BAB II PENUNJANG

Dalam bab penunjang ini, dibahas mengenai himpunan, matrik, persamaan garis dan game serta teorema Taylor. Namun dalam pembahasannya tidak secara keseluruhan tetapi hanya sebagian kecil saja yang ada kaitannya dengan pokok bahasan, yaitu metode penawaran dan Bimatrix Game.

2.1. Himpunan

Definisi 1

Himpunan adalah sekelompok objek yang berada dalam satu kesatuan yang memenuhi syarat dan sifat keanggotaan sebagai berikut :

- tiap objek di dalam kelompok itu dapat dibedakan yang satu dari yang lain.
- Harus dapat dibedakan antara objek yang merupakan anggota dari suatu himpunan dengan objek yang bukan anggota himpunan tersebut.
- Harus ada hubungan yang nyata antara sesama anggota dari suatu himpunan.

Contoh 1

Himpunan A merupakan himpunan bulat positif yang lebih kecil dari 8.

maka $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Definisi 2

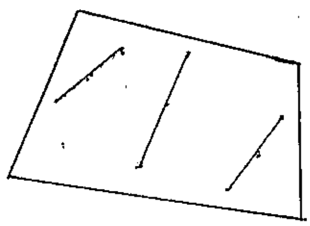
Himpunan A dikatakan himpunan bagian (sub himpunan) dari himpunan B dengan notasi $A \subset B$ jika setiap unsur (elemen) himpunan A juga merupakan elemen himpunan B.

Definisi 3

Himpunan S disebut himpunan konvek jika hasil kombinasi konvek dari 2 titik sembarang anggota S berada di dalam S, sedemikian sehingga jika $t = \alpha\ t_1 + \beta\ t_2$ dengan $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ dan $t_1, t_2 \in S$ maka $t \in S$

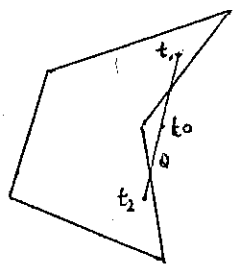
Contoh 2

a) Bidang segi empat



merupakan himpunan konvek.

b) Bidang berikut



Bukan himpunan konvek, sebab $t_0 = n\ t_1 + m\ t_2$ tidak berada di dalam bidang tersebut.

2.2. Matrik

Definisi 4

Matrik adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/disejajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matrik. Untuk batasnya diberikan :

$$\left[\qquad \right]$$

Contoh 3

$$\begin{array}{rl} & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 10 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{baris } 2 \\ \longrightarrow \text{baris } 3 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \text{kolom} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

Dalam hal ini notasi untuk matrik adalah A, B, C dan lain-lain (huruf besar). Secara lengkap ditulis matrik $A = (a_{ij})$ yang artinya suatu matrik A dengan elemen-elemen a_{ij}, yang mana indeks i menyatakan baris ke i dan indeks j menyatakan kolom ke j.

Definisi 5

Suatu matrik dikatakan berukuran $(m \times n)$ atau ordo $m \times n$, jika jumlah baris matrik tersebut sama dengan m dan jumlah kolomnya sama dengan n.

Contoh 4

Matrik pada contoh 3 berukuran 3×4 atau matrik ordo 3×4.

Definisi 6

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, matrik berukuran sama, maka $A - B$ adalah matrik $C = (c_{ij})$ dengan $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

atau

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

Contoh 5

jika diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3-0 & 1-2 \\ 4-1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Definisi 7

Jika λ skalar dan $A = (a_{ij})$ maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, dengan perkataan lain matriks λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan λ.

Contoh 6

Jika diketahui :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{maka} \quad \frac{1}{2} A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Definisi 8

Jika $A = (a_{ij})$ berukuran $(p \times q)$ dan $B = (b_{jk})$ berukuran $(q \times r)$, maka perkalian $A\ B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ik})$ berukuran $(p \times r)$, dengan $c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{iq} b_{qk}$

untuk setiap $i = 1,2,\ldots,p$ dan $k = 1,2,\ldots,r$

Contoh 7

Diketahui :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} 3.3+2.1+1.0 & 3.(-1)+2.2+1.(-3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 11 & -2 \end{bmatrix}$$

Lemma 1

Operasi matriks memenuhi hukum asosiatif terhadap perkalian sedemikian sehingga jika : $A = (a_{ij})$ matriks berukuran $(p \times q)$, $B = (b_{jk})$ matriks berukuran $(q \times r)$ dan $C = (C_{kl})$ matriks berukuran $(r \times s)$ maka,

$$A(BC) = (AB)C$$

Bukti :

Menurut definisi 8 maka :

$BC = (b_{jk})\ (C_{kl}) = (d_{jl})$

dengan :

$d_{jl} = b_{j1}\, c_{1l} + b_{j2}\, c_{2l} + \ldots + b_{jr} c_{rl}$ ... (1)

Untuk setiap $j = 1,2,\ldots,q$ dan $l = 1,2,\ldots,s$

dan

$$AB = (a_{ij})\ (b_{jk}) = (e_{ik})$$

dengan :

$e_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots + a_{iq} b_{qk}$ ... (2)

Untuk setiap $i = 1,2, \ldots, p$ dan $k = 1,2,\ldots,r$

sehingga :

$$A(BC) = (a_{ij})\ (d_{jl}) = (f_{il}) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

dengan :

$f_{il} = a_{i1}\, d_{1l} + a_{i2}\, d_{2l} + \ldots + a_{iq} d_{ql}$

Untuk setiap $i = 1,2, \ldots, p$ dan $l = 1,2,\ldots,s$

Karena (1) maka

$$\begin{aligned} f_{il} = {} & a_{i1}(b_{11}c_{1l} + b_{12}\, c_{2l} + \ldots + b_{1r}\, c_{rl}) + \\ & a_{i2}(b_{21}c_{1l} + b_{22}\, c_{2l} + \ldots + b_{2r}\, c_{rl}) + \\ & \ldots \\ & + a_{iq}(b_{q1}c_{1l} + b_{q2}\, c_{2l} + \ldots + b_{qr}\, c_{rl}) \\ = {} & (a_{i1} b_{11} + a_{i2}\, b_{21} + \ldots + a_{iq}\, b_{q1})\, C_{1l} + \\ & (a_{i1} b_{12} + a_{i2}\, b_{22} + \ldots + a_{iq}\, b_{q2})\, C_{2l} + \\ & \ldots \\ & + (a_{i1}b_{1r} + a_{i2}\, b_{2r} + \ldots + a_{iq}\, b_{qr})\, C_{rl} \end{aligned}$$

sehingga

$f_{il} = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots + a_{iq}\, b_{qk})\, C_{kl}$

dengan $k = 1, 2, \ldots r$

dan karena (2) maka

$$f_{il} = e_{ik}\, c_{kl}$$

dengan demikian (3) menjadi

$$\begin{aligned} A(BC) &= (f_{il}) = (e_{ik})\ (e_{kl}) \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

Jadi terbukti $A(BC) = (AB)C$ dan Lemma 1 terbukti.

contoh 8

Misalkan $A = [1\ 3\ 5]$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

maka :

$$A(BC) = [1\ 3\ 5] \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= [1\ 3\ 5] \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= [-30]$$

$$(AB)C = \left([1\ 3\ 5] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= [22\ -4] \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= [-30]$$

Jelas $A(BC) = (AB)C$

definisi 9

Jika suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $(m \times n)$ maka transpose dari A adalah matriks A^T berukuran $(n \times m)$ yang didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke i dari A, $i = 1, 2 \ldots m$, sebagai kolom ke i dari A^T. Dengan kata lain : $A^T = (a_{ji})$

contoh 9

Misalkan : $A = [1\ 3\ 5]$ maka $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

2.3. Persamaan Garis

definisi 10

Persamaan garis yang melalui 2 titik (U_1, V_1) dan (U_2, V_2) adalah :

$$(V - V_1) = \frac{V_2 - V_1}{U_2 - U_1} (U - U_1) \text{ dengan } \frac{V_2 - V_1}{U_2 - U_1} = \rho$$

ρ adalah gradien (koefisien arah) garis lurus

contoh 10

Persamaan garis melalui titik (1,-3) dan (0,5) adalah :

$$(V - (-3)) = \frac{5 - (-3)}{0 - 1} (U - 1)$$

$$V + 3 = -8 (U-1)$$

$$V = -8U + 5$$

definisi 11

Persamaan garis melalui titik (U_1, V_1) dengan gradien ρ adalah :

$$(V - V_1) = \rho (U - U_1)$$

contoh 11

Persamaan garis melalui (1,4) dengan gradien 2 adalah :

$$V - 4 = 2 (U - 1)$$

$$V = 2U + 2$$

definisi 12

Titik potong antara 2 garis ialah titik yang terletak pada kedua garis itu, sehingga koordinatnya memenuhi kedua persamaan garis tersebut.

contoh 12

Tentukan titik potong garis $V = 2U + 2$ dan $V = 5U + 5$.

Penyelesaian :

Menurut definisi 12 maka koordinat titik potong kedua garis tersebut memenuhi $V = 2U + 2$ dan $V = 5U + 5$.

$$2U + 2 = 5U + 5$$
$$-3U = 3$$
$$U = -1$$

sehingga $V = 2 . -1 + 2$

$$= 0$$

Jadi titik potongnya adalah $(U,V) = (-1,0)$

2.4. Sistem Persamaan Linier

definisi 13

Sistem persamaan disebut sistem persamaan linier jika pangkat tertinggi dari variabel-variabel nya adalah satu.

definisi 14

Sistem persamaan linier dengan 2 variabel U dan

V, berbentuk :

$$aU + bV + c = 0$$

dengan a, b, dan c adalah konstanta.

definisi 15

Sistem persamaan linier dengan 3 variabel U, V, dan W, berbentuk :

$$aU + bV + cW + d = 0$$

dengan a, b, c, dan d adalah konstanta.

Untuk menentukan nilai U, V dan W dapat diselesaikan dengan cara substitusi atau eliminasi.

definisi 16

Substitusi adalah mengganti suatu variabel dengan harga atau nilai dari variabel tersebut.

definisi 17

Eliminasi adalah menghilangkan salah satu variabel dari 2 persamaan dengan jalan menjumlahkan atau mengurangkan dengan terlebih dahulu menyamakan koefisien variabel yang dimaksud.

Contoh 13

Diketahui 2 persamaan dengan 2 variabel sbb :

$$2U + 5V = 6$$

$$4U + 9V = 10$$

Tentukan harga U dan V yang memenuhi 2 persamaan tersebut.

Penyelesaian :

dengan cara eliminasi menurut definisi 17 terlebih dahulu persamaan pertama dikalikan 2 dan persamaan kedua tetap, sehingga didapat

$$\begin{array}{r} 4U + 10V = 12 \\ 4U + 9V = 10 \\ \hline V = 2 \end{array} \; -$$

harga V ini disubstitusikan ke salah satu persamaan diatas, sehingga menurut definisi 16 didapat

$$2U + 5V = 6$$

$$2U + 5.2 = 6$$

$$2U = 6 - 10$$

$$2U = -4 \text{ jadi } U = -2$$

Dengan demikian didapat solusi U = −2 dan V = 2.

2.5. Program Linier

Program linier merupakan salah satu alat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah riset operasi yang mengandalkan pada model matematika dan penyelesaiannya.

definisi 18

Model matematika ialah salah satu cara sederhana untuk memandang suatu masalah dengan menggunakan persamaan atau pertidaksamaan matematika.

Contoh 14

Untuk membuat barang I diperlukan 6 satuan bahan A dan 4 satuan bahan B, sedangkan jenis barang

II diperlukan 2 satuan bahan A dan 3 satuan bahan B. Bahan A tersedia 100 satuan dan B tersedia 150 satuan. Jika barang I diproduksi U satuan dan barang II V satuan, maka tentukan model matematikanya.

Penyelesaian :

Model matematika dari permasalahan pada contoh 14 adalah sebagai berikut :

$$6U + 2V \leq 100$$

$$4U + 3V \leq 150$$

$$U \geq 0 \text{ dan } V \geq 0$$

definisi 19

Daerah feasible suatu model matematika ialah daerah dimana koordinat setiap titiknya memenuhi model matematika tersebut

Definisi 20

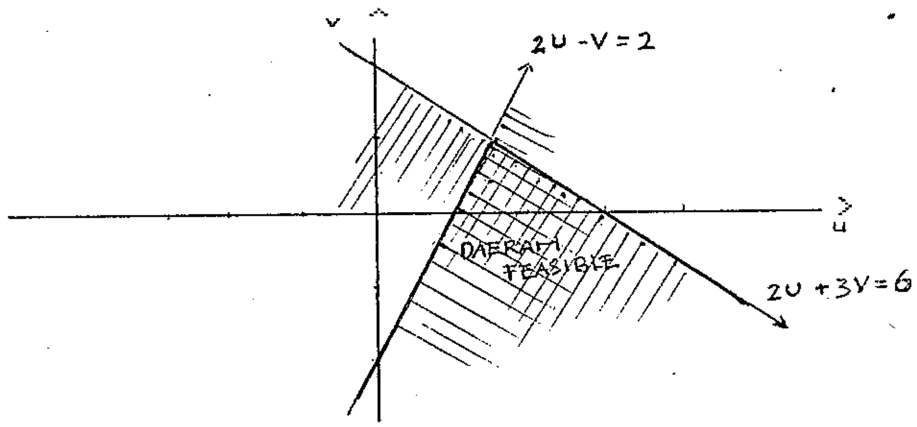
Jika salah satu titik (sebarang) memenuhi suatu pertidaksamaan, maka daerah feasible untuk pertidaksamaan tersebut adalah daerah setengah bidang terbuka yang memuat titik tersebut yang dibatasi oleh persamaan garisnya.

contoh 15

Tentukan daerah feasible dari 2 pertidaksamaan (model matematika) $2U + 3V \leq 6$ dan $2U - V \geq 2$.

Penyelesaian :

. Menurut definisi 19 maka kedua pertidaksamaan tersebut masing-masing mempunyai daerah feasible seperti tampak dalam grafik dibawah ini yaitu daerah terarsir.



Sehingga daerah feasible dari 2 pertidaksamaan pada contoh 15 adalah daerah yang terkena 2 arsiran.

2.6. Game

Dalam pembahasan mengenai game ada beberapa aturan yang harus diperhatikan dan diketahui oleh pihak pemain. Adapun aturan-aturan tersebut meliputi :

a. Langkah yang dapat diambil (dipilih) oleh setiap pemain.

b. Informasi yang digunakan tiap-tiap pemain yang memilih langkah-langkah tersebut.

c. Pembayaran yang harus dipenuhi oleh tiap-tiap pemain setelah dilakukan permainan.

definisi 21

Langkah adalah cara untuk memilih antara 2 pilihan atau lebih.

definisi 22

Strategi total permainan adalah rangkaian langkah-langkah dari kedua pihak yang merupakan metode yang digunakan pemain dalam suatu permainan (game) dari awal hingga akhir.

definisi 23

Strategi murni adalah strategi dimana hanya ada tepat satu langkah yang dipilih (terbaik), yaitu : $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dengan $x_{k=l} = 1$ dan $x_{k \neq l} = 0$

Contoh 16

Strategi $X = (x_1, x_2, x_3) = (0,1,0)$ adalah strategi murni, sebab hanya ada satu langkah yang terbaik (dipilih) yaitu x_2, sedang yang lain bernilai 0 artinya sama sekali tidak dipilih.

definisi 24

Strategi campuran adalah strategi dimana ada lebih dari satu langkah yang terbaik (dipilih) yaitu :

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \text{ dan } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \; x_i \geq 0$$

dengan x_i adalah nilai kemungkinan (peluang) terpilihnya langkah ke i.

Contoh 17

Strategi $X = (x_1, x_2) = (3/4, 1/4)$ adalah strategi campuran, artinya langkah ke 1 (x_1) mempunyai nilai peluang 3/4 dan nilai peluang terpilihnya langkah ke 2 (x_2) adalah 1/4.

definisi 25

Matrik pembayaran adalah tabel yang menyatakan pembayaran yang bersesuaian dengan strategi setiap pemain.

Dalam pembahasan ini notasi matrik pembayaran adalah A, B, C (huruf kapital) atau ditulis (c_{ij}) yaitu pembayaran dengan elemen pembayaran c_{ij}, $i = 1,2, \ldots m$, $j = 1,2, \ldots, n$, atau juga ditulis dengan :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

definisi 26

Titik pelanan (titik sadel) adalah suatu nilai dalam suatu matrik pembayaran yang merupakan maksimum dari harga minimum baris-barisnya dan sekaligus merupakan minimum dari harga maksimum kolom-kolomnya, yang merupakan nilai permainan untuk gamenya.

Contoh 18

Diketahui matrik pembayaran dari suatu game sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka :

$$\max_i [\min_i \text{ baris } i] = \max_i [2, -1, 0] = 2$$

$$\min_j [\max_j \text{ kolom } j] = \min_j [5, 2, 3, 3] = 2$$

karena $\max_i [\min_i \text{ baris } i] = \min_j [\max_j \text{ kolom } j] = 2$

maka 2 merupakan titik sadel dan nilai permainan untuk gamenya = 2.

definisi 27

Jika matriks pembayaran suatu game mempunyai sadel maka strategi yang digunakan adalah strategi murni dan jika tidak mempunyai titik sadel maka strategi yang digunakan adalah strategi campuran.

Contoh 19

Dari contoh 18, karena matrik pembayaran dari game tersebut mempunyai titik sadel yaitu 2 dan angka (elemen dari matrik pembayaran) terletak pada baris 1 dan kolom 2, maka strategi untuk pemain I adalah $X = (x_1, x_2, x_3) = (1,0,0)$ yang yang merupakan strategi murni dan strategi murni untuk pemain II adalah

$Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0,1,0,0)$.

definisi 28

Fungsi pembayaran $P(X,Y) = X\,C\,Y^T$ adalah suatu fungsi yang menentukan total pembayaran suatu game yang bersesuaian dengan strategi yang dipilih Dengan X, Y masing-masing adalah strategi untuk pemain I dan pemain II.

Dengan $X = (x_1, x_2, \ldots x_m)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ serta $C = (c_{ij})$ adalah matrik pembayaran.

$i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$.

Lemma 2

$$X\,C\,Y^T = \sum_{i=1}^{m} x_i \; (C\,Y^T)_i \; = \sum_{j=1}^{n} \; (X\,C\,)_j \; y_j$$

dengan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ adalah strategi pemain I, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ adalah strategi pemain II, dan $C = (c_{ij})$ adalah matrik pembayaran.

Bukti :

Menurut definisi 9 $Y^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Sehingga :

$$X\ C\ Y^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

karena perkalian dari matrik memenuhi hukum assosiatif (Lemma 1) dan berdasarkan definisi 8 maka :

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_m] \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= [x_1, x_2, \ldots, x_m] \begin{bmatrix} (c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \ldots + c_{1n} y_n) \\ (c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \ldots + c_{2n} y_n) \\ \vdots \\ (c_{m1} y_{11} + c_{m2} y_2 + \ldots + c_{mn} y_n) \end{bmatrix}$$

$$= x_1 (c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \ldots + c_{1n} y_n) + x_2 (c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \ldots + c_{2n} y_n) + \ldots + x_m (c_{m1} y_1 + c_{m2} y_2 + \ldots + c_{mn} y_n).$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \left([c_{i1}\ c_{i2}\ .\ .\ .\ c_{in}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \ (C\ Y^T)_i$$

Tetapi juga karena Lemma 1 maka

$$[x_1,\ x_2,\ .\ .\ .,\ x_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \left([x_1,\ x_2,\ .\ .\ .,\ x_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$$= [(x_1\ c_{11} + x_2\ c_{21} + \ldots + x_m\ c_{m1}) \quad (x_1\ c_{12} + x_2\ c_{22} + \ldots + x_m\ c_{m2}) \ \ldots \ (x_1\ c_{1n} + x_2\ c_{2n} + \ldots + x_m\ c_{mn})] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= (x_1\ c_{11} + x_2\ c_{21} + \ldots + x_m\ c_{m1})\ y_1 + (x_1\ c_{12} + x_2\ c_{22} + \ldots + x_m\ c_{m2})\ y_2 + \ldots + (x_1\ c_{1n} + x_2\ c_{2n} + \ldots + x_m\ c_{mn})\ y_n.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_1 c_{1j} + x_2 c_{2j} + \dots + x_m c_{mj}) y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left([\, x_1 \quad x_2 \dots x_m \,] \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} \right) y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (X\ C\ )_j\ y_j$$

Jadi terbukti bahwa $X\ C\ Y^T = \sum_{i=1}^{m} x_i (C\ Y^T)_i = \sum_{j=1}^{n} (X\ C)_j\ y_j$

Lemma 3

$$X\ C\ Y^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\ y_j\ c_{ij} \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\ y_j = 1$$

dengan :

$X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ adalah strategi pemain I

$Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ adalah strategi pemain II

$C = (c_{ij})$ adalah matriks pembayaran.

Bukti :

Menurut Lemma 2 $X\ C\ Y^T = \sum_{i=1}^{m} x_i\ (C\ Y^T)_i$ sehingga :

$$X\ C\ Y^T = \sum_{i=1}^{n} x_i\ [\, c_{i1}, c_{i2}, \dots c_{in} \,] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \; (c_{i1} y_1 + c_{i2} \; y_2 \; + \; ... + c_{in} \; y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \; (y_1 \; c_{i1} + y_2 \; c_{i2} + ... + \; y_n \; c_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \; x_i \; y_1 \; c_{i1} + \; x_i \; y_2 \; c_{i2} + \; ... + \; x_i \; y_n \; c_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; y_j \; c_{ij}$$

terbukti : $X \, C \, Y^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; y_j \; c_{ij}$

selanjutnya :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; y_j \quad = \sum_{i=1}^{m} (x_i \; y_1 + x_i \; y_2 \; + \; ... + x_i \; y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i (\; y_1 + y_2 \; + \; ... + \; y_n \;)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \; x_i \; \sum_{j=i}^{m} \; y_j$$

Karena definisi 24 maka

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=i}^{n} y_j \quad = \sum x_i \cdot 1$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

definisi 29

(X^*, Y^*, W) adalah suatu solusi optimal game $G = (X_1, X_2, P)$ maka untuk $X \in X_1$ dan $Y \in X_2$

berlaku pertidaksamaan.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* \; y_j \; c_{ij} \geq W \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; y_j^* \; c_{ij}$$

atau

$$X^*C\,Y^T \geq W \geq X\,C\,Y^{*T}$$

dengan :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$ strategi optimal pemain I

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*)$ strategi optimal pemain II

$C = (c_{ij})$, matriks pembayaran dengan elemen c_{ij}

X_1 = himpunan strategi pemain I

X_2 = himpunan strategi pemain II

W = total pembayaran

Lemma 4

(X^*, Y^*, W) adalah suatu solusi optimal game $G = (X_1, X_2, P)$ dengan matrik pembayaran C bila dan hanya bila

$$(X^*C)_j \geq W \text{ dan } (C\,Y^{*T})_i \leq W$$

dengan :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$ strategi optimal pemain I

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*)$ strategi optimal pemain II

W = total pembayaran

$C = (c_{ij})$, dengan $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2 \ldots n$

Bukti

Menurut definisi 29 karena $(X^*\ Y^*, W)$ adalah solusi optimal game maka berlaku pertidaksamaan

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* \; y_j \; c_{ij} \geq W \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \; y_j^* \; c_{ij}$$

atau

$$X^* C \; Y^T \geq W \geq X \; C \; Y^{*T}$$

untuk setiap $X \in X_1$ dan $Y \in X_2$

sehingga menurut Lemma 2 didapat :

$$X^* \; C \; Y^T = \sum_{i=1}^{m} x_i^* \; (C \; Y^T)_i = \sum_{j=1}^{n} (X^* \; C)_j \; y_j \geq W$$

dan

$$X \; C \; Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i \; (C \; Y^{*T})_i = \sum_{j=1}^{n} (X \; C)_j \; y_j^* \leq W$$

dengan memperhatikan definisi 24 bahwa $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $x_i \geq 0$ yang berakibat juga bahwa $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, $y_j \geq 0$ maka dapat disimpulkan bahwa

$(X^* \; C)_j \geq W$, $j = 1, 2, \ldots n$

$(C \; Y^{*T})_i \leq W$, $i = 1, 2, \ldots m$

Jadi Lemma 4 terbukti

Sebaliknya dibuktikan jika $(X^* \; C)_j \geq W$ $(C \; Y^{*T})_i \leq W$ maka (X^*, Y^*, W) merupakan solusi game tersebut. Ambil $X \in X_1$ strategi campuran pemain I, maka menurut Lemma 2

$$X \; C \; Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i \; (C \; Y^{*T})_i$$

karena $(\; C \; Y^{*T})_i \leq W$ maka

$$X\,C\,Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i\,(C\,Y^{*T})_i \le \sum_{i=1}^{m} x_i W = W \sum_{i=1}^{m} x_i$$

menurut definisi 24 bahwa $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ maka

$$X\,C\,Y^{*T} \le W \quad \text{..........} \quad (4)$$

Sekarang diambil $Y \in X_2$ strategi campuran pemain II maka menurut Lemma 2

$$X^*C\,Y^T = \sum_{i=1}^{m} (X^*\,C)_j\, y_j$$

karena $(X^*C)_j \ge W$ maka :

$$X^*\,C\,Y^T = \sum_{j=1}^{n} (X^*\,C)_j\; y_j \ge \sum_{j=1}^{n} W\,y_j = W \sum_{j=1}^{n} y_j$$

menurut definisi 24 bahwa $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$ maka :

$$X^*C\,Y^T \ge W \quad \text{..........} \quad (5)$$

Dari (4) dan (5) diperoleh pertidaksamaan :

$$X^*\,C\,Y^T \ge W \ge X\,C\,Y^{*T}$$

untuk setiap $X \in X_1$ dan $Y \in X_2$, sehingga menurut definisi 29 disimpulkan bahwa (X^*, Y^*, W) adalah solusi optimal untuk game $G = (X_1, X_2, P)$, dengan matrik pembayaran C.

Dengan demikian maka Lemma 4 terbukti.

Lemma5

(X^*, Y^*, W) adalah suatu solusi optimal game $G = (X_1, X_2, P)$ dengan matrik pembayaran C bila hanya bila

$$X C Y^{*T} = W$$

dengan :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*)$ strategi optimal pemain I

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*)$ strategi optimal pemain II

$C = (c_{ij})$, dengan $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1,2 \ldots n$

W = total pembayaran

$X^* \in X_1$, $Y \in X_2$ dengan X_i = himp. strategi pemain i

Bukti

(X^*, Y^*, W) adalah solusi optimal maka menurut definisi 29 untuk setiap $X \in X_1$, dan $Y \in X_2$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* \, y_j \, c_{ij} \geq W \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, y_j^* \, c_{ij}$$

atau

$$X^* C Y^T \geq W \geq X C Y^{*T}$$

Pertidaksamaan tersebut diuraikan menjadi :

$$X^* C Y^T \geq W \quad \text{untuk setiap } Y \in X_2$$

dan

$$X C Y^{*T} \leq W \quad \text{untuk setiap } X \in X_1$$

Oleh karena $X^* C Y^T \geq W$ berlaku untuk $\forall\ Y \in X_2$ dan karena $Y^* \in X_2$ maka diperoleh pertidaksamaan baru yaitu :

$$X^* C Y^{*T} \geq W \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Tetapi karena $X C Y^{*T} \leq W$ berlaku untuk $\forall\ X \in X_1$ dan karena $X^* \in X_1$ maka didapat pertidaksamaan :

$$X^* C Y^{*T} \leq W \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Dari (6) dan (7) disimpulkan :

$$X^* C Y^{*T} = W$$

Sekarang dibuktikan bahwa jika $X^* C Y^{*T} = W$ maka (X^*, Y^*, W) adalah solusi optimal.

Diandaikan (X^*, Y^*, W) bukan solusi optimal maka akibat dari definisi 29 didapat pertidaksamaan :

$$X^* C Y^T < W, \quad \text{untuk setiap} \quad Y \in X_2$$

dan

$$X \; C Y^{*T} > W, \quad \text{untuk setiap} \quad X \in X_1$$

Oleh karena $X^* \in X_1$ dan $Y^* \in X_2$ maka kedua pertidaksamaan tersebut menghasilkan :

$$X^* C Y^{*T} < W < X^* C Y^{*T}$$

Kontrakdiksi dengan $X^* C Y^{*T} = W$ sehingga terbukti (X^*, Y^*, W) adalah solusi optimal.

Dengan demikian Lemma 5 terbukti.

Kesimpulan 1

Lemma 4 dan lemma 5 secara ringkas digambarkan sebagai berikut :

Pemain II

	strategi	y_1^*	y_2^*	. . .	y_n^*	
Pemain I	x_1^*	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1n}	$\leq W$
	x_2^*	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2n}	$\leq W$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
	x_m^*	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mn}	$\leq W$
		$\geq W$	$\geq W$	. . .	$\geq W$	$W = \ldots$

Dengan :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ adalah strategi optimal pemain I, dengan $x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ adalah strategi optimal pemain II, dengan $y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$

c_{ij} = Elemen dari matrik pembayaran dengan $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots,n$.

W = Total Pembayaran.

definisi 30

Permasalahan dari suatu game $G = (X_1, X_2, P)$ dengan matrik pembayaran $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2,\ldots,n$ adalah sebagai berikut :

a) Pemain I

Mencari strategi optimal $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ dengan :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1, x_i^* \geq 0$$

Yang memaksimalkan W sehingga

$$(X^* C)_j \geq W, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

W = Total pembayaran.

b) Pemain II

Mencari strategi optimal $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ dengan :

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1, y_j^* \geq 0$$

Yang meminimalkan W sehingga

$(C\ Y^{*T})_i \le W, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

W = Total pembayaran.

definisi 31

Jika masalah pemain I dianggap masalah primal maka masalah pemain II disebut masalah dual (dualnya masalah pemain I) dan sebaliknya ,maka dikatakan permasalahannya adalah saling dual.

Theorema 1

(X^*, Y^*, W) merupakan solusi optimal bila dan hanya bila

$$x_i^* > 0 \text{ maka } (C\ Y^{*T})_i = W \qquad \ldots\ldots (8)$$

dan

$$y_j^* > 0 \text{ maka } (X^*\ C)_j = W \qquad \ldots\ldots (9)$$

dengan : $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ strategi optimal pemain I , $x_i^* \ge 0$ dan $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ strategi optimal pemain II, $y_j^* \ge 0$ dan $\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$

W = total pembayaran.

$C = (c_{ij})$ adalah matrik pembayaran

$i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$

Bukti:

Pertama dibuktikan bahwa jika $(X^*\ \ Y^*,\ W)$ solusi optimal maka (8) dan (9) terpenuhi, menurut Lemma 5 jika $(X^*,\ Y^*,\ W)$ solusi optimal maka,

$$X^* C Y^{*T} = W$$

Menurut Lemma 2 maka $X^* C Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* \ (C Y^{*T})_i$,

dan oleh sebab $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$, maka diperoleh persamaan

$$X^* C Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* (C Y^{*T})_i = W \sum_{i=1}^{m} x_i^*$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* (C Y^{*T})_i = \sum_{i=1}^{m} x_i^* W$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* (C Y^{*T})_i - \sum_{i=1}^{m} x_i^* W = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ x_i^* (C Y^{*T})_i - x_i^* W \right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* \left\{ \left(C Y^{*T} \right)_i - W \right\} = 0 \ldots (10)$$

Karena menurut Lemma 4 $(C Y^{*T})_i \leq W$ dengan kata lain $(C Y^{*T})_i - W \leq 0$ dan karena $x_i > 0$ maka disimpulkan :

$$(C Y^{*T})_i - W = 0 \text{ jadi } (C Y^{*T})_i = W$$

dan terbukti untuk (8).

Kembali pada persamaan $X^* C Y^{*T} = W$.

Menurut Lemma 2 maka :

$$X^* C Y^{*T} = \sum_{j=1}^{n} (X C)_j \ y_j$$

dan oleh sebab $\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$, maka diperoleh persamaan

$$X^* C Y^{*T} = \sum_{j=1}^{n} (X^* C)_j \; y_j^* = W \sum_{j=1} y_j^*$$

Sehingga didapat :

$$\sum_{j=1}^{n} (X^* C)_j \; y_j^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* \; W$$

$$\sum_{j=1}^{n} (X^* C)_j \; y_j^* - \sum_{j=1}^{n} y_j^* \; W = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ (X^* C)_j \; y_j^* - y_j^* \; W \right\} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ \left[X^* C \right]_j - W \right\} y_j = 0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Karena menurut Lemma 4 $(X^* C)_j \geq W$ dengan kata lain $(X^* C)_j - W \geq 0$ dan karena $y_j^* > 0$ maka disimpulkan :

$$(X^* C)_j - W = 0 \text{ jadi } (X^* C)_j = W \; .$$

dengan demikian (9) juga terbukti.

Selanjutnya dibuktikan bahwa jika (X^*, Y^*, W^*) memenuhi (8) dan (9) maka (X^*, Y^*, W) merupakan solusi optimal. Dibuktikan $x^* c y^{*T} = W$. Menurut Lemma 2

$$X^* C Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i (C Y^{*T})_i = \sum_{j=1}^{n} (X^* C)_j \; y_j^*$$

dari (8) dan (9), jika $x_i^* > 0$ dan $y_j^* > 0$ maka :

$$(C Y^{*T})_i = W \text{ dan } (X^* C)_j = W$$

Sehingga didapat :

$$X^* C Y^{*T} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* W = \sum_{j=1}^{n} W y_j^*$$

$$X^* C Y^{*T} = W \sum_{i=1}^{m} x_i^* = W \sum_{j=1}^{n} y_j^*$$

oleh karena $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$ dan $W \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$

maka

$$X^* C Y^{*T} = W$$

Menurut Lemma 5 maka (X^*, Y, W) adalah solusi optimal. Dengan demikian Theorema 1 terbukti.

Kesimpulan 2

Jika $(C Y^{*T})_i < W$ maka $x_i^* = 0$

Hal ini cukup jelas, sebab dari (10), oleh karena $x_i^* \geq 0$. Sehingga dengan diketahuinya $(C Y^{*T})_i < W$ maka haruslah $x^*_i = 0$.

Kesimpulan 3

Jika $(X^* C)_j > W$ maka $y_j^* = 0$

Oleh karena $y_j^* \geq 0$. Sehingga dengan diketahuinya $(X^* C)_j > W$ maka dari (11) disimpulkan $y_j^* = 0$

Contoh 20

Diketahui sebuah game dengan matrik pembayaran sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan solusi optimalnya.

Berdasarkan kesimpulan 1 maka game tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:

Pemain II

		y_1	y_2	y_3	
Pemain I	x_1	3	−1	6	$\leq W$
	x_2	2	5	−1	$\leq W$
		IV W	IV W	IV W	W = ...

dengan : $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ adalah strategi optimal pemain I dengan $x_1^* + x_2^* = 1$, $x_1^*, x_2^* \geq 0$.

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ adalah strategi optimal pemain II dengan $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$

$y_1^*, y_2^*, y_3^* \geq 0$.

W = Total pembayaran = nilai game.

Menurut definisi 30 maka game tersebut mempunyai permasalahan sebagai berikut :

Pemain I :

Mencari strategi optimal $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ dengan $x_1^* + x_2^* = 1$, $x_1^*, x_2^* \geq 0$, yang memaksimalkan W sehingga

$$3x_1 + 2x_2 \geq W$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq W$$

$$6x_1 - x_2 \geq W$$

Pemain II :

Mencari strategi optimal $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ dengan $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$, y_1^*, y_2^*, $y_3^* \geq 0$ yang meminimalkan W sehingga

$$3\,y_1 - y_2 + 6\,y_3 \leq W$$
$$2\,y_1 + 5\,y_2 - y_3 \leq W$$

Sebelumnya kita tinjau apakah matrik pembayaran dari game tersebut mempunyai titik sadel atau tidak, hal ini bertujuan untuk menentukan jenis strateginya.

Menurut definisi 26 maka :

$$\underset{i}{\text{Max}}\,[\,\underset{i}{\text{Min}}\text{ baris } i\,] = \underset{i}{\text{Max}}\,[-1, -1\,] = -1$$

$$\underset{j}{\text{Min}}\,[\,\underset{j}{\text{Max}}\text{ kolom } j\,] = \underset{j}{\text{Min}}\,[3, 5, 6] = 3$$

Karena $\underset{i}{\text{Max}}\,[\underset{i}{\text{Min}}\text{ baris } i] \neq \underset{j}{\text{Min}}\,[\underset{j}{\text{Max}}\text{ kolom } j\,]$

Maka matrik pembayaran tersebut tidak mempunyai titik sadel, sehingga menurut definisi 27 maka strategi untuk game tersebut adalah strategi campuran. Menurut definisi 31, maka masalah pemain I disebut masalah primal Zan masalah pemain II adalah dualnya.

Diselesaikan primalnya dahulu dan dualnya dicari dengan menggunakan theorema 1.Jadi diselesaikan pertidaksamaan :

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \geq W$$
$$-\,x_1 + 5\,x_2 \geq W$$
$$6\,x_1 - x_2 \geq W$$

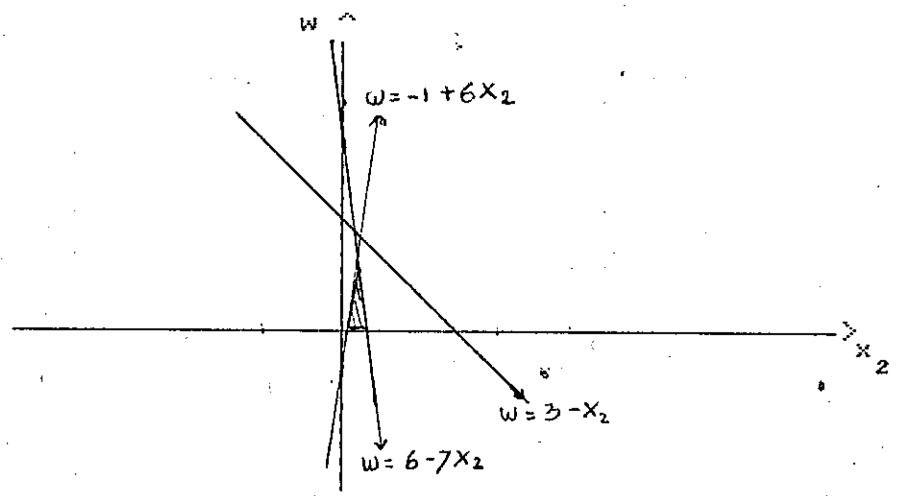
dengan x_1^*, $x_2^* \geq 0$, $x_1^* + x_2^* = 1$ dan menurut definisi 16 harga $x_1^* = 1 - x_2^*$ ini disubstitusikan kedalam ketiga pertidaksamaan tersebut, sehingga didapat :

$$3 - x_2 \geq W$$

$$-1 + 6\,x_2 \geq W$$

$$6 - 7\,x_2 \geq W$$

Menurut definisi 19 maka daerah penyelesaian dari ketiga pertidaksamaan tersebut adalah sebagai berikut :



dengan daerah penyelesaian adalah bidang segitiga terarsir. Karena permasalahannya adalah memaksimalkan W, maka W maksimum dari daerah penyelesaian tersebut tercapai pada titik T, yang merupakan titik potong antara garis $W = 6 - 7\ x_2$ dengan $W = -1 + 6\ x_2$. Menurut definisi 12 maka titik potong $T\ (x_2', w)$ adalah titik yang memenuhi :

$$W = -1 + 6\ x_2$$

$$W = 6 - 7\ x_2$$

Dan menurut definisi 17 penyelesaian dari 2 persamaan tersebut adalah :

$$W = -1 + 6x_2$$
$$W = 6 - 7x_2$$
$$0 = -7 + 13x_2 \quad -$$

$$x_2 = 7/13 \quad \text{maka } W = 29/13$$
$$x_1 = 1 - x_2$$
$$= 1 - 7/13 = 6/13$$

Sehingga strategi optimal untuk pemain I adalah :

$$X^* = (x_1^*, x_2^*) = (6/13, 7/13)$$

dengan total pembayaran $W = 29/13$.

Sekarang diselesaikan permasalahan untuk pemain II yaitu mencari strategi optimal $Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ dengan $y_i^* \geq 0$ dan $\sum_{j=1}^{3} y_j = 1$ atau $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$

Berdasarkan theorema 1, yaitu (X^*, Y^*, W) solusi optimal, maka karena $x_1^* = 6/13 > 0$ & $x_2^* = 7/13 > 0$ maka :

$$(C\, Y^{*T})_{i=1} = W \text{ dan } (C\, Y^{*T})_{i=2} = W$$

yaitu :

$$3y_1 - y_2 + 6y_3 = 29/13$$
$$2y_1 + 5y_2 - y_3 = 29/13$$

dengan $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

Tetapi karena $3x_1 + 2x_2 = 3 \,.\, 6/13 + 2.7/13$

$$= 32/13 > 29/13 = W$$

Maka menurut kesimpulan 3, $y_1 = 0$ sehingga didapat

$$-y_2 + 6y_3 = 29/13$$
$$5y_2 - y_3 = 29/13 \quad \ldots\ldots. \ (12)$$

$$y_2 + y_3 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Karena $y_2 + y_3 = 1$ maka $y_2 = 1 - y_3$ dan harga y_2 ini disubstitusikan ke persamaan (12) atau (13), sehingga menurut definisi 16 didapat :

$$7\, y_3 = \frac{42}{13} \qquad \text{jadi } y_3 = 6/13$$

dan

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 - y_3 \\ &= 1 - 6/13 = 7/13 \end{aligned}$$

Jadi strategi optimal pemain II $Y^* = (y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*) =$ (0, 7/13, 6/13) sehingga game dengan matrik pembayaran :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Mempunyai solusi optimal $(x^*,\ y^*,\ w) =$

$$[(6/13,\ 7/13),\ (0,\ 7/13,\ 6/13),\ 29/13]$$

definisi 32

Permainan zero-sum dua orang (2 -person zero-sum game) adalah game dengan jumlah keuntungan kedua belah pihak sama dengan nol.

definisi 33

Permainan tidak zero-sum dua orang (2-person non zero sum game) adalah game dengan jumlah keuntungan kedua belah pihak tidak sama dengan nol.

2.7. Derivatif dan Integral

definisi 34

Derivatif dari fungsi $y = f(x)$ didefinisikan sbb :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jika limit ini ada .

dengan :

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ = perubah pada fungsi

Δx = perubah pada x

definisi 35

Derivatif dari $y = f(x)$ pada $x = a$, ialah nilai dari derivatifnya untuk $x = a$

Notasi :

- Derivatif pertama dari fungsi $y = f(x)$ dinotasikan. $f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx}$
- Derivatif ke n (order n) dari $y = f(x)$ dinotasikan.

$$f^{(n)}(x) \text{ atau } \frac{d^n y}{d x^n}$$

- Derivatif pertama dari $y = f(x)$ pada $x = a$ dinotasikan :

$$f'(x) \text{ atau } \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x = a}$$

- Derivatif ke n (order n) $y = f(x)$ pada $x = a$

dinotasikan

$$f^{(n)}(a) \text{ atau } \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right]_{x = a}$$

Zontoh 21

Tentukan harga derivatif dari $f(x) = x^2 + 3x$ pada $x = 2$.

Penyelesaian :

Menurut definisi 34 derivatif dari $f(x) = x^2 + 3x$ adalah :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - (x^2 + 3x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - x^2 - 3x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 3 + \Delta x)$$

$$= 2x + 3$$

Sehingga menurut definisi 35 harga derivatif pada $x = 2$ adalah :

$$f'(x) = 2.2 + 3 = 7$$

ddefinisi 36

derivatif parsiil ke x dari $z = f(x,y)$ adalah :

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

definisi 37

derivatif parsiil ke y dari z = f(x,y) adalah :

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

definisi 38

derivatif parsiil kedua (order 2) z = f(x,y) adalah :

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

contoh 22

Diketahui fungsi $z = f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$

Tentukan $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ $f_{xy}(x,y)$ dan $f_{yy}(x,y)$

Penyelesaian :

Menurut definisi 36, definisi 37 dan definisi 38 didapat :

$f_x(x,y) =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)y + 4y^2 - (2x^2 - 3xy + 4y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3xy - 3\Delta xy + 4y^2 - 2x^2 + 3xy - 4y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x - 3y + 2\Delta x)$$

$$= 4x - 3y$$

Secara analog didapat

$f_y(x,y) = -3x + 8y$, $f_{xx}(x,y) = 4$

$f_{yx}(x,y) = -3$, $f_{xy}(x,y) = -3$ dan $f_{yy} = 8$

definisi 39

Jika $z = f(x,y)$ dan $x = g(t)$, $y = h(t)$ maka total derivatif ke t dari $z = f(x,y)$ adalah

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

contoh 23

Diketahui $Z = f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, $x = 3 + 5t$ dan $y = 6t - 9$, tentukan total derivatif ke t dari z.

Penyelesaian :

menurut definisi 39, definisi 34, dan definisi 36

$$\frac{dz}{dt} = 6x.5 + 8y.6 = 30x + 48y.$$

definisi 40

Integral atau anti diferensial dengan notasi $\int$ adalah suatu cara untuk mencari suatu fungsi bila derivatifnya diketahui sedemikian sehingga bila $F'(x) = f(x)$ maka integral dari $f(x)$ adalah

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

dengan :

$F(x)$ disebut fungsi integral

$f(x)$ disebut integran

C disebut konstanta integrasi

definisi 41

Jika $f(x)$ kontinyu pada interval $a \le x \le b$ dan $F'(x) = f(x)$ maka integral tertentu ditentukan :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh 24

Diketahui $f(x) = x^3$, tentukan nilai $\int_1^3 f(x)\,dx$

Penyelesaian :

Menurut definisi 40 dan definisi 41 maka,

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4\Big]_1^3$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

2.8 Deret Taylor dan Maksimum - Minimum

Sub bab 2.8 ini membahas penderetan suatu fungsi pada suatu konstanta tertentu.Jika konstanta tersebut sama dengan $a \neq 0$ maka deretnya disebut deret Taylor dan jika a = 0 maka deretnya disebut dengan Maclaurin.

Dibahas juga mengenai nilai maksimum dan nilai minimum dari suatu fungsi.

Definisi 42

Harga mutlak dari nilai suatu fungsi dikatakan lebih kecil atau sama dengan M, M >0, artinya bahwa nilai dari fungsi tersebut terletak antara -M dan M . Sedemikian sehingga :

$$| f(x) | \leq M \text{ artinya } -M \leq f(x) \leq M.$$

theorema 2

Misalkan $f : R \longrightarrow R$ mempunyai derivatif dengan orde n + 1 $f^{n+1}(x)$ diselang (a − r, a + r) dan misalkan ada konstanta M > 0 demikian sehingga berlaku

$| f^{(n+1)}(x) | \leq M$, Untuk semua x diselang tersebut, maka untuk setiap x diselang itu, f(x) dapat diuraikan menjadi bentuk :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + Rn.$$

dengan $| Rn | \leq \frac{M\,|x-a|^{(n+1)}}{(n+1)\;!}$

Dan jika $n \longrightarrow \sim$ maka persamaan tersebut disebut deret Taylor yaitu

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots..$$

Bukti :

$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, maka menurut definisi 42 didapat

$$-M \leq f^{(n+1)}(x) \leq M.$$

Jika semua ruas diintegrasikan dari a hingga x, $a < x$, maka menurut definisi 41

$$-\int_a^x M\,dx \leq \int_a^x f^{(n+1)}(x)\,dx \leq \int_a^x M\,dx$$

$$-Mx\Big]_a^x \leq f^{(n)}(x)\Big]_a^x \leq Mx\Big]_a^x$$

$$-M(x-a) \leq f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \leq M(x-a)$$

Hasil tersebut dintegrasikan juga dari a hingga x didapat :

$$-\int_a^x M(x-a)dx \leq \int_a^x (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a))\,dx \leq \int_a^x M(x-a)dx$$

$$-M(1/2\,x^2 - ax)\Big]_a^x \leq f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(a)x\Big]_a^x \leq M(1/2\,x^2 - ax)\Big]_a^x$$

$$-M(1/2\,x^2 - ax - 1/2\,a^2 + a^2) \leq f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)$$
$$\leq M(1/2\,x^2 - ax - 1/2\,a^2 + a^2)$$

$$-\frac{M\,(x-a)^2}{2\,!} \leq f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a) \leq \frac{M\,(x-a)^2}{2\,!}$$

Proses integrasi ini diulang (n-1) kali lagi dan hasilnya adalah sebagai berikut :

$$-\frac{M\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(x) - f(a) - f'(a)\,(x-a) - f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\,!}$$
$$- \ldots - f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n\,!} \leq \frac{M\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Jika ruas tengah dimisalkan sama dengan R_n maka

$$f(x) - f(a) - f'(a)\,(x-a) - \ldots - f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n\,!} = R_n$$

Sehingga diperoleh :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots +$$

$$f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n$$

dan $$\frac{-M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le R_n \le \frac{M(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Atas dasar definisi 42 maka

$$|R_n| \le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dengan demikian sebagai theorema terbukti.

Misalkan selanjutnya bahwa untuk n bertambah besar $|f^{(n+1)}(x)|$ tidak melebihi M, maka dibuktikan bahwa :

$$\lim_{n \to \sim} \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \text{ dan dengan demikian, } \lim_{n \to \sim} R_n = 0$$

misalkan, $|x - a| = P$ maka :

$$\frac{MP^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{P}{1}\cdot\frac{P}{2}\cdots\frac{P}{N}\cdot\frac{P}{N+1}\cdots\frac{P}{n+1}$$

Sekarang ambil N cukup besar sedemikian sehingga

$$\frac{P}{N} < 1/2$$

maka $\frac{P}{N+1}, \frac{P}{N+1}, \dots, \frac{P}{n+1}$ juga semuanya lebih kecil dari pada 1/2 dengan demikian :

$$\frac{MP^{n+1}}{(n+1)!} < M\frac{P^N}{N!}(1/2)^{n-N}$$

Selanjutnya ditinjau : $\lim_{n \to \sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$

$$\lim_{n \to \sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \lim_{n \to \sim} \frac{1}{2^{n-N}}$$

$$= \frac{1}{2^{\sim}} = 0$$

Oleh karena $\lim_{n \to \sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$ maka $\lim_{n \to \sim} \frac{M\,P^{n+1}}{(n+1)\,!} = 0$

dan $\lim_{n \to \sim} R_n = 0$

Bentuk uraian pada theorema ini menunjukkan bahwa fungsi f(x) dan suku banyak

$$f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n\,!}$$

mempunyai selisih R_n.

Dan untuk $n > |x - a|$, R_n makin kecil untuk makin besar.

Dengan kata lain, fungsi f(x) dapat didekati oleh suku banyak tersebut dan selisihnya dapat dibuat kecil dengan mengambil n cukup besar.

Jika n dibawa ke tak- hingga, maka suku banyak menjadi deret tak-hingga yaitu :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + f''\,(a)\,\frac{(x-a)^2}{2\,!} + \ldots$$

Dengan demikian theorema 2 terbukti

Definisi 43

Deret Maclaurin adalah deret Taylor untuk a = 0 yaitu :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,(x) + f''\,(0)\,\frac{(x)^2}{2\,!} + \ldots.$$

Contoh 25

Expansikan (uraikan) $f(x) = \cos x$ menjadi deret maclaurin (atau diexpansikan ke $x = 0$)

$f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x = \sin(-x) = \cos(x + \pi/2) \longrightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\sin(x + \pi/2) = \cos(x + 2\frac{\pi}{2}) \longrightarrow f''(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = -\sin(x + 2\frac{\pi}{2}) = \cos(x + 3\frac{\pi}{2}) \longrightarrow f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = -\sin(x + 3\frac{\pi}{2}) = \cos(x + 4\frac{\pi}{2}) \longrightarrow f^{(4)}(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \mathrm{Cos}(x + n\frac{\pi}{2})$, n = bulat positif

Jadi $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ untuk setiap n dan untuk semua x,Dan menurut definisi 43 maka

$$\mathrm{Cos}\ X = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

Theorema 3

Misalkan $F : R^2 \longrightarrow R$ mempunyai turunan dengan orde n+1 $F^{n+1}(x,y)$ diselang (a− r, a+ r) dan misalkan ada konstanta $M > 0$ demikian sehingga berlaku $|F^{(n+1)}(x,y)| \leq M$, untuk semua x, y diselang tersebut,maka untuk x,y diselang tersebut,F(x,y) dapat diuraikan menjadi bentuk.

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^n \frac{F(a,b)}{n!}$$

Bukti

Dari Theorema 2, dengan mengambil a = 0 (deret Maclauran untuk fungsi dengan satu perubah) maka didapat :

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \ldots\ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + R_n$$

dengan

$$|R_n| \leq M \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \quad \text{Jika} \quad |f^{(n+1)}(0)| \leq M$$

Untuk sebuah konstanta M.

Misalkan $F(x,y)$ demikian sehingga $f(t) = F(a+ht, b+kt)$ memenuhi persyaratan yang diperlukan untuk uraian Taylor a, h, b dan k adalah konstanta dan t perubah dengan $0 \leq t \leq 1$

Misalkan selanjutnya : $u = a + ht$ dan $v = b + kt$

jadi $\frac{du}{dt} = h$ dan $\frac{dv}{dt} = k$

Sekarang, f(t) adalah fungsi dari suatu perubah dan uraiannya menjadi.

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \ldots\ldots + f^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + Rn \qquad \ldots\ldots\ldots.(14)$$

dengan $\lim\limits_{n \to \infty} Rn = 0$

$f(t) = F(a+ht, b+kt) = F(u,v)$, maka berdasar pada definisi 39 didapat: $f'(t) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dt}$

$$= h\frac{\partial F}{\partial u} + k\frac{\partial F}{\partial v}$$

Jadi $f'(0) = h\frac{\partial F}{\partial u}(a,b) + k\frac{\partial F}{\partial v}(a,b)$.

Jelas bahwa $\left[\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\right]_{\substack{u=a\\v=b}} = \left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$

dan $\left[\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\right]_{\substack{u=a\\v=b}} = \left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$

Jadi $f'(0) = h\frac{\partial F(a,b)}{\partial x} + k\frac{\partial F(a,b)}{\partial y}$

$$f''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial u}\frac{dv}{dt}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{d^2 u}{dt^2} +$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2 v}{dt^2}$$

Oleh karena

$$\frac{du}{dt} = h,\ \frac{dv}{dt} = k \text{ maka } \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \text{ dan } \frac{d^2 v}{dt^2} = 0$$

tetapi juga $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$ maka diperoleh :

$$f''(t) = h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\,hk \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

dan untuk $t = 0$ maka

$$f''(0) = h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(a,b) + 2\,hk \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial u\,\partial v} + k^2 \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial v^2}$$

atau $$f''(0) = h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a,b) + 2\,hk \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial x\,\partial y} + k^2 \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial y^2}$$

Dengan cara yang sama :

$$f'''(0) = h^3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(a,b) + 3h^2 k \frac{\partial^3 F(a,b)}{\partial x^2\partial y} +$$

$$+ 3hk^2 \frac{\partial^3 F(a,b)}{\partial x\,\partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 F(a,b)}{\partial y^3}$$

dan secara umum :

$$f^{(n)}(0) = h^n \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial x^n} + nh^{(n-1)} k \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial x^{n-1}\partial y} +$$

$$\ldots + k^n \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial y^n} \qquad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Sekarang ditinjau operator : $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})$

$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})F(a,b)$ berarti $h \frac{\partial F(a,b)}{\partial x} + k \frac{\partial F(a,b)}{\partial y}$

begitu juga

$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 F(a, b)$ berarti

$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) F(a,b)$

atau $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)\left((h \frac{\partial F(a,b)}{\partial x} + k \frac{\partial F(a,b)}{\partial y}\right)$ atau

$$h^2 \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial y^2}$$

dan secara umum :

$$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n F(a, b) = h^n \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial x^n} +$$

$$nh^{(n-1)} k \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial x^{n-1} \partial y} + \frac{n(n-1) h^{(n-2)} k^2}{2!} \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial x^{n-2} \partial y^2} +$$

$$\ldots + k^n \frac{\partial^n F(a,b)}{\partial y^n}$$

maka dari (15) diperoleh :

$$f^n(0) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n F(a, b)$$

dan deret (14) menjadi :

$$f(t) = F(a,b) + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})F(a,b)t +$$

$$\ldots + (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^n \frac{F(a,b)}{n!} t^n + R_n$$

dengan $\lim_{n \to \sim} R_n = 0$

Oleh karena $f(t) = F(a + ht, b + kt)$ maka untuk $t = 1$ diperoleh

$$F(a+h,\ b+k) = F(a,b) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})\frac{F(a,b)}{1\,!} +$$

$$\ldots + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n \frac{F(a,b)}{n\,!} + R_n$$

dengan $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$

Jadi $F(a+h,\ b+k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n \frac{F(a,b)}{n\,!}$

Dengan mensubtitusikan : $x = a + h \longrightarrow h = x - a$

$y = b + k \longrightarrow k = y - b$

didapat

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n \frac{F(a,b)}{n\,!}$$

Dengan demikian Theorema 3 terbukti.

definisi 44

Jika $(x_o,\ y_o)$ merupakan titik kritis untuk fungsi $z = F(x,\ y)$ maka berlaku :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ dititik } (x_o,\ y_o)$$

definisi 45

Suatu fungsi kwadrat $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c,\ \ a \neq 0$ dikatakan

- definit positif bila untuk setiap x didapat $f(x) > 0$. Dalam hal ini berlaku $a > 0$ dan $b^2 - 4ac < 0$
- definit negatif bila untuk setiap x didapat $f(x) < 0$. Dalam hal ini berlaku $a < 0$ dan $b^2 - 4ac < 0$

Theorema 4

Fungsi F (x,y) dikatakan mencapai maksimum di titik (x_o, y_o) jika :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)\right]^2 > 0$$

dan $\frac{\partial^2 F(x_o, y_o)}{\partial x^2} < 0$ atau $\frac{\partial^2 F(x_o, y_o)}{\partial y^2} < 0$

Dan F (x,y) dikatakan mencapai minimum di titik (x_o, y_o) jika :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)\right]^2 > 0$$

dan $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) > 0$ atau $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o) > 0$

Bukti :

Dengan menggunakan deret taylor (theorema 4) sampai dengan orde 2, dalam hal ini $x = x_o + h$, $y = y_o + k$. Jadi $x - x_o = h$ dan $y - y_o = k$, sehingga didapat :

$$F(x_o + h, y_o + k) = F(x_o, y_o) + \left\{h \frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o) + k \frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o)\right\} + \left| h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) + 2hk \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o, y_o) + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o)\right\} + R_n \quad \ldots\ldots (16)$$

Rn mengandung derajat ketiga dan derajat lebih tinggi dalam h dan k, dan untuk nilai h dan k kecil, Rn kecil, jika dibandingkan dengan suku-suku sebelumnya dan oleh karena itu Rn diabaikan.

Dan karena definisi 44 maka (16) menjadi

$$F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left\{h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right\} \quad \ldots(17)$$

$$F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0,y_0) = \frac{1}{2} k^2\left\{\left(\frac{h}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) \cdot 2\left(\frac{h}{k}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right\} \quad \ldots(18)$$

Walaupun h dan k cukup kecil, $\frac{h}{k}$ dapat mencapai semua nilai dari $-\sim$ sampai $+\sim$. Misalkan $F(x_0,y_0)$ mempunyai nilai maksimum maka $F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0,y_0)$ negatif untuk semua nilai h dan k jadi bentuk.

$$\left(\frac{h}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2\left(\frac{h}{k}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

adalah definit negatif dan persamaan tersebut dapat dipandang sebagai persaman kwadrat dalam $\left(\frac{h}{k}\right)$ sehingga menurut definisi 45 berlaku $\frac{\partial F}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$

$$\text{dan} \quad \left\{2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right\}^2 - 4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$$

$$\text{atau} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

Tetapi juga persamaan (17) bisa ditulis :

$$F(x_o+h,y_o+k) - F(x_o,y_o) = 1/2h^2\left\{\left[\frac{k}{h}\right]^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o)\right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{h}{h}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(x_o, y_o) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o)\right\} \quad \ldots\ldots(19)$$

Sehingga dengan cara yang sama, jika $F(X_o,Y_o)$ mempunyai nilai maksimum maka berlaku :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o) < 0$$

$$\text{dan } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o)\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o,y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o,y_o)\right] > 0$$

jadi $F(x_o,y_o)$ merupakan nilai maksimum untuk $F(x,y)$

$$\text{jika } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o,y_o) < 0 \text{ atau } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o) < 0$$

$$\text{dan } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o,y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o,y_o)\right]^2 > 0$$

Selanjutnya dibuktikan untuk nilai minimum :

Misalkan $F(x_o,y_o)$ mempunyai nilai minimum, maka $F(x_o+h,y_o+k)-F(x_o,y_o)$ bernilai positif untuk semua nilai h dan k. jadi bentuk (18) adalah definit positif dan menurut definisi 45 berlaku

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o,y_o) > 0$$

$$\text{dan } \left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o,y_o)\right]^2 - 4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o,y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o) < 0$$

$$\text{atau } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o,y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o,y_o)\right] > 0$$

dan dari 19 dengan cara yang sama maka haruslah

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o,y_o) > 0$$

$$\text{dan} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)\right] > 0$$

jadi $F(x_o, y_o)$ merupakan nilai minimum untuk $F(x,y)$

$$\text{jika} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) > 0 \text{ atau } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o) > 0$$

$$\text{dan} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_o, y_o) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_o, y_o) - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)\right]^2 > 0$$

Dengan demikian theorema 4 terbukti

Contoh 26

Tentukan nilai maksimum dan minimum daripada fungsi $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 30$. untuk (x,y) yang manakah semua nilai ekstrem itu tercapai.

jawab :

Berdasar pada definisi 44 maka untuk nilai ekstrem berlaku :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 30$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{atau } x = \pm 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 27 = 0 \text{ atau } \quad x = \pm 3$$

Jadititik-titik kritis adalah (1,3),(1,-3),(-1,3) dan (-1,-3), selanjutnya

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x \ , \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{maka} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right]^2 = 6x.6y - 0 = 36xy$$

Pada titik (1,3)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] = 36xy = 36.1.3 = 108 > 0$$

dan $\dfrac{\partial^2 F(1,3)}{\partial x^2} = 6.1 = 6 > 0$

Berdasarkan Theorema 4 maka fungsi F(x,y) tersebut mencapai minimum dititik $(x_o, y_o) =$ (1,3)dan nilai minimum itu ialah :

$F(1,3) = 1^3 + 3^3 - 3.1 - 27.3 + 30$

$= 1 + 27 - 3 - 81 + 30 = -26$

Pada titik (1,-3)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right]^2 = 36\ xy = 36.(\ 1).(-3)$$

$$= -\ 108 < 0$$

maka di titik (1,-3) tidak terdapat nilai ekstrem

Pada titik (-1,3)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = 36xy = 36.(-1).3$$

$$= -\ 180 < 0$$

maka dititik (-1,3) tidak terdapat nilai ekstrem

Pada titik (-1,-3)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = 36xy = 36.(-1).(-3)$$

$$= 180 > 0$$

dan $\dfrac{\partial^2 F\ (-1,-3)}{\partial x^2} = 6.(-1) = -6 < 0$

maka berdasarkan Theorema 4, fungsi F(x,y) tersebut mencapai maksimum dititik $(x_o, y_o) =$ (-1,-3), dan nilai maksimum tersebut adalah

$$F(-1,-3) = (-1)^3 + (-3)^3 - 3(-1) - 27(-3) + 30$$

$$= -1 - 27 + 3 + 81 + 30$$

$$= 86$$