ABSTRAK

Pemodelan matematika untuk proses epidemik adalah salah satu pemodelan matematika dibidang kedokteran yang memodelkan fenomena penularan (penjalaran) suatu penyakit menular dari individu sakit (infective) terhadap individu rentan.

Pemodelan ini dibentuk dengan memperhatikan kondisi-kondisi dominan yang ada pada fenomena tersebut diantaranya mengenai penularan penyakit dan perilakunya dalam suatu populasi, yang kemudian dimasukkan dalam beberapa asumsi.

Model yang disajikan disini adalah model deterministik yang berbentuk persamaan diferensial, dimana penyelesaian persamaan diferensial tersebut dapat memberikan informasi mengenai penularan penyakit dalam suatu populasi.

DAFTAR SIMBOL

lim : limit

∞ : bilangan tak hingga

$>$: lebih besar

$<$: lebih kecil

$s(t)$: jumlah individu rentan pada waktu t

$i(t)$: jumlah individu infective pada waktu t

$r(t)$: jumlah individu removal pada waktu t

$e(t)$: jumlah individu yang masih dalam masa inkubasi pada waktu t

$v(t)$: jumlah individu yang diberi vaksinasi

$\alpha(t)$: laju pemberian vaksinasi

$\overline{\alpha(t)}$: nilai rata-rata $\alpha(t)$

N : Ukuran total populasi

β : konstanta pembanding pada laju perubahan jumlah rentan

γ : konstanta pembanding pada laju perubahan jumlah removal

ρ : merupakan hasil bagi dari γ dan β; $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$

σ : masa sakit infective

$i_o(t)$: jumlah mula-mula infective yang ada pada saat t

T : periode inkubasi

$\frac{ds}{dt}$: laju perubahan jumlah rentan

$\frac{dr}{dt}$: laju perubahan jumlah removal

t_M : waktu dimana kurva epidemik mencapai maksimum

D : penambahan untuk t_M pada uji kesimetrisan kurva epidemik

N_1, N_2: sasaran yang dikehendaki dalam penentuan laju pemberian vaksinasi

λ : ukuran keterinfeksian dari infective awal pada suatu periode

ω : mewakili jumlah individu sehat yang menjadi sakit akibat penularan.

$\approx$: nilai pendekatan

BAB I

PENDAHULUAN

Seringkali dihadapi banyak permasalahan dibidang non matematika, seperti bidang teknik, biologi, kedokteran, fisika dan sebagaianya, tidak bisa diselesaikan secara langsung. Untuk mengatasi hal ini, pada umumnya permasalahan tersebut diselesaikan secara matematik dengan menterjemahkan masalah itu ke dalam model matematika. Dimana bentuk model matematika untuk suatu fenomena bisa merupakan masalah persamaan diferensial, program linier dan sebagainya.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas salah satu pemodelan matematika di bidang kedokteran, yaitu pemodelan matematika untuk proses epidemik. Proses epidemik yang dimaksud adalah suatu proses dimana terjadi peningkatan jumlah individu yang menjadi sakit karena tertularnya penyakit dari individu pembawa bibit penyakit. Dalam pembentukkan model matematikanya, didasarkan pada kondisi-kondisi dominan yang ada pada fenomena penjalaran penyakit dan perilaku penyakit dalam suatu populasi, yang kemudian kondisi-kondisi tersebut dimasukkan dalam beberapa asumsi. Dari penyelesaian model matematika tersebut dapat diambil informasi-informasi mengenai proses penularan penyakit, misalnya berapa jumlah individu yang terkena penyakit dan individu yang masih sehat pada waktu tertentu (pada kasus epidemik sederhana dan epidemik umum), syarat apa yang harus dipenuhi sehingga proses epidemik cukup berarti (pada kasus epidemik umum dan epidemik dengan masa inkubasi), dan bagaimana menentukan laju pemberian vaksinasi sehingga sasaran yang dikehendaki tercapai.

Dalam pemodelan matematika untuk proses epidemik di sini yang akan dibahas hanya pemodelan untuk kasus deterministik saja. Sistematika penulisan adalah sebagai berikut:

Bab I berisi pendahuluan

Bab II akan dibahas teori penunjang/materi dasar yang berisi penyusunan model matematika , epidemik penyakit menular, limit fungsi, turunan suatu fungsi, persamaan diferensial biasa yaitu persamaan diferensial peubah terpisah dan persamaan diferensial orde satu, dan teorema rata-rata untuk integral.

Bab III akan membahas pemodelan matematika untuk epidemik sederhana, pemodelan matematika epidemik secara umum, pemodelan epidemik dengan vaksinasi dan pemodelan epidemik dengan masa inkubasi.

Bab IV penutup yang berisi kesimpulan yang dapat ditarik dari pembahasan dalam bab III.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 PENYUSUNAN MODEL MATEMATIKA

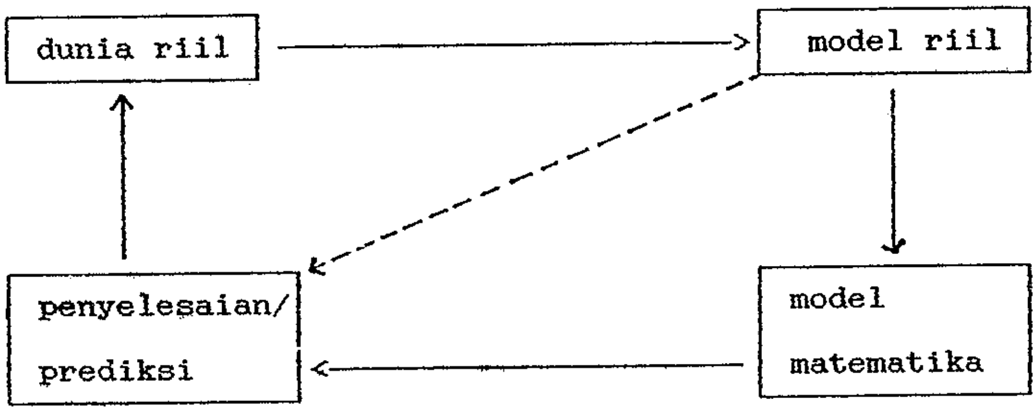
Model merupakan representasi suatu keadaan atau fenomena dalam bentuk sederhana. Setiap penggambaran suatu obyek sebenarnya adalah pembuatan suatu model. Sebelum membahas suatu masalah lebih lanjut, biasanya terlebih dulu di bentuk suatu model. Seringkalai digunakan model kuantitatif atau digunakannya bahasa matematika untuk menggambarkan suatu fenomena. Banyak fenomena sehari-hari yang dapat diselesaikan secara matematika. Permasalahan dalam dunia riil dapat digambarkan sebagai hubungan antara berbagai besaran yang saling berkaitan, dimana kaitan tersebut dikendalikan atau terjadi menurut aturan-aturan atau hukum-hukum dalam situasi riil tersebut.

Dalam suatu fenomena riil dapat diidentifikasikan besaran yang terlibat di dalamnya, baik besaran yang dominan maupun besaran-besaran yang dapat diabaikan karena tidak terlalu menentukan, dimana pengabaian besaran yang tidak dominan tersebut dapat dilakukan berdasarkan asumsi yang dibuat sehingga fenomena tersebut dipandang sebagai suatu pendekatan atau penghampiran dalam bentuk yang sederhana.

Jadi suatu fenomena riil dikatakan jelas, jika kaitan antara besaran-besaran yang terlibat itu diketahui secara pasti. Besaran-besaran yang berkaitan tersebut ada yang bernilai tetap (konstanta) dan ada pula yang berubah nilainya (variabel).

Untuk mendapatkan model matematika dari suatu fenomena dalam dunia riil, besaran-besaran tersebut dinyatakan dengan besaran matematika (simbol-simbol matematika). Hukum-hukum yang mengendalikan suatu fenomenadinyatakan dengan bahasa matematika yang dapat berupa persamaan diferensial, program linier atau bentuk lainnya. Hubungan antara besaran-besaran yang terlibat dalam suatu fenomena riil merupakan masalah penentuan fungsi yang melibatkan semua peubah dan konstanta yang kadangkala dipandang sebagai parameter. Bila model matematika itu berbentuk persamaan diferrensial, maka masalah matematikanya merupakan masalah penyelesaian persamaan diferensial tersebut. Dari penyelesaian tersebut dapat diketahui interaksi antara besaran-besarannya, yang akan memberikan informasi penyelesaian dari permasalahan tersebut.

Secara sederhana proses penyusunan model tersebut adalah sebagai berikut:



gb. 2.1 bagan penyusunan model matematika

2.2 EPIDEMIK PENYAKIT MENULAR

Definisi 2.2.1:

Epidemik di sini adalah mengindikasikan perubahan dalam komposisi pada suatu populasi, dimana jumlah individu yang berpenyakit meningkat karena tertularnya penyakit dari individu pembawa bibit penyakit.
Jadi epidemik yang dimaksud adalah epidemik penyakit menular.

Definisi 2.2.2:

Menurut Resna A Soerawidjaya dan Azrul Azwas (1989), penyakit menular yaitu penyakit yang disebabkan oleh suatu mikroorganisme atau produk toxinnya, yang ditularkan dari penderita atau reservoirnya kepada manusia lain yang rentan.

2.3 LIMIT FUNGSI

Definisi 2.3.1:

Misalkan I selang terbuka, $a \in I$. Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi di setiap $x \in I$. Limit f(x) untuk x menuju a akan sama dengan L, ditulis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2.1}$$

jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ (sekitar L), terdapat $\delta > 0$ (sekitar a) sedemikian hingga untuk semua x berlaku:

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Definisi 2.3.2:

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada semua bilangan diselang (a,∞). Limit dari f(x), untuk x menuju tak hingga akan sama dengan L, ditulis:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \tag{2.3}$$

jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $M > 0$, sedemikian hingga untuk semua x berlaku:

$$x > M \implies |f(x)-L| < \varepsilon \tag{2.4}$$

2.4 TURUNAN SUATU FUNGSI

Definisi 2.4.1:

Turunan dari fungsi f adalah suatu fungsi yang ditulis f' sedemikian hingga nilai fungsi ini untuk setiap x didalam daerah definisi f diberikan oleh persamaan:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.5)$$

atau $f'(x) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x-x_1}$

2.5 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Definisi 2.5.1:

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah hubungan diferensial antara satu peubah tak bebas terhadap satu peubah bebas. Bentuk umum persamaan diferensial (PD) tersebut adalah:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.6)$$

Dimana x adalah peubah bebas dan y adalah peubah tak bebas $a_0(x)$, $a_1(x)$,...,$a_n(x)$ dan f(x) adalah konsatanta real atau fungsi dari x dengan $a_0(x) \neq 0$

Untuk pembahasan selanjutnya persamaan diferensial biasa ini disebut sebagai persamaan diferensial (PD) saja.

Definisi 2.5.2:

Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial orde (tingkat) n jika di dalam persamaan diferensial tersebut turunan yang tertinggi adalah turunan ke-n.

Definisi 2.5.3:

Suatu persamaan diferensial disebut persamaan deferensial degree (derajat) m, jika dalam persamaan tersebut pada orde tertinggi mempunyai pangkat m.

2.5.1 PERSAMAAN DIFERENSIAL PEUBAH TERPISAH

Suatu PD peubah terpisah ditandai dengan 2 peubah dari persamaan tersebut bersama masing-masing diferensialnya dapat ditempatkan pada ruas yang berlawanan.

Bentuk umum PD tersebut: $Q(y)\ dy = P(x)\ dx$

atau $Q(y)\ dy - P(x)\ dx = 0$ (2.7)

Penyelesaian PD tersebut adalah integrasi kedua ruas dari persamaan tersebut, yaitu:

$\int Q(y)\ dy - \int P(x)\ dx = c$, dengan c: konstanta sebarang.

Contoh 1:

Selesaikanlah persaman berikut: $9y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$

Penyelesaian:

Terlebih dulu dibentuk PD peubah terpisah

$9y\ dy + 4x\ dx = 0$

Integrasi persamaan tersebut:

$\int 9y\ dy + \int 4x\ dx = k$

$$9y^2 + 4x^2 = 2k$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = c$$

Sehingga penyelesaian umum dari PD tersebut adalah

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = c$$

2.5.2 PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 1

Definisi 2.5.4:

Persamaan diferensial orde 1, adalah persamaan yang berbentuk:

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)\, y = f(x)$$

dengan $a_0(x)$, $a_1(x)$ dan $f(x)$ dimisalkan merupakan fungsi-fungsi kontinu pada selang I dan $a_0(x) \neq 0$

Jika persamaan tersebut dibagi dengan $a_0(x)$ diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

atau $\quad y' + a(x)\, y = b(x) \qquad\qquad (2.8)$

Penyelesaian persamaan (2.8) adalah :

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\,[c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx}dx] \qquad (2.9)$$

Persamaan (2.9) diperoleh dari:

Persamaan (2.7) dikalikan dengan $e^{\int a(x)dx}$ (yang disebut sebagai faktor integral) diperoleh:

$$[ye^{\int a(x)dx}]' = b(x)\, e^{\int a(x)dx}$$

Kemudian dengan mengintegralkan persamaan tersebut:

$$y\, e^{\int a(x)dx} = c + \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx$$

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}[c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx} dx],$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (2.7)

Contoh 2:

Cari penyelesaian umum dari $\frac{dy}{dx} + (\tan x)\, y = \sin x$ dalam selang $(0,\pi/2)$

Penyelesaian:

PD tersebut adalah PD linier orde 1 dengan $a(x) = \tan x$ dan $b(x) = \sin x$ yang keduanya kontinu dalam selang $(0,\pi/2)$. Keduanya dikalikan dengan faktor integral $e^{\int \tan x\, dx} = \frac{1}{\cos x}$ sehingga diperoleh:

$$(y \frac{1}{\cos x})' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

yang hasil integrasinya adalah:

$$y(x) = \cos x\, [c - \ln \cos x] \quad ; 0<x<\pi/2$$

2.6 TEOREMA NILAI RATA-RATA UNTUK INTEGRAL

Teorema 2.6.1:

Jika f adalah fungsi kontinu pada [a,b], maka terdapat bilangan c di dalam [a,b] sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a)$$

Bukti:

Karena f fungsi kontinu pada [a,b], maka f mempunyai nilai ekstrim, misalkan dipilih f(m) dan f(M) sebagai nilai minimum dan maksimum dari f pada [a,b]. Karena $f(m) \le f(x) \le f(M)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka dengan teorema preservasi pertidaksamaan yaitu bahwa jika f dan g terintegral pada [a,b] dan jika $f(x) \le g(x)$ untuk setiap x dalam interval tersebut, maka:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Dari sini diperoleh:

$$\int_a^b f(m)\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(M)\,dx$$

sehingga diperoleh:

$$(b-a)\,f(m) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\,f(M)$$

$$f(m) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le f(M)$$

Kemudian dengan teorema nilai tengah, yaitu bahwa jika f kontinu pada [a,b] dan k adalah bilangan antara f(a) dan f(b) maka terdapat sedikitnya 1 bilangan c antara a dan b sedemikian hingga f(c) = k.

Sehingga dengan teorema nilai tengah tersebut akan terdapat c dalam (a,b) sedemikian hingga

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Nilai dari f(c) yang diberikan dalam teorema tersebut disebut nilai rata-rata daari f pada interval [a,b]

Contoh 3:

Cari nilai rata-rata dari $f(x) = 3x^2 - 2x$ pada interval [1,4].

Penyelesaian:

Misalkan av adalah nilai rata-rata dari fungsi tersebut, maka:

$$av = \frac{1}{4-3}\int_1^4 (3x^2-2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ (x^3-x^2\ \Big|_1^4$$

$$= 48/3$$

$$= 16$$

Jadi nilai rata-rata nya adalah 16.