BAB II

TEORI PERMAINAN JUMLAH NOL 2 ORANG

2.1. Teori permainan

2.1.1. Pengertian

Teori permainan (game theory) adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai kepentingan. Teori ini dikembangkan untuk menganalisa proses pengambilan keputusan dari situasi situasi persaingan yang berbeda beda dan melibatkan 2 atau lebih kepentingan. Misal, para manajer pemasaran bersaing dalam memperebutkan barang pasar, para jenderal tentara yang ditugaskan dalam perencanaan dan pelaksanaan perang, para pemain catur, yang semuanya terlibat dalam usaha untuk memenangkan permainan. Kepentingan kepentingan yang bersaing dalam permainan disebut para pemain. Anggapannya adalan bahwa setiap pemain (individu atau kelompok) mempunyai kemampuan untuk mengambil keputusan secara bebas dan rasional.

2.1.2. Unsur Unsur Dasar Teori Permainan

Berikut ini akan diuraikan beberapa unsur atau elemen dasar yang sangat penting dalam penyelesaian setiap kasus dengan teori permainan.

Matrik permainan jumlah nol 2 orang

Matrik permainan jumlah nol 2 orang

A \ B	b_1	b_2	$b_{...}$	b_j	$b_{...}$	b_n
a_1	H(1,1)	H(1,2)	...	H(1,j)	...	H(1,n)
a_2	H(2,1)	H(2,2)	...	H(2,j)	...	H(2,n)
$a_{..}$	...	...	...	...	...	...
a_j	H(j,1)	H(j,2)	...	H(j,j)	...	H(j,n)
$a_{..}$	...	...	...	...	...	...
a_m	H(m,1)	H(m,2)	...	H(m,j)	...	H(m,n)

gambar 2.1

Dari tabel diatas dapat diuraikan unsur unsur dasar teori permainan sebagai berikut :

1. Angka angka dalam matrik permainan (H(1,1), H(1,2) .....) menunjukkan hasil hasil dari strategi strategi permainan yang berbeda beda. Hasil hasil ini dinyatakan dalam suatu bentuk ukuran efektifitas. Dalam permainan jumlah nol 2 orang, bilangan bilangan positip menunjukkan keuntungan bagi pemain baris (maximizing player), dan merupakan kerugian pemain kolom.
2. Suatu strategi permainan adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh dari seorang pemain, sebagai reaksi atas aksi yang diberikan pemain lain yang menjadi pesaingnya. Dalam hal ini dianggap bahwa suatu strategi tidak dapat dirusak oleh para pesaing

atau faktor lain. Dalam tabel diatas pemain A mempunyai strategi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ pemain B mempunyai strategi $b_1, b_2, \ldots . b_n$.

3. Aturan aturan permainan menggambarkan kerangka dimana para pemain memilih strategi mereka. Sebagai contoh, dip[akai anggapan bahwa para pemain harus memilih strategi strategi mereka secara simultan dan bahwa permainan adalah berulang.

4. Nilai permainan adalah hasil yang diperkirakan perpermainan dari rangkaian permainan, dimana kedua pemain mengikuti atau mempergunakan strategi mereka yang paling baik atau optimal.

5. Suatu strategi dikatakan Dominan bila setiap hasil permainan dalam strategi adalah Superior terhadap setiap hasil permainan yang berhubungan dalam suatu strategi alternatif. Aturan Dominan ini dapat digunakan untuk mengurangi ukuran matrik permainan.

6. Suatu strategi Optimal adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh yang menyebabkan seorang pemain dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan kegiatan para pesaingnya. Pengertian posisi yang paling menguntungakn adalah bahwa adanya deviasi (penyimpangan) dari strategi

optimal atau rencana optimal, akan menurunkan hasil permainan.

7. Tujuan dari model permainan adalah mengidentifikasi strategi atau rencana optimal untuk setiap pemain.

Karena banyaknya asumsi asumsi diatas, maka nilai praktis dari teori permainan agak terbatas. Tetapi bagaimanapun juga inti keputusan keputusan manajerial harus dibuat dalam kondisi persaingan (konflik) atau kerjasama. Konsep konsep dari teori permainan paling tidak sangat penting untuk beberapa hal berikut ini :

1. Mengembangkan suatu kerangka untuk analisis pengambilan keputusan dalam situasi situasi persaingan (kadang kadang kerjasama).

2. Menguraikan suatu metode kuantitatif yang sistematis yang memungkainkana para pemain yang terlibat persaingan untuk memilih strategi strategi yang rasional dalam pencapaian tujuan mereka.
3. Memberikan gambaran dan penjelasan fenomena situasi situasi persaingan atau konflik, seperti tawar menawar, dan perumusan koalisi.

2.1.3.Permainan Jumlah Nol 2 Orang

2.1.3.1. Pengertian

Permainan atau persaingan yang melibatkan hanya 2 pemain atau 2 pihak disebut permainan 2 orang. Karena perolehan dari satu pemain menjadi derita bagi pemain lainnya, dan karena itu jumlah "perolehan" dari kedua pemain adalah nol, maka disebut permainan imbang (permainan jumlah nol)

Tiap pemain mempunyai sejumlah pilihan atau tindakan yang dapat dipergunakan dalam permainan. Tiap pilihan atau tindakan disebut strategi. Bila seorang pemain selalu memilih tindakan yang sama untuk tiap langkah, dia disebut memainkan strategi murni (bersih). Strategi campuran memainkan lebih dari satu pilihan dan tidak menggunakan urutan tertentu, tetapi dalam bentuk acak. Tiap langkah dari pemain selalu mengusahakan tindakan yang sesuai. Misalkan pemain A memilih strategi X dan Pemain B memilih strategi Y. Bila perolehan pemain A, dan karena itu derita bagi pemain B, disebut C untuk tiap tindakan, maka, C=H(X,Y).

Kumpulan m strategi pemain A dan n strategi pemain B bersama sama dengan fungsi perolehan C=H(X,Y) disebut permainan jumlah nol 2 orang. Strategi alternatif dan perolehan (Pay Off) ditulis dalam satu matrik yang disebut matrik perolehan. (Tabel 1.1).

Contoh :

Lawan mempunyai 2 mata uang dari tukaran Rp.50,- dan Rp.100,-masing masing digenggaman tangan sebelah kiri dan kanan. Kita akan menebak isi genggaman. Kalau kitaa menebak isi genggaman tangan kiri Rp.50,- maka lawan membayar Rp.50,-. Tapi kalau kita menebak kiri dengan Rp. 100,- maka kita yang membayar Rp. 50,-. Dri kejadian permaianan tebak ini kita dapat menulis aturan main secara umum sebagai berikut :

Bila kita menebak secara benar, lawan membayar seharga dalam genggaman, tetapi kalau salah kita yang membayar seharga itu.

Strategi lawan	keterangan	
1	kiri 50	kanan 100
2	kiri 100	kanan 50

gambar 2.2.a

Strategi kita	keterangan
1	tebakan 50
2	tebakan 100

gambar 2.2.b

misalkan lawan memilih strategi 1, dan kita memilih strategi 1 maka sesuai aturan main lawan harus membayar Rp. 50,- Harga fungsi perolehan ialah H(1,1)= Rp. 50,- artinya kita memperoleh Rp.50,- dan lawan

menderita -Rp.50,-.

Tetapi kalau kita memilih strategi 2 maka kita memperoleh -Rp.50,- dan lawan menderita +Rp.50,- atau H(2,1)=-Rp.50,-.

Dengan cara sama H(1,2)= -Rp.100,- dan H(2,2)= +Rp.100,-.

Secara lengkap matrik perolehan untuk kita dari permainan tebak ini ialah :

kita \ lawan	1	2
1	50	-100
2	-50	100

gambar 2.3

Matrik derita (lawan) tentu adalah berlawanan dengan matrik perolehan (kita). Akan tetapi umumnya, matriknya cukup ditulis hanya satu saja yaitu matrik perolehan.

2.1.3.2. Memilih Strategi

Dari keterangan dimuka terlihat adanya dua persoalan yang tidak berhubungan satu dengan yang lain. Dalam permainan jumlah nol 2 orang, tujuan kita ialah menemukan jawab yang kokoh (stabil) bagi kedua pemain. Memilih strategi sama artinya dengan menemukan jawab permainan. Jawab yang dimaksud hanya ada bila

tiap pemain berusaha memperkecil derita atau memperbesar perolehan, dengan kata lain tiap pemain berusaha meraih strategi optimal bagi dirinya sehingga tidak ada lagi dari antara pemain yang dapat meningkatkan posisi masing masing dengan memilih strategi lain. Hasil yang diharapkan bila kedua pemain telah menggunakan strategi optimalnya disebut harga permainan. Permainan yang mempunyai harga nol dikatakan permainan yang fair. Satu langkah dari satu permainan adalah pemilihan satu strategi oleh tiap pemain. Usaha menemukan strategi optimal dan harga permainan disebut menyelesaikan permainan dan langkah berikutnya tidak boleh lagi dilanjutkan dan permainan telah selesai.

2.1.3.3. Kriteria Maksimin - Minimaks

Tujuan utama menyelesaikan suatu permainan ialah menentukan strategi optimal. Strategi optimal dapat ditentukan dengan menggunakan teori yang disebut teori minimaks yang pada prinsipnya mengatakan bahwa tiap pemain secara sepihak mencari tingkat keamanan yang maksimum bagi diri sendiri. Dalam memilih strategi Optimal beberapa asumsi ditetapkan terlebih dahulu yaitu :

1. Bahwa pemain memiliki kepintaran yang sama.
2. Tiap pemain sudah mengetahui strategi yang lain.

3. Tiap pemain mengetahui jumlah perolehan sendiri dan derita pemain lain.
4. Tiap pemain harus menentukan strategi (pilihan).

Berdasarkan asumsi diatas, tiap pemain mengetahui bahwa pemain yang lain cukup rasional serta mempunyai tujuan yang sama yaitu memaksimumkan perolehan sendiri. Pemain A memeriksa tiap baris dari matriks perolehan dan memilih harga minimum pada tiap baris. Kemudian ia memilih harga maksimum dari harga harga minimum itu. Cara menentukan pilihan seperti ini adalah cara yang konservatif, dan biasa disebut sebagai cara memilih yang terbaik dari antara yang terburuk. Cara ini juga disebut kriteria maksimum dari minimum, disingkat kriteria Maksimin.

Sebaliknya pemain B menyelesaikan permainan untuk menentukan strategi optimal dengan menggunakan teori yang dinamakan teori minimaks. Teori ini menetapkan bahwa pemain secara sepihak mencari tingkat keamanan yang maksimum bagi dirinya sendiri, yaitu dengan memilih derita terkecil dari sejumlah derita maksimum. Cara ini ialah memilih kriteria minimum dari maksimum atau disingkat minimaks.

Persoalan ini dapat dibentuk dalam satu model matematika sebagai berikut :

Misalkan P_i perolehan minimum dari tiap tindakan a_i oleh pemain A, sehingga $P_i = \min \{H(i,j)\}, j=1,2,\ldots,n$

Strategi optimal untuk pemain A ialah baris yang sesuai dengan harga : $\max_i\{P_i\} = \max_i[\min_j \{H(i,j)\}] = \underline{v}$

$i=1,2,\ldots,m \qquad j=1,2,\ldots,n$

ini disebut kriteria maksimin.

Untuk pemain B misalkan P_j derita maksimum dari tiap tindakan b_j maka : $P_j = \max \{H(i,j)\}, \quad i=1,2,\ldots,m$

Strategi optimal untuk pemain B ialah kolom yang sesuai dengan harga : $\min_j\{P_j\} = \min_j[\max_i\{H(i,j)\}] = \bar{v}$

$i=1,2,\ldots,m \qquad j=1,2,\ldots,n$

ini disebut kriteria minimaks.

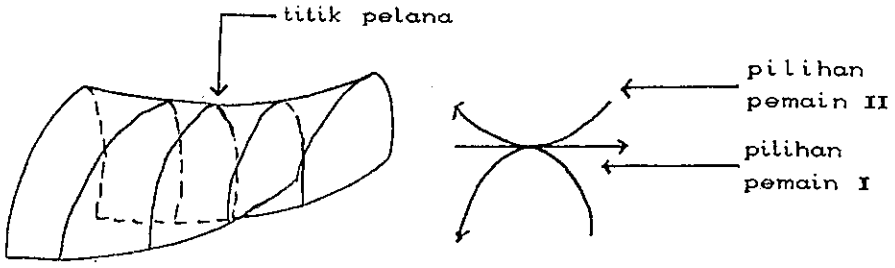
Keputusan pemain A memilih baris atau strategi hingga terdapat harga $\underline{v}=\max \{P_i\}$ disebut strategi bersih maksimin dan harga $\underline{v}$ disebut harga maksimin dari permainan. Demikian juga keputusan pemain B memilih kolom atau strategi hingga diperoleh harga $\bar{v} = \min \{P_j\}$ disebut strategi bersih minimaks. Harga $\bar{v}$ disebut harga minimaks dari permainan.

Dalam hal seperti ini tiap pemain telah menemukan pilihan mungkin yang terbaik bagi dirinya, dan tidak mau beranjak lagi dari keputusan tersebut. Dalam kondisi yang demikian disebutkan bahwa permainan telah mempunyai jawaban yang kokoh atau stabil. Kemudian dapat diperlihatkan bahwa harga minimaks harus lebih besar atau sama besar dengan harga maksimin, karena cara minimaks selalu mengambil harga (perolehan) maksimum dan cara maksimin selalu mengambil harga minimum.

Jadi $\max_i\{P_i\} \le \min_j\{P_j\}$ atau $\underline{v} \le \bar{v}$.

Oleh karena itu $\underline{v}$ adalah batas bawah dan $\bar{v}$ adalah batas atas dari satu harga v yang disebut harga permainan, sehingga $\underline{v} \le v \le \bar{v}$

apabila $\underline{v} = v = \bar{v}$ maka harga sekutu ini disebut titik pelana (sadel point).



gambar 2.4

Dan strategi bersih maksimin/minimaks disebut strategi maksimin/minimaks optimal. Bila kedua pemain menggunakan strategi minimaks optimal, maka hasil perolehan rata rata disebut harga permainan. Bila strategi minimaks adalah strategi bersih maka perolehan rata rata diharapkan adalah harga dari titik pelana.

Contoh :

Misalnya kita mempunyai matrik perolehan dari permainan 2 orang, A dan B yang memperlihatkan perolehan sebagai berikut :

a \ b	b_1	b_2	b_3	b_4	min
a_1	7	2	9	4	2
a_2	6	5	7	8	5
a_3	8	3	-2	6	-2
max	8	5	9	8	

gambar 2.5

Pemain A mempunyai 3 pilihan atau strategi yang tersedia dan B mempunyai 4 pilihan yang tersedia . Sekarang A dapat memilih strategi a_1, a_2, a_3. Hasil dari pemilihan ini adalah sebagai berikut :

	strategi	perolehan	perolehan minimum
pemain A	a_1	(7,2,9,4)	2
	a_2	(6,5,7,8)	5
	a_3	(8,3,-2,6)	-2

gambar 2.6

Tujuan A memaksimumkan perolehan minimum sehingga

$$\{P_i\} = \{2,5,-2\} \qquad i=1,2,3$$

$$\text{dan } \underline{v} = \max_i \{2,5,-2\} = 5$$

maka pemain A memilih strategi a_2 sebagai strategi optimal dan tidak mau mundur dari situ.

Selanjutnya bagi pemain B terdapat alternatif sebagai berikut :

	strategi	derita	derita maksimum
pemain B	b_1	(7,6,8)	8
	b_2	(2,5,3)	5
	b_3	(9,7,-2)	9
	b_4	(4,8,6)	8

gambar 2.7

Tujuan B meminimumkan derita maksimum sehingga :

$\{P_j\} = \{ 8,5,9,8\}$ $\quad j = 1,2,3,4$

dan $\bar{v} = \min\{P_j\} = \min \{8,5,9,8\} = 5$

Disini pemain B memilih strategi b_2 sebagai strategi optimal dan tidak mau mundur dari keputusan ini. Dengan demikian pemain A dan B masing masing telah memainkan strategi murni dengan jawab sudah stabil. Ternyata $\underline{v}=\bar{v}=5$ sehingga permainan ini mempunyai titik pelana 5. Maka harga permainan v = 5 dan harga ini terdapat pada kotak H(2,2) dari matrik perolehan.

2.1.3.4. Strategi Campuran

Adanya titik pelana otomatis menghasilkan strategi bersih yang optimal. Akan tetapi bila pemain A dan pemain B masing masing memainkan strategi murni yang maksimin dan minimaks dan bila $\bar{v}$harga minimaks dan $\underline{v}$harga maksimin, maka strategi ini bukan strategi murni optimal lagi. Sebagai contoh kita ambil matrik berikut ini :

a \ b	b_1	b_2	min
a_1	1	5	1
a_2	3	2	2
max	3	5	

gambar 2.8

dimana $\underline{v}$ = harga maksimin = 2 < 3 = harga minimaks = $\bar{v}$ Tiap pemain cenderung untuk meraih keuntungan dari perbedaan antara $\bar{v}$ dan $\underline{v}$ yaitu (3-2) = 1. Pemain A mengharap dapat menaikan perolehan diatas 2 dan pemain B juga mengharap dapat menurunkan kerugian dibawah 3. Terdapat satu harga antara $\underline{v}$ dan $\bar{v}$ (yaitu antara 2 dan 3) yaitu harga v menjadi harga permainan. Harga v ini merupakan harga minimum perolehan yang diharapkan oleh pemain A dapat diraih,tidak soal apa yang akan dilakukan oleh pemain B. Akan tetapi kalau kedua pemain memainkan strategi tidak murni, maka harga v tidak dapat ditemukan. Oleh karena itu untuk memperoleh harga v pemain A mau memainkan salah satu strategi pada langkah pertama dan strategi berikutnya pada langkah kedua. Yang perlu diperhatikan ialah peluang memainkan tiap tiap strategi sehingga dapat menghasilkan perolehan maksimal, tidak soal apa yang dikerjakan oleh pemain B. Alasan yang sama juga berlaku buat pemain B.

Misalkan pemain A memainkan strategi a_i(i=1,2,....m), dengan peluang x_i dimana $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$. Dengan cara yang sama pemain B memutuskan strategi

$b_j (j=1,2,....n)$ dengan peluang y_j dimana $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Strategi semacam ini disebut strategi campuran untuk pemain A dan Pemain B.

Perhatikan gambar berikut ini :

pemain A \ pemain B		b_1	b_2	...	b_n
		y_1	y_2	...	y_n
a_1	x_1	H(1,1)	H(1,2)	...	H(1,n)
a_2	x_2	H(2,1)	H(2,2)	...	H(2,n)
...	...	...	...	...	...
a_m	x_m	H(m,1)	H(m,2)	...	H(m,n)

gambar 2.9

Karena kedua pemain harus memilih strategi terlebih dahulu untuk semua langkah tanpa mengetahui apa yang dimainkan oleh yang lain , maka peluang memainkan salah satu strategi dianggap bebas. Sehingga perolehan yang diharapkan pemain A ditulis dengan PH ialah :

$$PH(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j H(i,j)$$

Untuk memperoleh PH maksimum harus diambil keputusan: $[x_1, x_2, ... x_m]$ max atau ditulis $x^* = [x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*]$

Jadi $\underset{max}{PH(A)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i^* y_i H(i,j)$

Strategi x^* disebut strategi maksimin optimal untuk pemain A. Dengan cara sama strategi minimaks optimal untuk pemain B ialah : $y^* = [y_1^*, y_2^*, ..., y_2^*]$

sehingga :

$$\underset{min}{PH(B)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j^* H(i,j)$$

Bila pemain A memainkan strategi maksimin optimal

$x^*=(x_1^*,x_2^*,..x_m^*)$ maka PH (A) $\geq$ v dan pemain B strategi minimaks optimal $y^*= (y_1^*,y_2^*,....,y_n^*)$ maka PH(B) $\leq$ v

Berdasarkan keterangan diatas, dapat disimpulkan bahwa bila x^*dan y^*adalah strategi optimal untuk pemain A dan Pemain B, maka $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j H(i,j) \geq$ v untuk tiap $y=[y_1,y_2,...y_n]$ dan

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\ y_j^*\ H(i,j) \leq v \text{ untuk tiap } x=[x_1,x_2,...x_m]$$

Bila pemain A dan B masing masing memainkan strategi optimal, maka perolehan optimal v sama dengan harga permainan yaitu :

$$[PH]_{op}= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* H(i,j)= v$$

ini berarti bila pemain A dan pemain B masing masing memainkan strategi optimal, maka pemain A mengharap meraih perolehan maksimun v dan pemain B mengharap derita minimum v.

2.2. TEOREMA DASAR DALAM TEORI PERMAINAN

Lambang lambang yang digunakan dalam teorema dibawah ini adalah sebagai berikut :

S adalah himpunan strategi pemain I

T adalah himpunan strategi pemain II

P adalah fungsi yang didefinisikan pada SXT

Fungsi P disebut fungsi pembayaran untuk pemain I

P(s,t) disebut pembayaran untuk pemain I bila ia menggunakan strategi s dan pemain II menggunakan strategi p

$-P(s,t)$ adalah pembayaran untuk pemain II dan sekaligus merupakan kerugian pemain I.

Gamenya diberi simbol $\Gamma=(S,T,P)$

lEMMA 1

Bila (σ_o,τ_o,v) adalah suatu penyelesaian game $\Gamma=(S,T,P)$ dan $a>0$ serta b konstan, maka $(\sigma_o,\tau_o,av+b)$ adalah penyelesaian dari game $\Gamma_{a,b}=(S,T,ap+b)$.

bukti :

karena (σ_o,τ_o,v)adalah suatu penyelesaian game $\Gamma=(S,T,P)$ kita tahu bahwa untuk $\forall\ \sigma\in S$ & $\forall\ \tau\in T$ berlaku pertidaksamaan berikut:

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma_o(s)\tau(t)p(s,t)\geq v\geq \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma(s)\tau_o(t)p(s.t) \qquad 1)$$

kita tahu $\forall\ \sigma\in S$ & $\forall\ \tau\in T$ dipunyai $\sum_{s\in S}\sigma(s) = 1$ dan $\sum_{t\in T}\tau(t) = 1$.

Oleh karena itu kita memperoleh persamaan baru :

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma_o(s)\tau(t)[ap(s,t)+b]$$

$$= a\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma_o(s)\tau(t)p(s,t)+b\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma_o(s)\tau(t)$$

$$= a\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma_o(s)\tau(t)p(s,t)+b\geq av+b \quad \text{untuk } \tau\in T \qquad 2)$$

dengan cara yang sama diperoleh :

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\sigma(s)\tau_o(t)[ap(s,t)+b]\leq av+b \quad \text{untuk } \sigma\in S \qquad 3)$$

dengan menggabungkan kedua pertidaksamaan diatas akhirnya diperoleh hasil yang diinginkan yaitu $(\sigma_o,\tau_o,av+b)$.

Lemma 2

(σ_o,τ_o,v) adalah suatu penyelesaian game $\Gamma=(S,T,P)$ dengan matrik pembayaran G JIKA HANYA JIKA

$\sigma_o G \geq [v, v, \ldots\ldots v]$ dan $G\tau_o \leq \begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix}$

bukti :

untuk $\sigma \in S$ dan $\tau \in T$ dipunyai $P(\sigma,\tau) = \sigma G \tau$

Dari sini (σ_o, τ_o, v) adalah suatu penyelesaian game dengan fungsi pembayaran P dan matrik G bila hanya bila

$\sigma_o G \tau \geq v \geq \sigma G \tau_o \qquad \forall\ \sigma \in S\ \&\ \forall\ \tau \in T$ 1)

Pada khususnya 1) harus berlaku bila σ dan τ dipilih sebagai vektor basis satuan. S terdiri atas m langkah dan T terdiri atas n langkah, maka G adalah matrik mxn dan $\sigma \in R^m$, $\tau \in R^n$

Dari 1), maka $\sigma_o G\, u_i \geq v \qquad i=1,2,\ldots.n$

$u_i G \tau_o \leq v \ldots\ldots\ldots i=1,2,\ldots.m$

ini sama dengan pernyataan $\sigma_o G \geq [v, v, \ldots\ldots v]$ dan

$$G\tau_o \leq \begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \qquad 2)$$

dan sebagian dari lemma terbukti.

Sebaliknya kita membuktikan jika (σ_o, τ_o, v) memenuhi 2), maka juga memenuhi 1).

hal ini mudah dilihat dengan menuliskan vektor probabilitas σ dan τ sebagai kombinasi linier vektor basis satuan.

sebagai contoh :bila,

$\sigma = (\sigma(s_1), \sigma(s_2), \ldots\ldots, \sigma(s_m)) = \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i)\, u_i$ maka,

$\sigma G \tau_o = \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i)\, u_i\, G\, \tau_o \leq \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i)\, v = v\, [\sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i)] = v$

Jadi, 2) adalah ekuivalen dengan keadaan bahwa (σ_o, τ_o, v) adalah penyelesaian game. Kita lengkapi bukti ini dengan menunjukkan bahwa $\sigma_o G$ u_i adalah koordinat ke i vektor $\sigma_o G$ dan dengan cara sama, u_i G τ_o adalah koordinat ke i vektor G τ_o.

Selanjutnya 2), dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$\sigma_o G \geq [v, v, \ldots\ldots, v] \text{ dan } G\tau_o \leq \begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix}$$

Lemma. 3

Misal G adalah matrik pembayaran mxn untuk 2 orang jumlah nol, dan dianggap bahwa G adalah positip, maka masalah program linier berikut mempunyai vektor optimal.

Carilah minimum dari $x(1,1,1,\ldots,1)$ untuk $x \in P$ dengan

$P = \{ x \in R^m : x \geq 0,\ xG \geq (1,1,\ldots,1) \in R^n \}$

Bukti :

Masalah dual terhadap yang diberikan adalah mencari $y \in R^n$ yang memaksimumkan $y(1,1,\ldots,1)$ dengan syarat $y \geq 0$ dan $Gy \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^m$

masalah dual ini mempunyai vektor fisibel $y=0$

masalah primal juga mempunyai vektor fisibel $G>\emptyset$ dan dari sini kita hanya perlu memilih suatu x dengan koordinat positip cukup besar yang memenuhi $x \geq 0$ dan $xG \geq (1,1,\ldots,1)$.

Jadi masalah dual dan primal mempunyai vektor fisibel.

Jadi keduanya mempunyai vektor optimal.

Sekarang kita buktikan Teorema Dasar Dalam Teori Game.

TEOREMA :

Setiap permainan jumlah nol 2 orang mempunyai penyelesaian.

bukti :

Katakan $\Gamma = (S,T,P)$ sebarang permainan jumlah nol 2 orang dan G adalah matrik pembayaran.

Pilihlah K sehingga $\Gamma_k = (S,T,p+k)$ mempunyai matrik positip, simbolkan matrik ini dengan G_k.

Selanjutnya x_o dan y_o adalah vektor optimal untuk masalah primal dan dual yang disebutkan dalam lemma 3, maka x_o dan y_o memenuhi $x_o \geq 0$, $y_o \geq 0$ dan

$$x_o \; G_k \geq (1,1,\ldots,1) \text{ dan } G_k \, y_o \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

ditambahkan $x_o\,(1,1,\ldots,1) = y_o\,(1,1,\ldots,1)$dan kita simbolkan nilai ini dengan m.

definisikan $\sigma_o$dan τ_o dengan $\sigma_o = \dfrac{x_o}{m}$,dan $\tau_o = \dfrac{y_o}{m}$

ketidak negatifan x_o dan y_o dengan kondisi 1) menjamin bahwa $\sigma_o$dan τ_o adalah vektor probabilitas.Juga kondisi pada $x_o \; G_k$ dan $G_k \; y_o$ berlaku :

$$\sigma_o \; G_k \geq (1/m,1/m,\ldots,1/m) \text{ dan } G_k \, \tau_o \leq \begin{bmatrix} 1/m \\ 1/m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1/m \end{bmatrix}$$

akhirnya lemma 2 kita simpulkan bahwa $(\sigma_0, \tau_0, 1/m)$ adalah penyelesaian $\Gamma = (S,T,p+k)$ dan dengan lemma 1 kita peroleh bahwa (σ_0, τ_0, v), $v=(1/m)-k$ adalah penyelesaian game $\Gamma = (S,T,P)$. Jadi terbukti bahwa setiap permainan jumlah nol 2 orang mempunyai penyelesaian.

2.3. PENGGUNAAN PROGRAM LINIER DALAM TEORI PERMAINAN

Permainan jumlah nol 2 orang yang berhingga dapat diselesaikan dengan program linier. Dalam penyelesaian dengan program linier, kita dihadapkan pada masalah metode simplek dan dualitas.

Perhatikan matrik permainan berikut ini :

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	y_3	....	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}
....	.....	.....	.....	....	....:
x_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}

gambar 2.10

A akan memilih x_i yang akan memaksimalkan nilai harapan pembayaran terkecil pada baris.

x_i = probabilitas untuk memilih langkah ke i, $i = 1,2,...,m$

maka kriteria maksimin untuk strategi campuran sebagai

berikut:

$$\max_{x_i} \{ \min (\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots\ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i) \}$$

B akan memilih y_j yang akan meminimalkan nilai harapan pembayaran terbesar pada kolom.

y_j = probabilitas untuk memilih langkah ke j, $j = 1,2,\ldots,n$

maka kriteria minimax untuk strategi campuran sebagai berikut:

$$\min_{y_j} \{ \max \{ \sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots\ldots\ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \}$$

Bentuk umum program linier : $AX \leq V$, $AX=V$, $AX \geq V$, $X \geq 0$

$me\frac{maksimal}{minimal}kan\ f=cx$

dengan $A = (a_{ij})$ = himpunan mxn pembayaran yang tersusun dalam m baris dan n kolom.

$X = [x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n]$

$V = [v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n]$

$C = (c_1, c_2, \ldots\ldots\ldots, c_n)$

bentuk kanonik program linier

$AX = V$, $X \geq 0$ $\qquad me\frac{maksimal}{minimal}$ kan $f:cx$

kita perhatikan untuk pemain A

$x_1+x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+x_m=1$, $\quad x_i \geq 0$, $\quad i=1,2,\ldots\ldots,m$

$$v = \min (\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots\ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i)$$

masalahnya menjadi memaksimalkan v, sehingga

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i \geq v$, $\qquad j=1,2,\ldots\ldots,n$, $\qquad v$ = nilai permainan

Rumus program linier diatas dapat disederhanakan dengan membagi (n+1) konstrain dengan v. Pembagian ini akan berlaku untuk $v>0$. Jika $v=0$, pembagian ini tidak

berlaku, sedang untuk $v<0$ kita dapat mengubah menjadi $v>0$ dengan menambah suatu konstanta positip K pada semua pembayaran pada matrik pembayaran. Kita ambil $K \geq$ harga mutlak dari pembayaran terkecil. Bila penyelesaian optimal sudah didapat, maka nilai permainan sebenarnya dikurangi dengan K.

kita dapatkan :

$$\frac{x_i}{v} \geq 0 \quad \text{untuk } i=1,2,\ldots,m$$

$$\frac{x_1}{v} + \frac{x_2}{v} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x_m}{v} = \frac{1}{v} \qquad 1)$$

$$a_{11}\frac{x_1}{v} + a_{21}\frac{x_2}{v} + \ldots\ldots + a_{m1}\frac{x_m}{v} \geq 1 \qquad 2)$$

$$a_{12}\frac{x_1}{v} + a_{22}\frac{x_2}{v} + \ldots\ldots + a_{m2}\frac{x_m}{v} \geq 1 \qquad 3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}\frac{x_1}{v} + a_{2n}\frac{x_2}{v} + \ldots\ldots + a_{mn}\frac{x_m}{v} \geq 1 \qquad (n+1)$$

untuk $X_i = \frac{x_i}{v}$, $i=1,2,\ldots,m$, maka

$$\max v = \min \frac{1}{v} = \min \{ X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m \}$$

sehingga :

$$X_i = \geq 0, \qquad i=1,2,\ldots,m$$

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m1}X_m \geq 1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{m2}X_m \geq 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_m \geq 1$$

masalahnya menjadi meminimumkan

$$X_0 = \frac{1}{v} = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m$$

kemudian dikerjakan dengan metode simplek.

Penyelesaian pemain B merupakan dual dari penyelesaian A. Jadi penyelesaian optimal salah satu pemain dapat

memberikan penyelesaian optimal pemain lainnya. Kita dapat juga mencari penyelesaian optimal pemain B dengan metode simplek dan penyelesaian untuk pemain A merupakan dual terhadap penyelesaian B.

Sekarang kita perhatikan untuk pemain B

$y_1+y_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+y_n=1, \qquad y_j \geq 0, \quad j=1,2,\ldots\ldots,n$

$v=\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots\ldots\ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)$

masalahnya menjadi meminimalkan v, sehingga

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \leq v, \quad i=1,2,\ldots\ldots,m, \quad v = \text{nilai permainan}$

$Y_j = \dfrac{y_j}{v}, \qquad j = 1,2,\ldots\ldots,n$

$\min v = \max \dfrac{1}{v} = \max Y_1+Y_2+\ldots\ldots\ldots+Y_n$

$a_{11}Y_1+a_{12}Y_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}Y_n \leq 1$

$a_{21}Y_1+a_{22}Y_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}Y_n \leq 1$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}Y_1+a_{m2}Y_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}Y_n \leq 1$

memaksimalkan $Y_o = \dfrac{1}{v} = Y_1+Y_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+Y_n$

kemudian dikerjakan dengan metode simplek

2.3.1. Penyelesaian dengan metode simplek

Penyelesaian cara simplek hanya dikerjakan untuk bentuk kanonik. untuk bentuk yang bukan kanonik, maka harus diubah dulu ke bentuk kanonik. Bentuk kanonik : AX=V, kita usahakan ruas kanan tidak negatif. Bila sudah tereduksi lengkap, maka vektor suku tetap akan menjadi nilai perubah basis.

Penyelesaian AX=V yang memenuhi $X \geq 0$ disebut

penyelesaian fisibel.

Dalil dalil Penunjang :

Dalil I : Himpunan penyelesaian fisibel masalah program linier merupakan himpunan konveks.

Bukti :

Jika himpunan hanya berisi satu anggota maka bukti sudah jelas. Misalkan x_1 dan x_2 adalah penyelesaian penyelesaian fisibel, jadi $Ax_1=V$, $x_1 \geq 0$ dan $Ax_2=V$, $x_2 \geq 0$

Susun X sebagai kombinasi konveks x_1 dan x_2 :

$X = a_1x_1+a_2x_2 \qquad a_1+a_2=1 , \quad a_1 \geq 0 , a_2 \geq 0$

maka $AX = A\ (a_1x_1+a_2x_2)=a_1Ax_1+a_2Ax_2=a_1v+a_2v=(a_1+a_2)v=v$

jadi x memenuhi Ax=v, juga ternyata $x \geq 0$ karena $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Jadi x memenuhi $x \geq 0$, hingga x fisibel.

Maka himpunan penyelesaian fisibel terbukti konveks. Dalil ini juga berlaku jika diterapkan untuk masalah program linier yang syaratnya berbentuk $AX \leq V$ maupun $AX \geq V$.

Dalil II : Penyelesaian fisibel optimal paling tidak memuat satu penyelesaian fisibel basis.

bukti:

Misalkan $x=(x_1,x_2,.....x_n)$ suatu penyelesaian fisibel dengan p buah perubah positip, $p \leq n$.

Perubah yang positip kita kumpulkan dimuka, jadi $x=(x_1,x_2,....x_p,0,0,...0)$. Dan ini memenuhi $Ax=v$ dan $x\geq 0$.

$Ax=v$ menjadi $\sum_{j=1}^{p} X_j A_j = V$ (A_j = kolom ke j dalam A)

kemungkinan :

1) A_j independen linier p=m, jelas ada penyelesaian fisibel. p<m, akan dapat ditemuka pm-p vektor lainnya yang bersama sama p vektor tadi akan menyusun basis dalam E^n, berarti kita memperoleh penyelesaian fisibel basis yang degenerated dengan (m-p) perubahnya nol.

2) dependen linier : dapat ditemukan a_j yang tidak semua nol, $\sum_{j=1}^{p} a_j A_j = 0$.

Untuk membuktikan dalil ini akan diperlihatkan bagaimana cara memilih vektor vektor $a_j \ni A_j$ independen linier dan v dapat ditulis sebagai kombinasi linier mereka dengan koefisien tak negatif. Didalam $\sum_{j=1}^{p} x_j A_j = v$, dengan $x_j > 0$, beberapa x_j dapat dijadikan nol dengan cara penggantian basis : misalkan A_r masuk, dari dependen linier diatas :

$$A_r = -\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{a_r} A_j \qquad , j\neq r$$

persamaan menjadi $\sum_{j=1}^{p} (x_j - x_r \frac{a_j}{a_r}) A_j = v$

supaya perubah baru juga tak negatip maka $xj - x_r \frac{a_j}{a_r} \geq 0$

jika $a_j \neq 0$, $\frac{x_j}{a_j} - \frac{x_r}{a_r} \geq 0$ jika $a_j > 0$

$$\frac{x_j}{a_j} - \frac{x_r}{a_r} \leq 0 \quad \text{jika } a_j < 0$$

$a_j = 0$ jelas sudah dipenuhi.

maka ciri untuk menentukan r mengikuti pedoman pilih

$$\frac{x_r}{a_r}=\min_j \{\frac{x_j}{a_j},\ a_j>0\}$$

Kemungkinan x_r disamakan dengan nol, hingga v tertulis sebagai kombinasi linier (p-1) buah A_j dengan koefisien yang positip. Dengan demikian kita ulang sedemikian sehingga vektor vektor dengan koefisien positip akan independen, berarti terdapat suatu penyelesaian fisibel basis.

Dalil III : Suatu titik merupakan penyelesaian fisibel bila dan hanya bila titik tersebut merupakan titik ekstrim himpunan penyelesaian fisibel.

Bukti :

a). Misalkan x suatu penyelesaian fisibel dalam Ax=v, dan dapat ditulis $\sum_{j=1}^{m} x_j A_j = v$, misalkan matrik yang tersusun oleh aj independen ini adalah D, jadi Dx=v sehingga $x=D^{-1}v$, $x\in E^m$.

Dengan kontra posisi, dimisalkan x bukan titik ekstrim F, artinya terdapat x_1 dan $x_2 \in E$ yang berlainan dengan x sedemikian sehingga $x=px_1+qx_2$, $p+q=1$, $p\geq 0$, $q\geq 0$

Misalkan $x_1=[u_1,v_1]$, $x_2=[u_2,v_2]$ dengan $u_1,u_2 \in E^m$

maka $x=[\bar{x},0]=p[u_1,v_1]+q[u_2,v_2]$

jadi $0=pv_1+qv_2$, sedangkan $p\geq 0$, $q\geq 0$, $v_1\geq 0$, $v_2\geq 0$, hingga satu satunya kemungkinan adalah $v_1=0$ dan $v_2=0$, berarti $x_1=[u_1,0]$; $x_2=[u_2,0]$.

Karena x_1, x_2 jawab fisibel, maka $Ax_1=v$ dan $Ax_2=v$. Jadi

x_1 dan x_2 adalah penyelesaian fisibel.

jadi $Ax_1=Du_1=v$, $Ax_2=Du_2=v$, dan $Dx=v$.

Pernyataan vektor v dengan basis haruslah tunggal,jadi $x=u_1=u_2$ atau $x=x_1=x_2$ hingga penggandaian adanya x_1,x_2 berlainan dengan x adalah salah. Yang benar $x=x_1=x_2$ adlah titik ekstrim.

b). Misalkan $x^*=[x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n]$ sebarang titik ekstrim F dengan k buah komponennya bukan nol (positip), komponen diurut kembali supaya yang positip ada dimuka.

$$x^*=[x_1,x_2,\ldots\ldots,x_k,0,0,\ldots,0]$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_iA_i=v \text{ dengan } x_i\geq 0, \quad i=1,2,\ldots,k$$

Andaikan vektor vektor A_i ini dependen linier maka terdapat λ_i, tidak semua nol $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i=0$.

Misalkan $n=\min_i \{\frac{x_i}{|\lambda_i|}\}$, $\lambda_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots,k$ (jadi $n\geq 0$)

Jika dipilih ε, $0<\varepsilon<n$, maka $x_i+\varepsilon\lambda_i>0$ dan $x_i-\varepsilon\lambda_i>0$

susun vektor $p\in E^n$, dengan :

$p=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots.,\lambda_k,o,o,\ldots\ldots,o)\neq 0$

Susun $x_1=x^*+\varepsilon p$, $x_2=x^*-\varepsilon p$, maka $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$

karena $\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i=Ap=0$ maka $Ax_1=A(x^*+\varepsilon p)=Ax^*+0=v$, juga $Ax_2=v$.

jadi x_1 dan x_2 penyelesaian fisibel yang berbeda dengan x^* dan $x^*=(1/2)x_1+(1/2)x_2$. Ini bertentangan dengan ketentuan x^* titik ekstrim. Jadi pengandaian bahwa A_i dependen linier salah, seharusnya A_i independen linier dan $k\leq m$.

Terbukti bahwa x^* adalah penyelesaian fisibel. Dalam hal tak ada degeneracy, maka jelas ada korespondensisatu satu antara penyelesaian fisibel dengan titik titik ekstrim.

Dalil IV : Fungsi sasaran (jika mempunyai) akan mencapai nilai optimalnya pada suatu titik ekstrim himpunan penyelesaian fisibel F.

Bukti :

Untuk mempermudah, bukti ditulis untuk soal maksimum, sedang untuk soal minimum menyesuaikan.Misalkan $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}_p$ adalah titik titik ekstrim penyelesaian fisibel, dan x_o adalah titik optimal (maksimal) maka $f(x_o) \geq f(x)$ untuk semua $x \in F$. Jika x_o adalah salah satu titik ekstrim, maka bukti sudah selesai.

Jika x_o bukan salah satu titik ekstrim, maka x_o dapat ditulis sebagai kombinasi konvek $\bar{x}_i$, $i=1,2,\ldots,p$, jadi misalnya :

$x_o = \sum_{i=1}^{p} u_i \bar{x}_i$, $\sum_{i=1}^{p} u_i = 1$, $u_i \geq 0$, karena f(x) fungsional linier, maka $f(x_o) = f(\sum_{i=1}^{p} u_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{p} u_i f(\bar{x}_i) = M$

(nilai max f(x))

misalkan $f(\bar{x}_k) = \max \{ f(\bar{x}_i)\}$, $f(\bar{x}_i)$ diruas kanan diganti semua dengan $f(\bar{x}_k)$, dan karena $u_i \geq 0$, $f(\bar{x}_o) \leq \Sigma u_i f(\bar{x}_k) = f(\bar{x}_k)$ dimana dianggap $f(x_o) \geq f(\bar{x}_k)$, maka $f(x_o) = f(\bar{x}_k) = M$, berarti adalah titik ekstrim $\bar{x}k \ni f$

mencapai nilai maksimalnya.

Dengan jaminan dalil dalil diatas, kita dapat menyelesaikan program linier dengan metode simplek.

2.3.2. Penyelesaian dengan dualitas.

Soal Primal : memaksimalkan $y_o = \sum_j c_j y_j$, mencari $y_j \geq 0$

memenuhi $\sum_j a_{ij} y_j \leq b_i$, $i=1,2,\ldots,m$: $j=1,2,..n$

Soal dual : meminimalkan $x_o = b_i x_i$, mencari $x_i \geq 0$

memenuhi $\sum_j a_{ij} x_i \geq c_j$, $i=1,2,\ldots,m$: $j=1,2,\ldots n$

Perhatikan bahwa :

- koefisien ongkos c_j pada primal menjadi kolom suku tetap pada dual.
- kolom suku tetap b_i pada primal menjadi koefisien ongkos pada dual.
- matrik koefisien pada dual adalah transpose matrik koefisien pada primal.

x_i \ y_j	y_1	y_2	y_3	.....	y_n	min x_o
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	.....	a_{1n}	$\leq b_1$
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	.....	a_{2n}	$\leq b_2$
....	....	....	...	....	...	.....
x_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	$\leq b_m$
max	$\geq c_1$	$\geq c_2$	$\geq c_3$	...	. $\geq c_n$	

gambar 2.11

Terlihat bahwa y_k pada syarat primal berkaitan dengan syarat ke-k pada dual, dan sebaliknya x_p pada dual

berkaitan dengan syarat ke-p pada primal. Dengan demikian banyak perubah pada primal sama dengan banyak syarat utama pada dual dan sebaliknya.

Dalil I : Dari sepasang soal dual, jika salah satu mempunyai penyelesaian optimal, maka dualnya pun mempunyai penyelesaian optimal, dan kedua nilai optimalnya saling sama,

Bukti :

Soal yang saling dual:

-mencari $x \geq 0$, memenuhi $Ax \leq B$, memaksimalkan $f=cx$ (1)

-mencari $w \geq 0$, memenuhi $A'w \geq c'$, meminimalkan $g=b'w$ (2)

Dimisalkan (1) mempunyai PO, lalu dibuktikan bahwa (2) pun mempunyai PO. Jika (1) diselesaikan dengan cara simplek, maka harus dirubah dulu menjadi

mencari $[x,s] \geq 0$

memenuhi $Ax+s=B$

dan memaksimalkan $f=cx$ (3)

disini s adalah vektor perubah slack.

Misalkan $\bar{x}$ adalah penyelesaian optimal basis bagi (3) dengan matrik basis D dan vektor ongkos $\bar{c}$ maka, $\bar{x}=D^{-1}B$, sedang nilai f yang sesuai ialah $f_{max}=\bar{c}\bar{x}$.

Untuk itu berlaku $z_j-c_j \geq 0$ untuk semua j, jadi $z_j \geq c_j$, untuk vektor kolom A ialah A_j berlaku $z_j=\bar{c}y_j=\bar{c}D^{-1} \geq c_j$ j dijalankan didapat $\bar{c}\bar{D}^{-1}A \geq c$ (4)

Dualnya ialah (2) kita ubah sedikit, ditulis dengan bentuk transposenya. mencari $w' \geq 0$

memenuhi $w'A > c$

dan memaksimalkan $g = w'B$ (5)

tinjau suatu nilai w'. $w' = \bar{c}D^{-1}$, dari (4) didapat $w'A = \bar{c}D^{-1}A \geq c$. Jadi w' ini memenuhi syarat utama (5)

Tinjau nilai $z_j - c_j$ untuk perubah slack pada (3)

$z_j - c_j \geq 0$, $\bar{c}D^{-1}A_j - c_j = \bar{c}D^{-1}\epsilon_i - 0 \geq 0$.

sebab perubah slack pada (4) kebetulan menjadi perubah basis sehingga kolom A_j merupakan vektor satuan, ditulis ϵ_i.

Dengan menjalankan i didapat : $\bar{c}D^{-1}I \geq 0$ atau $\bar{c}D^{-1} \geq 0$, berarti bahwa $w' = \bar{c}D^{-1}$ juga memenuhi syarat tak negatif.

Akan dibuktikan bahwa $\bar{c}D^{-1}$ ternyata merupakan PO bagi (5) atau (2). Nilai g yang sesuai dengannya ialah : $g = w'B = \bar{c}D^{-1}B = \bar{c}\bar{x} = f_{max}$. Jadi $\bar{c}D^{-1}$ adalah penyelesaian fisibel bagi (2) dan $\bar{x}$ adalah penyelesaian fisibel bagi (1) dengan nilai fungsi sasaran $\bar{c}\bar{x} = \bar{c}D^{-1}B$.

Dalil II : a. Jika dalam penyelesaian optimal primal perubah ke-p bernilai positip (merupakan pertidaksamaan $y_p > 0$) maka syarat ke-p dalam penyelesaian optimal dual akan merupakan persamaan.

b. Jika dalam penyelesaian optimal primal syarat ke-k berupa pertidaksamaan, maka perubah ke-k dalam penyelesaian optimal dual bernilai nol (berupa

persamaan $x_k=0$).

Bukti : a. $x_p>0$ berarti x_p berada dalam basis sehingga $z_p-c_p=0$. $z_p-c_p=\bar{c}D^{-1}A_p-c_p=w'A_p=c_p=0$. artinya $w'A_p=c_p$ atau $\sum_i a_{ip}\, w_i=c_p$, syarat ke-p berupa persamaan.

b. $x_{n+k}>0$ berarti x_{n+k} berada dalam basis sehingga vektor kolom yang sesuai akan berbentuk $\pm$ Ek (Ek satuan), dan $z_{n+k}-c_{n+k}=0$. Tetapi diketahui pula bahwa $c_{n+k}=0$, sehingga

$z_{n+k}-c_{n+k}=\bar{c}D^{-1}(\pm Ek) = (\bar{c}D^{-1})k = (w')k = wk = 0$.

Terbukti $(w')k$ maksudnya adalah kolom ke-k dalam w'.

2.4. PENGGUNAAN MATRIK DALAM TEORI PERMAINAN

2.4.1. Pemakaian metode aljabar matrik

Dalam permainan jumlah nol 2 orang dengan strategi campuran, suatu strategi campuran optimal maupun harga permainan dapat diperoleh dengan metode matrik, jika matrik permainan dalam bentuk suatu bujursangkar.

Notasi dan operasi matrik yang diperlukan :

$A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$= suatu sub matrik bujursangkar dari A order $r>1$

$j_r = (1,1,\ldots\ldots,1)$ suatu matrik (1xr)

C^T = tranpose matrik C

Adj B = Adjoint B

$X = (x_1,x_2,\ldots\ldots,x_m)$, $\sum_i x_i=1$, $x_i\geq 0$

$Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$, $\quad \sum_j y_j = 1$, $\quad y_j \geq 0$

$\bar{x}$ = suatu matrik (1xr) diperoleh dari x dengan menghilangkan elemen elemennya sesuai dengan baris baris yang dihilangkan dari A untuk memperoleh B.

$\bar{y}$ = suatu matrik (1xr) diperoleh dari y dengan menghilangkan elemen elemennya yang sesuai dengan kolom kolom yang dihilangkan dari A untuk memperoleh B

2.4.2. Cara penyelesaian.

1. Pilih suatu sub matrik bujursangkar B dari A dengan order r ($r \geq 2$) dan hitung :

$$\bar{x} = \frac{jr \text{ adj } B}{jr \text{ (adj } B) \text{ } jr}^{T} = (x_{r1}, x_{r2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{rr})$$

$$\bar{y} = \frac{jr \text{ (adj } B)^{T}}{jr \text{ (adj } B) jr}^{T} -= (y_{r1}, y_{r2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_{rr})$$

2. Jika terdapat $x_{ri} < 0$, atau terdapat $y_{ri} < 0$, maka pilihan B itu ditolak, dan mencoba b yang lain.
3. Jika $x_{ri} \geq 0$ $(i=1,2,\ldots,r)$ dan $y_{rj} > 0$ $(j=1,2,\ldots,r)$ kita hitung : $\quad g = \dfrac{B}{jr \text{ (adj } B) \text{ } jr}^{T}$

   dan susun x dan y dari $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dengan menambah nol pada tempat tempat yang sesuai.

cek apakah : $\Sigma\, x_i a_{ij} \geq g$ untuk setiap $j=1,2,\ldots,n$

$\Sigma\, y_j b_{ij} \leq g$ untuk setiap $i=1,2,\ldots,m$

Jika salah satu relasi tidak terpenuhi, coba B yang lain. Jika seluruh relasi terpenuhi, maka x,y dan g merupakan penyelesaian yang dicari.

2.5.PENGGUNAAN DIAGRAM ALUR DALAM TEORI PERMAINAN

Penyelesaian matrik permainan (mxn) dengan algoritma Brown.

Didalam suatu permainan antara 2 orang pemain yaitu pemain I dan pemain II, dengan pemain I mempunyai m strategi dan pemain II mempunyai n strategi, permainan antara 2 orang ini adalah berjumlah nol.

Matrik pembayarannya disajikan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots\cdots & p_{mn} \end{bmatrix}$$

Algoritma Brown sebagai berikut :

Langkah :

1. Pemain I memilih suatu baris untuk dimainkan dan pemain II memilih kolom yanmg bersesuaian dengan elemen minimum didalam baris.

2. Pemain I memilih baris untuk dimainkan yang bersesuaian dengan elemen maksimum didalam kolom yang dipilih oleh pemain II didalam langkah 1

3. Pemain II menjumlah baris baris yang telah dimainkan oleh pemain I dan memainkan kolom yang bersesuaian dengan jumlah minimum elemen.

4. Pemain I menjumlah kolom kolom yang telah dimainkan oleh pemain II, dan memainkan baris yang bersesuaian

dengan jumlah maksimum elemen, Jika jumlah iterasi yang diinginkan dipenuhi, maka dilanjutkan langkah 5, jika sebaliknya maka kembali ke langkah 3.

5. Hitung batas atas dab batas bawah, masing masing $\bar{v}$ dan $\underline{v}$

$$\bar{v} = \frac{\text{jumlah maksimum elemen dari langkah 4}}{\text{banyaknya permainan yang dilakukan}}$$

$$\underline{v} = \frac{\text{jumlah minimum langkah 3}}{\text{banyaknya permainan yang dilakukan}}$$

6. Misal x_i = proporsi pemain I memainkan baris i dengan i=1,2,.....,m

y_j = proporsi pemain II memainkan kolom j dengan j=1,2,.....,n

strategi strategi itu mendekati strategi optimal minimax.

Batas atas dan batas bawah pada harga permainan adalah $\underline{v} \leq v \leq \bar{v}$ dimana $\underline{v}$ dan $\bar{v}$ dihitung didalam langkah 5.