\mathbf{C}(n)\,\varepsilon(n,n-1) + \mathbf{v}_2(n))^T\,\right] \\
&= \Phi(n+1,n)\left(E\left[\,\mathbf{x}(n)\varepsilon^T(n,n-1)\,\right]\mathbf{C}^T(n) + E\left[\,\mathbf{x}(n)\,\mathbf{v}_2^T(n)\,\right]\right)
\end{aligned}
\qquad (3.43)
$$

Karena $\mathbf{x}(n)$ ortogonal dengan $\mathbf{v}_2^T(n)$ seperti terlihat pada persamaan (3.17), maka persamaan (3.43) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$
E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] = \Phi\,(n+1,n)\,E[\mathbf{x}(n)\,\varepsilon^T(n,n-1)\,]\mathbf{C}^T(n) \qquad (3.44)
$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.24) ke persamaan (3.44) dihasilkan:

$$
E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] = \Phi(n+1,n)\;E\left[\,(\varepsilon(n,n-1)+\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}))\varepsilon^T(n,n-1)\,\right]\mathbf{C}^T(n)
$$

$$
\begin{aligned}
E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] = {} & \Phi(n+1,n)\;E\left[\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^T(n,n-1)\,\right]\mathbf{C}^T(n) + \Phi(n+1,n) \\
& E\left[\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})\varepsilon^T(n,n-1)\,\right]\mathbf{C}^T(n)
\end{aligned}
\qquad (3.45)
$$

Disini perlu diperhatikan bahwa perkiraan vektor galat proses $\varepsilon(n,n-1)$ adalah ortogonal dengan taksiran $\hat{\mathbf{x}}(n|\ \mathcal{Y}_{n-1})$. Maka nilai harapan dari perkalian $\hat{\mathbf{x}}(n|\ \mathcal{Y}_{n-1})$ dan $\varepsilon^T(n,n-1)$ sama dengan nol dan persamaan (3.45) menjadi:

$$E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(k)] = \Phi\,(n+1,n)\,E\left[\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^T(n,n-1)\right]C^T(n)$$

$$= \Phi\,(n+1,n)\,\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^T(n) \qquad (3.46)$$

dengan **k**(n,n-1) adalah perkiraan kovariansi matriks galat proses (lihat persamaan (3.28)). Dengan mensubtitusikan persamaan (3.46) ke persamaan (3.41) maka dihasilkan keuntungan Kalman (**G**(n)), yaitu:

$$\mathbf{G}(n) = E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^T(n)]\Sigma^{-1}(n)$$

$$= \Phi\,(n+1,n)\ \mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^T(n)\,\Sigma^{-1}(n) \qquad (3.47)$$

3.6. Persamaan Riccati

Pada persamaan (3.47) tampak bahwa keuntungan Kalman **G**(n) dapat ditentukan apabila nilai perkiraan kovariansi matriks galat proses **k**(n,n-1) diketahui. **k**(n,n-1) dapat ditentukan nilainya secara rekursi. Pada bagian ini diberikan penurunan nilai **k**(n,n-1).

Perkiraan vektor galat proses $\varepsilon(n+1,n)$ sama dengan perbedaan antara proses **x**(n+1) dan taksiran kuadrat rata-rata $\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n)$ (lihat persamaan (3.24))

$$\varepsilon(n+1,n) = \mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) \tag{3.48}$$

Subtitusikan persamaan (3.1) dan (3.42) ke persamaan (3.48) dan dengan menggunakan poses inovasi $\alpha(n)$ dalam persamaan (3.33) maka persamaan (3.48) menjadi:

$$\varepsilon(n+1,n) = \mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n)$$

$$\varepsilon(n+1,n) = \Phi(n+1,n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n) - (\Phi(n+1,n)\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{G}(n)\,\alpha(n))$$

$$= \Phi(n+1,n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n) - \Phi(n+1,n)\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) - \mathbf{G}(n)\,(\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})) \tag{3.49}$$

Kemudian digunakan persamaan (3.2) untuk mengeliminasi $\mathbf{y}(n)$ dalam persamaan (3.49), sehingga didapatkan persamaan untuk menghitung secara rekursi perkiraan vektor galat proses.

$$\varepsilon(n+1,n) = \Phi(n+1,n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_1(n) - \Phi(n+1.n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) - \mathbf{G}(n)(\mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}_2(n) - \mathbf{C}(n)\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}))$$

$$\varepsilon(n+1,n) = \Phi(n+1,n)(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n) + \mathbf{v}_1(n)$$

$$= (\Phi\,(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\,(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n) + \mathbf{v}_1(n)$$

$$\varepsilon(n+1,n) = (\Phi\,(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\varepsilon\,(n,n-1) + \mathbf{v}_1(n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n) \tag{3.50}$$

Dari persamaan (3.28) diketahui bahwa perkiraan kovariansi matriks vektor galat proses adalah:

$$\mathbf{k}(n,n\text{-}1) = E\left[\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^{T}(n,n-1)\right] \tag{3.51}$$

Sehingga dengan mensubtitusikan persamaan (3.50) ke persamaan (3.51) dan dengan memandang bahwa vektor gangguan $\mathbf{v}_1(n)$ dan $\mathbf{v}_2(n)$ saling independen dengan perkiraan vektor galat proses $\varepsilon\,(n,n\text{-}1)$ sesuai dengan persamaan (3.7) dan (3.8) maka kovariansi matriks vektor perkiraan galat proses menjadi:

$$\mathbf{k}(n+1,n) = E\left[\varepsilon(n+1,n)\varepsilon^{T}(n+1,n)\right]$$

$$\mathbf{k}(n+1,n) = E\Big[\,(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\,\varepsilon\,(n,n\text{-}1) + \mathbf{v}_1(n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n))$$
$$(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\varepsilon\,(n,n\text{-}1) + \mathbf{v}_1(n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n))^{T}\,\Big]$$

$$\mathbf{k}(n+1,n) = E\Big[\,(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,)\,\varepsilon\,(n,n\text{-}1)\,\varepsilon^{T}(n,n\text{-}1)\,(\Phi(n+1,n) -$$
$$\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))^{T}\,\Big] + E\Big[\,\mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_2(n)^{T}\mathbf{G}^{T}(n)\,\Big] + E\Big[\,\mathbf{v}_1(n)$$
$$\mathbf{v}_1^{T}(n)\,\Big] + E\Big[\,(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\varepsilon\,(n,n\text{-}1)\,\mathbf{v}_1^{T}(n)\,\Big] +$$
$$E\Big[\,\mathbf{v}_1(n)(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\,\varepsilon\,(n,n\text{-}1))^{T}\,\Big] - E\Big[\,(\Phi(n+1,n) -$$
$$\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))\varepsilon(n,n-1)(\mathbf{G}(n)\mathbf{v}_2(n))^{T}\,\Big] - E\Big[\,\mathbf{G}(n)\mathbf{v}_2(n)((\Phi\,(n+1,n) -$$
$$\mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\varepsilon\,(n,n\text{-}1))^{T}\,\Big] - E\Big[\,\mathbf{v}_1(n)\,(\mathbf{G}(n)\,\mathbf{v}_2(n))^{T}\,\Big] - E\Big[\,\mathbf{G}(n)$$
$$\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_1^{T}(n)\,\Big]$$

$$\mathbf{k}(n+1,n) = E\Big[\,(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\,\varepsilon\,(n,n\text{-}1)\,\varepsilon^{T}(n,n\text{-}1)\,(\Phi(n+1,n) -$$
$$\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))^{T}\,\Big] + \mathbf{G}(n)\,E\Big[\,\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_2^{T}(n)\,\Big]\mathbf{G}^{T}(n) + \mathbf{Q}_1(n)$$

$\mathbf{k}(n+1,n) = (\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\,E[\,\varepsilon\,(n,n-1)\,\varepsilon^{T}(n,n-1)]\,(\Phi(n+1,n)\; -$

$\mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))^{T} + \mathbf{G}(n)\,E\left[\;\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_2^{T}(n)\;\right]\mathbf{G}^{T}(n) + \mathbf{Q}_1(n)$

$\mathbf{k}(n+1,n) = (\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))\,\mathbf{k}(n,n-1)\,(\Phi\;(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))^{T} +$

$\mathbf{G}(n)\,E\left[\;\mathbf{v}_2(n)\,\mathbf{v}_2^{T}(n)\;\right]\mathbf{G}^{T}(n) + \mathbf{Q}_1(n)$

$=(\Phi(n+1,n)\,\mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1))(\Phi(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))^{T} +$

$\mathbf{Q}_1(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{Q}_2(n)\,\mathbf{G}^{T}(n)$ (3.52)

Dengan $\mathbf{Q}_1(n)$ dan $\mathbf{Q}_2(n)$ adalah kovariansi matriks $\mathbf{v}_1(n)$ dan $\mathbf{v}_2(n)$. Pandang persamaan (3.27) dan (3.41)

$\Sigma(n) \;= \mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^{T}(n) + \mathbf{Q}_2(n)$

$\mathbf{G}(n)\,\Sigma(n) = E[\,\mathbf{x}(n+1)\,\alpha^{T}(n)]$

Subtitusikan persamaan (3.27) ke persamaan (3.41)

$\mathbf{G}(n)(\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n)\,\mathbf{C}^{T}(n) + \mathbf{Q}_2(n)) = \Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^{T}(n)$

$\mathbf{G}(n)\,\mathbf{Q}_2(n) = \Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^{T}(n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n)\,\mathbf{C}^{T}(n)$ (3.53)

Persamaan (3.53) disubtitusikan ke persamaan (3.52), maka persamaan Riccatinya menjadi:

$\mathbf{k}(n+1,n) = (\Phi(n+1,n)\,\mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\mathbf{k}(n,n-1))(\Phi\;(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))^{T} +$

$\mathbf{Q}_1(n) + (\Phi(n+1,n)\,\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^{T}(n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n)\,\mathbf{C}^{T}(n))\mathbf{G}^{T}(n)$

$=(\Phi(n+1,n)\,\mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1))\,\Phi^{T}(n+1,n) - (\Phi(n+1,n)$

$\mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1))\,(\mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))^{T} + \mathbf{Q}_1(n) + \Phi(n+1,n)$

$\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^{T}(n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n)\,\mathbf{C}^{T}(n))\mathbf{G}^{T}(n)$

$$\mathbf{k}(n+1,n) = (\Phi(n+1,n)\,\mathbf{k}(n, n-1) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n, n-1))\ \Phi^{T}(n+1,n) + \mathbf{Q}_1(n) -$$

$$(\Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n, n-1)\,(\mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n))^{T} - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1)\,(\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))^{T}$$

$$+ (\Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n,n-1)\,(\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))^{T} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n)\mathbf{k}(n,n-1)\,(\mathbf{G}(n)\mathbf{C}(n))^{T}.$$

$$= (\Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\mathbf{k}(n,n-1))\ \Phi^{T}(n+1,n) + \mathbf{Q}_1(n) \quad (3.54)$$

Pada bagian pernyataan-pernyataan yang berkaitan dengan model state space pada sub bab 3.1. dinyatakan bahwa matriks transisi $\Phi(n+1,n)$ determinannya tidak boleh sama dengan nol, sehingga mempunyai invers matriks. Dengan mengalikan kedua sisi persamaan (3.54) dengan invers matriks $\Phi(n+1,n)$ yaitu $\Phi^{-1}(n+1,n)$ maka persamaannya menjadi:

$$\Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{k}(n+1,n) = \Phi^{-1}(n+1,n)(\Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\mathbf{k}(n,n-1))$$

$$\Phi^{T}(n+1,n) + \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{Q}_1(n)$$

$$= \mathbf{k}(n,n-1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\mathbf{k}(n,n-1)$$

$$\Phi^{T}(n+1,n) + \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{Q}_1(n)$$

$$= \mathbf{k}(n)\ \Phi^{T}(n+1,n) + \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{Q}_1(n) \quad (3.55)$$

Dengan mengalikan kembali kedua sisi persamaan (3.55) dengan $\Phi(n+1,n)$ maka dihasilkan

$$\Phi^{-1}(n+1,n)\ \Phi(n+1,n)\ \mathbf{k}(n+1n) = \Phi(n+1,n)\ (\mathbf{k}(n)\ \Phi^{T}(n+1,n) + \Phi(n+1,n)$$

$$\Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{Q}_1(n))$$

$$\mathbf{k}(n+1,n) = \Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n)\,\Phi^T(n+1,n) + \mathbf{Q}_1(n) \tag{3.56}$$

Matriks $\mathbf{k}(n)$ ini dikenal dengan tapis kovariansi matriks galat Proses, yang dinyatakan dengan

$$\mathbf{k}(n) = \mathbf{k}(n,n-1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\,\mathbf{G}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1). \tag{3.57}$$

Matriks $\mathbf{k}(n)$ ini akan dijelaskan lebih lanjut dalam bagian penapisan.

3.7. Tapis Taksiran Vektor Proses

Operasi tapis Kalman berikutnya yaitu apa yang disebut penapisan. Pada bagian ini akan diuraikan tapis taksiran $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n)$ dengan menggunakan algoritma perkiraan satu tahap.

Yang pertama perlu diperhatikan bahwa vektor proses $\mathbf{x}(n)$ dan vektor gangguan proses $\mathbf{v}_1(n)$ adalah saling independen (lihat persamaan (3.18 dan 3.19). Dari persamaan (3.1) dicari taksiran kuadrat rata-rata vektor proses $\mathbf{x}(n+1)$ untuk waktu n+1, jika diberikan data-data pengamatan sampai dengan waktu n (yaitu $\mathbf{y}(1)$, $\mathbf{y}(2)$, ..., $\mathbf{y}(n)$)

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) = \Phi(n+1,n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n) + \hat{\mathbf{v}}_1(n|\mathcal{Y}_n) \tag{3.58}$$

Karena vektor gangguan proses $\mathbf{v}_1(n)$ ortogonal dengan vektor pengamatan $\mathcal{Y}_n$ (lihat persamaan (3.19)), maka persamaan (3.58) menjadi:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) = \Phi(n+1,n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n) \tag{3.59}$$

Untuk mencari tapis taksiran $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n)$, kalikan kedua sisi (3.59) dengan invers matriks transisi $\Phi^{-1}(n+1,n)$ sehingga:

$$\Phi^{-1}(n+1,n)\,\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) = \Phi^{-1}(n+1,n)\Phi(n+1,n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n) = \Phi^{-1}(n+1,n)\,\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n) \qquad (3.60)$$

Persamaan (3.60) ini menunjukkan bahwa untuk mencari tapis taksiran $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n)$ perlu mengetahui perkiraan satu tahap $\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n)$, atau dapat dinyatakan bahwa tapis taksiran $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n)$ merupakan perkalian matriks $\Phi^{-1}(n+1,n)$ dengan perkiraan satu tahap $\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n)$.

Kemudian dapat juga diformulasikan persamaan (3.22) yang menyatakan proses inovasi $\alpha(n)$ dengan menggunakan tapis taksiran vektor proses untuk waktu n-1

$$\alpha(n) = \mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}).$$

$$= \mathbf{y}(n) - \mathbf{C}(n)\,\Phi(n,n-1)\,\hat{\mathbf{x}}(n-1|\mathcal{Y}_{n-1}) \qquad (3.61)$$

Demikian juga dapat digunakan persamaan (3.42) untuk menyatakan tapis taksiran vektor proses, yaitu dengan mensubtitusikannya ke dalam persamaan (3.60).

$$\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n) = \Phi^{-1}(n+1,n)\,\hat{\mathbf{x}}(n+1|\mathcal{Y}_n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_n) = \Phi^{-1}(n+1,n)\left[\ \Phi(n+1,n)\ \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{G}(n)\ \alpha(n)\ \right]$$

$$= \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})\ + \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{G}(n)\ \alpha(n)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \Phi^{-1}(n+1,n)\Phi(n+1,n)\mathbf{k}(n.n\text{-}1)\ \mathbf{C}^{T}(n)\ \Sigma^{-1}(n)\ \alpha(n)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_n) = \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{k}(n.n\text{-}1)\ \mathbf{C}^{T}(n)\ \Sigma^{-1}(n)\ \alpha(n) \qquad (3.62)$$

3.8. Tapis Kovariansi Matriks Galat Proses

Pada pembahasan persamaan Riccati telah dijelaskan matriks **k**(n) (3.57). Pada pembahasan bagian ini ditunjukkan bahwa matriks **k**(n) merupakan kovariansi matriks dari vektor tapis galat proses.

Ditentukan bahwa vektor matriks galat proses $\varepsilon(n)$ adalah perbedaan antara proses **x**(n) dengan tapis taksiran $\hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_n)$ yang dinyatakan dengan :

$$\varepsilon\ (n) = \mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid \mathcal{Y}_n) \qquad (3.63)$$

Subtitusikan persamaan (3.60) ke persamaan (3.63), sehinggga

$$\varepsilon\ (n) = \mathbf{x}(n) - \Phi^{-1}(n+1,n)\ \hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid \mathcal{Y}_n) \qquad (3.64)$$

kemudian disubtitusikan persamaan (3.42) ke persamaan (3.64)

$$\varepsilon\ (n) = \mathbf{x}(n) - \Phi^{-1}(n+1,n)\left[\ \Phi(n+1,n)\ \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{G}(n)\ \alpha(n)\ \right]$$

$$\varepsilon\ (n) = \mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) - \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{G}(n)\ \alpha(n)$$

$$\varepsilon(n) = \varepsilon(n,n-1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\, \mathbf{G}(n)\, \alpha(n) \tag{3.65}$$

dengan $\varepsilon(n,n-1)$ adalah vektor perkiraan galat proses untuk waktu n dengan menggunakan data sampai dengan n -1, dan $\alpha(n)$ adalah proses inovasi.

Dengan menggunakan definisi kovariansi matriks untuk vektor tapis galat proses $\varepsilon(n)$ adalah harga harapan dari perkalian $\varepsilon(n)$ dan $\varepsilon^T(n)$, dan dengan menggunakan persamaan (3.65) maka dapat dinyatakan kovariansi matriks untuk tapis galat proses:

$$\begin{aligned}
E\left[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\right] = {} & E[(\varepsilon(n,n-1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{G}(n)\ \alpha(n))\ ((\varepsilon(n,n-1) - \\
& \Phi^{-1}(n+1,n) - \mathbf{G}(n)\, \alpha(n))^T\,] \\
= {} & E\left[(\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^T(n,n-1)\right] + \Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n)E\left[\alpha(n)\alpha^T(n)\right] \\
& (\Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n))^T - 2E[\varepsilon(n,n-1)\alpha^T(n)] \\
& (\Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n))^T
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Apabila diperiksa maka persamaan (3.66) ini mempunyai harga harapan yang bisa dipisahkan satu-persatu :

1. Perkiraan kovariansi matriks galat proses

   $$\mathbf{k}(n,n-1) = E\left[(\varepsilon(n,n-1)\varepsilon^T(n,n-1)\right]$$

2. Kovariansi matriks proses inovasi

$$\Sigma(n) = E\left[\alpha(n)\alpha^T(n)\right]$$

3. $E[\ \varepsilon\ (n,n\text{-}1)\alpha^T(n)\ ] = E\ [(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}\ (n|\mathcal{Y}_{n-1}))\alpha^T(n)\ ]$

$$= E\left[\mathbf{x}(n)\alpha^T(n)\right] - E[\ \hat{\mathbf{x}}\ (n|\mathcal{Y}_{n-1})\ \alpha^T(n)\ ]$$

$$= E\left[\mathbf{x}(n)\alpha^T(n)\right]$$

Sesuai dengan prinsip ortogonalitas harga harapan $E[\ \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$ $\alpha^T(n)]$ sama dengan nol.

$$E[\ \hat{\mathbf{x}}\ (n|\mathcal{Y}_{n-1})\ \alpha^T(n)\ ] = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{B}_i(k)\alpha(k)\alpha^T(n)\right]$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } k \neq n$$

Kemudian dari persamaan (3.38) dengan mengambil nilai k = n, dan dengan mengalikan kedua sisinya dengan invers matriks $\Phi^{-1}(n+1,n)$ maka dihasilkan:

$$E\left[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(n)\right] = \Phi(n+1,n)E\left[\mathbf{x}(n)\alpha^T(n)\right]$$

$$\Phi^{-1}(n+1,n)\ E\left[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(n)\right] = \Phi^{-1}(n+1,n)\Phi(n+1,n)E\left[\mathbf{x}(n)\alpha^T(n)\right]$$

$$\Phi^{-1}(n+1,n)\ E\left[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(n)\right] = E\left[\mathbf{x}(n)\alpha^T(n)\right]$$

$$E\left[\mathbf{x}(n)\alpha^T(n)\right] = \Phi^{-1}(n+1,n)\ E\left[\mathbf{x}(n+1)\alpha^T(n)\right]$$

Dengan demikian nilai harapan yang ke tiga pada persamaan (3.66) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E[\ \varepsilon\ (n,n\text{-}1)\alpha^T(n)\ ] = E[x(n)\alpha^T(n)]$$

$$= \Phi^{-1}(n+1,n)\ E\ [x(n+1)\alpha^T(n)]$$

dan dengan menggunakan persamaan (3.41) nilai harapan ke tiga pada persamaan (3.66) ini menjadi:

$$E[\ \varepsilon\ (n,n\text{-}1)\alpha^T(n)\ ] = \Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n)\ \Sigma(n)$$

Sebagai akibat dari ketiga nilai harapan ini maka persamaan (3.66) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$E[\ \varepsilon\ (n)\varepsilon^T(n)\ ] = \mathbf{k}(n,n\text{-}1) + \Phi^{-1}(n+1,n)\ \mathbf{G}(n)\ \Sigma(n)\ (\Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n))^T -$$

$$2\Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n)\ \Sigma(n)(\Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n))^T$$

$$= \mathbf{k}(n,n\text{-}1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n)\ \Sigma(n)\ (\Phi^{-1}(n+1,n)\mathbf{G}(n))^T \tag{3.67}$$

Sekarang pandang persamaan (3.41), dengan mengalikan kedua sisinya dengan $\Sigma(n)$. Maka dihasilkan :

$$\mathbf{G}(n) = \Phi\ (n+1,n)\ \mathbf{k}(n,n\text{-}1)\ \mathbf{C}^T\ (n)\ \Sigma^{-1}\ (n)$$

$$\mathbf{G}(n)\ \Sigma(n) = \Phi\ (n+1,n)\ \mathbf{k}(n,n\text{-}1)\ \mathbf{C}^T\ (n)\ \Sigma^{-1}\ (n)\ \Sigma(n)$$

$$\mathbf{G}(n)\Sigma(n) = \Phi\ (n+1,n)\ \mathbf{k}(n,n\text{-}1)\ \mathbf{C}^T\ (n) \tag{3.68}$$

Substitusikan persamaan (3.68) ke persamaan (3.67) sehingga persamaannya menjadi :

$$E(\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)) = \mathbf{k}(n,n-1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\,\Phi(n+1,n)\,\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^T(n)\,(\Phi^{-1}(n+1)\,\mathbf{G}(n))^T$$

$$= \mathbf{k}(n,n-1) - \Phi^{-1}(n+1,n)\,\mathbf{C}^T(n)\,\mathbf{G}^T(n)\,\mathbf{k}(n,n-1) \qquad (3.69)$$

Ternyata bila dibandingkan tapis kovariansi matriks galat proses pada persamaan (3.69) sama dengan nilai $\mathbf{k}(n)$ pada persamaan (3.57),

$$E[\varepsilon(n)\,\varepsilon^T(n)] = \mathbf{k}(n)$$

Ini berarti bahwa matriks yang digunakan dalam persamaan Riccati (3.57) adalah tapis kovariansi matriks galat proses.

3.9 Kondisi Awal

Untuk menjalankan prosedur perkiraan satu tahap dan langkah-langkah penapisan maka diperlukan nilai awalnya. Nilai awal dalam proses tapis Kalman tidak diketahui secara pasti namun biasanya digunakan rataan dan kovariansi matrik pada waktu data tidak diamati, yaitu ketika n sama dengan nol. Sehingga dapat diambil tapis taksiran awalnya sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{x}}(0|\mathcal{Y}_0) = E[\hat{\mathbf{x}}(0)] \qquad (3.70)$$

dan kovariansi matriks

$$\mathbf{k}(0) = E[\mathbf{x}(0)\,\mathbf{x}^T(0)] = \mathbf{P}_0 \qquad (3.71)$$

Misalkan diasumsikan vektor proses $\mathbf{x}(n)$ mempunyai rata-rata nol, maka $(\hat{\mathbf{x}}(0)|\, \mathcal{Y}_0)$ sama dengan nol. Dengan kata lain nilai awal tapis taksiran pada persamaan (3.70) sama dengan vektor nol. Sebagai catatan jika diberikan kondisi awal seperti dalam persamaan (3.70) dan (3.71) maka perhitungan rekursinya sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{x}}(1|\,\mathcal{Y}_0) = \Phi(1,0)\,\hat{\mathbf{x}}(0|\,\mathcal{Y}_0)$$

$$= \Phi\,(1,0)\,E[\hat{\mathbf{x}}(0)\,]$$

dan dengan menggunakan persamaan (3.56)

$$\mathbf{k}(1,0) = \Phi(1,0)\,\mathbf{k}(0)\,\Phi^T(1,0) + \mathbf{Q}_1(0)$$

$$= \Phi(1,0)\,\mathbf{P}_0\,\Phi^T(1,0) + \mathbf{Q}_1(0)$$

3.10. Langkah-langkah Rekursi Tapis Kalman Berdasarkan Perkiraan Satu Tahap.

Input Vektor Proses

Pengamatan-pengamatan = $\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \ldots, \mathbf{y}(n)\}$

Parameter-parameter yang diketahui

Matriks transisi proses = $\Phi(n+1, n)$

Matriks pengamatan = $\mathbf{C}(n)$

Kovariansi matriks vektor gangguan proses $\mathbf{Q}_1(n)$

Kovariansi matriks vektor gangguan pengamatan $\mathbf{Q}_2(n)$

Perhitungan : n = 1, 2, . . .

1. $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) = \Phi(n,n-1)\,\hat{\mathbf{x}}(n-1|\mathcal{Y}_{n-1})$
2. $\mathbf{k}(n,n-1) = \Phi(n,n-1)\,\mathbf{k}(n-1)\,\Phi^T(n,n-1) + \mathbf{Q}_1(n-1)$
3. $\hat{\mathbf{y}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) = \mathbf{C}(n)\,\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$
4. $\alpha(n) = \mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n|\mathcal{Y}_{n-1})$
5. $\Sigma(n) = \mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^T(n) + \mathbf{Q}_2(n)$
6. $\hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_n) = \hat{\mathbf{x}}(n|\mathcal{Y}_{n-1}) + \mathbf{k}(n,n-1)\mathbf{C}^T(n)\,\Sigma^{-1}(n)\alpha(n)$
7. $\mathbf{k}(n) = \mathbf{k}(n,n-1) - \mathbf{k}(n,n-1)\,\mathbf{C}^T(n)\,\Sigma^{-1}(n)\,\mathbf{C}(n)\,\mathbf{k}(n,n-1)$

nilai awal

$$\hat{\mathbf{x}}(0|\mathcal{Y}_0) = E[\hat{\mathbf{x}}(0)]$$

$$\mathbf{k}(0) = E[\mathbf{x}(0)\,\mathbf{x}^T(0)] = \mathbf{P}_0$$