BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Bilangan Kompleks

Definisi 1 :

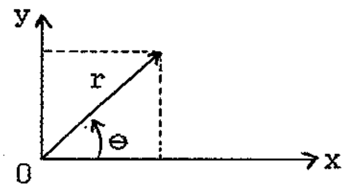
Bilangan kompleks $\subset$ adalah sebuah bilangan yang berbentuk x + iy, dimana x dan y bilangan-bilangan real R dan $i = \sqrt{-1}$.

Jika dinyatan dalam koordinat polar maka $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r^2 = x^2 + y^2$ dan bilangan kompleks

$z = x + iy$ menjadi :

$z = r \cdot \cos \theta + i\, r \sin \theta = r\, e^{i\theta}$.

Gambar 1 :



Definisi 2

Konjugasi dari bilangan kompleks $z = x + iy$ dinyatakan dengan $\bar{z}$ adalah $\bar{z} = x - iy$

Definisi 3

Nilai mutlak dari bilangan kompleks $z = x + iy$ dinyatakan dengan $|z|$ atau $|x + iy|$, dan diberikan dengan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

2.2. Himpunan

Definisi 4

Himpunan A disebut himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap anggota dari A menjadi anggota dari B atau $A \subset B$ jika dan hanya jika $(\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \in B$

Definisi 5

Himpunan yang tidak memuat satu elemenpun disebut himpunan kosong.

Definisi 6

Irisan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cap B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekaligus berada dalam A maupun B atau $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

Definisi 7

Gabungan dari himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan A atau B, jadi $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

2.3. Kombinatorik

Definisi 8

Jika n adalah bilangan bulat positif dan k suatu bilangan bulat sedemikian hingga $0 \leq k \leq n$, maka koefisian binomial $\binom{n}{k}$ didefinisikan dengan

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

dengan n ! = banyaknya urutan yang diberikan kepada n elemen tersebut.

atau n ! = 1 . 2 . 3 . ... (n-2)(n-1).n

2.4. Matriks dan determinant

Definisi 9

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan real atau kompleks) yang disajikan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom). Skalar-skalar itu disebut elemen matriks. Matriks diberi nama dengan huruf besar A, B, P, dan lain-lain. Secara lengkap ditulis matriks A = (a_{ij}), artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke i dan indeks j menyatakan kolom ke j dari elemen tersebut.

Contoh 1 :

$$\begin{array}{ll} \text{Matriks real } A = & \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 10 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris } 1 \\ \longrightarrow \text{baris } 2 \\ \longrightarrow \text{baris } 3 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \end{array} \\ \text{Kolom} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

Definisi 10

Apabila pada suatu matriks, banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom maka Matriks tersebut disebut matriks bujur sangkar. Jika banyaknya baris = banyaknya kolom = n, maka disebut matriks bujur sangkar ordo n.

Definisi 11

Harga determinant dari suatu matriks bujur sangkar A yaitu det (A) = $|A|$ adalah

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Dengan a_{ij} = elemen-elemen dari matriks A dimana indeks i menyatakan baris ke i dan indeks j menyatakan kolom ke j.

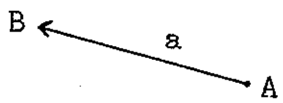
M_{ij} = Minor dari elemen a_{ij} yang diperoleh dengan jalan menghilangkan baris ke i dan kolom ke j dari det (A).

2.5. Ruang Linier

Definisi 12

Vektor adalah suatu potongan (ruas, segmen) garis yang mempunyai arah.

Gambar 2 :



Vektor pada gambar (2) ini, diberi nama a atau $\overline{AB}$, dimana potongan garis AB merupakan panjangnya dan arah vektor tersebut dari A ke B.

Definisi 13

Dipandang F suatu himpunan didefinisikan dua operasi yang disebut penjumlahan (+) dan perkalian (.). F merupakan field apabila terpenuhi :

1. F group abelian terhadap jumlah :
   a. Tertutup $(\forall\alpha, \beta \in F)(\exists\, !\gamma \in F)\ \alpha + \beta = \gamma$
   b. Assosiatif $(\forall\alpha,\beta,\gamma \in F)(\alpha+\beta) + \gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$
   c. Ada elemen nol $(\exists\ 0 \in F)(\forall\alpha \in F)\ 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$

d. Ada invers $(\forall\alpha \in F)$ $(\exists -\alpha \in F)$

$$(-\alpha) + \alpha = \alpha + (-\alpha) = 0$$

e. Komutatif $(\forall\alpha, \beta \in F)$ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

2. Terhadap pergandaan :

a. Tertutup $(\forall\alpha, \beta \in F)(\exists\, !\gamma \in F)$ $\alpha \,.\, \beta = \gamma$

b. Assosiatif $(\forall\alpha,\beta,\gamma \in F)(\alpha.\beta) \,.\, \gamma = \alpha \,.\, (\beta.\gamma)$

c. Ada elemen satuan $(\exists\; 1 \in F)(\forall\alpha \in F)$ $1 \,.\, \alpha = \alpha \,.\, 1 = \alpha$

d. Komutatif $(\forall\alpha, \beta \in F)$ $\alpha \,.\, \beta = \beta \,.\, \alpha$

e. Ada invers $(\forall\alpha \neq 0 \in F)(\exists\alpha^{-1} \in F)$

$$\alpha\, \alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$$

3. Terhadap Distributif

a. $(\forall\alpha, \beta, \gamma \in F)$ $\alpha \,.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$

b. $(\forall\alpha, \beta, \gamma \in F)$ $(\alpha + \beta) \,.\, \gamma = \alpha.\gamma + \beta.\gamma$

Catatan 1 :

Elemen-elemen dari suatu field disebut skalar.

Definisi 14

Dipandang suatu himpunan X dan field F. Didefinisikan operasi penjumlahan terhadap elemen - elemen X dan perkalian elemen-elemen X dengan elemen F. Maka X disebut ruang linier diatas field F dari semua bilangan-bilangan kompleks apabila terpenuhi :

1. X group abelian terhadap jumlah :

a. Tertutup $(\forall f, g \in X)(\exists!\, h \in X)$ $f + g = h$

b. Assosiatif $(\forall f,g,h \in X)$ $(f + g) + h = f + (g + h)$

c. Ada vektor nol $(\exists 0 \in X)(\forall f \in X)$ $0 + f = f + 0 = f$

d. Ada invers $(\forall\, f \in X)$ $(\exists - f \in X)$

$$(-f) + f = f + (-f) = 0$$

e. Komutatif $(\forall f, g \in X)$ $f + g = g + f$

2. Pergandaan dengan skalar adalah tertutup :

a. $1 \, . \, f = f$ untuk $\forall$ $f \in X$ dan $1 \in F$

b. $\alpha f \in X$ untuk $\forall$ $f \in X$ dan $\alpha \in F$

c. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ untuk $\forall\alpha, \beta \in F$ dan $f \in X$

3. Terhadap distributif :

a. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ untuk $\forall\alpha \in F$ daan $f, g \in X$

b. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ untuk $\forall\alpha$, $\beta \in F$ dan $f \in X$

<u>Catatan 2</u>

Elemen-elemen dari suatu ruang linier disebut vektor.

<u>Contoh 2 :</u>

Dipandang himpunan X dari vektor dengan bentuk $f = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a_i = bilangan kompleks dan $g = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, b_i = bilangan kompleks.

Didefinisikan $\alpha f = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ dimana α sembarang bilangan kompleks, dan $f + g = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.

Ditunjukkan bahwa himpunan X merupakan ruang linier sebagai berikut :

1. Terhadap penjumlahan :

a. Tertutup, sebab :

$$f + g = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$= (c_1, c_2, \ldots, c_n) = h \in X$$

b. Assosiatif dipenuhi, sebab :

$$(f + g) + h = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, c_2, \ldots c_n)$$
$$= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots,$$

$a_n + (b_n + c_n))$

$= (a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n) + (b_1 + c_1,\ b_2 + c_2,$

$\ldots,\ b_n + c_n)$

$= f + (g + h)$

c. Ada vektor nol, yaitu $0 = (\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$

Sebab $0 + f = (\ 0,\ 0,\ \ldots, 0) + (a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_n)$

$= (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n) = f$

d. Setiap $f \in X$ pasti mempunyai invers terhadap penjumlahan, yaitu : $-f \in X$ sebab :

$-f + f = (-a_1, -a_2,\ \ldots,\ -a_n) + (a_1, a_2,\ \ldots, a_n)$

$= (\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = 0$

e. Komutatif dipenuhi, sebab :

$f + g = (a_1 + b_1, a_2 + b_2,\ \ldots\ , a_n + b_n)$

$= (b_1 + a_1,\ b_2 + a_2,\ \ldots,\ b_n + a_n)$

$= g + f$

2. Terhadap pergandaan dengan skalar adalah tertutup :

a. $1.f = 1.(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = f$

Untuk $\forall f \in X$ dan $1 \in F$

b. $\alpha f = \alpha(a_1, a_2,\ \ldots, a_n) = (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \ldots,\ \alpha a_n)$

$= (d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n) \in X$ untuk $\forall f \in X$ dan $\alpha \in F$

c. $\alpha(\beta f) = \alpha(\beta a_1,\ \beta a_2, \ldots,\ \beta a_n) = (\alpha\beta a_1,\ \alpha\beta a_2,\ \ldots,$ $\alpha\beta a_n)$

$= (\alpha\beta)\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n) = (\alpha\beta)\ f$

untuk $\forall\alpha,\ \beta \in F$ dan $f \in X$

3. Terhadap distributif dipenuhi, sebab :

a. $\alpha(\ f + g) = \alpha\ (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n)$

$= (\alpha a_1 + \alpha b_1,\ \alpha a_2 + \alpha b_2,\ \ldots\ ,\ \alpha a_n + \alpha b_n)$

$= (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \ldots,\ \alpha a_n) + (\alpha b_1,\ \alpha b_2, \ldots, \alpha b_n)$

$= \alpha f + \alpha g$ untuk $\forall\alpha \in F$ dan $f, g \in X$.

b. $(\alpha + \beta) f = (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \ldots, \alpha a_n + \beta a_n)$

$= (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \beta a_2, \ldots, \beta a_n)$

$= \alpha f + \beta f$ untuk $\forall\alpha, \beta \in F$ dan $f \in X$

2.6. Ruang Metrik

Definisi 15 :

Nilai mutlak dari bilangan real x adalah

$|X| = \sqrt{X^2}$ dengan $x \in R$.

Definisi 16 :

Untuk setiap bilangan bulat positif n, himpunan E_n adalah himpunan semua kelompok n buah bilangan real berurutan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilangan-bilangan real yang dinamakan koordinat X. Elemen-lemen E_n dinamakan titik, atau vektor terutama untuk $n > 1$.

Didefinisikan operasi-operasi berikut :

1. Operasi penjumlahan

   Jika $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ dan $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ anggota E_n, maka $X + Y$ didalam E_n didefinisikan sebagai

   $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

2. Perkalian dengan skalar

   Jika a suatu bilangan real (skalar) maka aX didefinisikan $aX = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

Tampak bahwa baik X + Y maupun aX merupakan kelompok n bilangan real, jadi keduannya merupakan vektor anggota E_n.

Definisi 17

Pada sebarang vektor X dan Y didefinisikan apa yang disebut inner product X.Y yang merupakan suatu bilangan real, jadi suatu skalar, yaitu

$$X.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \ y_i$$

Definisi 18 :

Norma suatu vektor $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ didalam E_n yaitu $\|X\|$ didefinisikan sebagai

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Definisi 19 :

Himpunan E_n dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar (definisi 16) dan dilengkapi dengan inner product (definisi 17) dan norma (definisi 18) membentuk suatu struktur yang dinamakan ruang Euclidian real dimensi n.

Contoh 3 :

Buktikan bahwa untuk X, Y , Z angota E_n dan a,b sutau bilangan real, maka :

(i) (aX). (bY) = (ab) (X.Y)

(ii) X.(Y + Z) = (X.Y) + (X.Z)

(iii) (X + Y). (X + Y) = X.X + 2(X.Y) + Y.Y

Penjelasan :

(i) $(aX).(bY) = \sum_{i=1}^{n} ax_i . by_i = ab \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$= ab\ (X.Y)$ menurut definisi 17

(ii) $X.(Y + Z) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$

$= X.Y + X.Z$

(iii) $(X + Y).(X + Y) = (X + Y).X + (X + Y).Y$
Menurut (ii)

$= X.(X + Y) + Y.(X + Y)$

$= X.X + X.Y + Y.X + Y.Y$

$= X.X + 2X.Y + Y.Y$

Sebab $X.Y = Y.X$

Definisi 20 :

Untuk a dan b bilangan real dan $a < b$ didefinisikan notasi :

1. $[a,b] = \{ x | a \leq x \leq b \}$ yaitu suatu interval tertutup
2. $(a,b) = \{ x | a < x < b \}$ yaitu suatu interval terbuka.

Definisi 21 : Ruang metrik

Diberikan himpunan X yang tidak kosong, yang elemen-elemennya disebut titik. Didefinisikan fungsi bernilai real tidak negatif d pada X x X (jadi d fungsi dua variabel dengan variabel-variabel pada X) sebagai berikut. Untuk sebarang titik x dan y didalam X harus dipenuhi :

(a) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ Jika dan hanya jika $x = y$

(b) $d(x,y) = d(y,x)$

(c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk sebarang titik z anggota X.

Fungsi d yang memenuhi ketiga sifat di atas dinamai fungsi jarak atau metrik pada X. Nilai $d(x,y)$ dinamakan jarak dari x ke y. Himpunan X yang dilengkapi fungsi jarak disebut ruang metrik.

Contoh 4 :

(i) Buktikan bahwa ruang Euclidian real dimensi n adalah suatu ruang metrik dengan metrik yang didefinisikan oleh norma :

Penjelasan :

Dimisalkan $X \in E_n$, $Y \in E_n$ dan $d(X,Y) = \| X-Y \|$

(a) Jika $X \neq Y$ maka $d(X,Y) = \| X-Y \|$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} > 0$$

Jika $Y = X$ maka $d(X,X) = \|X-X\| = \|0\| = 0$

(b) $d(X,Y) = \|X-Y\| = \|Y-X\| = d(Y,X)$

(c) Misalkan $X-Y = (X-Z) + (Z-Y)$ maka :

$\|(X-Z) + (Z-Y)\|^2$

$= [(X-Z) + (Z-Y)][(X-Z) + (Z-Y)]$

$= (X-Z)(X-Z) + 2(X-Z)(Z-Y) + (Z-Y)(Z-Y)$

menurut contoh 3(iii)

$\leq \|X-Z\|^2 + 2\,|(X-Z)(Z-Y)| + \|Z-Y\|^2$

$\leq \|X-Z\|^2 + 2\,\|X-Z\|\|Z-Y\| + \|Z-Y\|^2$

$= \left(\|X-Z\| + \|Z-Y\|\right)^2$

Karena norma adalah bilangan tidak negatif maka :

$\|(X-Z) + (Z-Y)\| \leq \|X-Z\| + \|Z-Y\|$

atau

$\| X-Y\| \leq \|X-Z\| + \|Z-Y\|$

Jadi terbukti bahwa E_n adalah ruang metrik.

(ii) Diberikan himpunan tak berhingga X

Didefinisikan fungsi d pada $X \times X$ dengan :

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \neq y \\ 0 \text{ jika } x = y \end{cases}$$

Sifat (a) dan (b) dari definisi (21) jelas dipenuhi oleh d, akan dibuktikan bahwa (c) juga dipenuhi. Jika $x \neq y$ maka untuk sebarang titik z anggota X, paling sedikit satu dari hubungan $x \neq z$ dan $y \neq z$ adalah benar. Jadi $d(x,z) + d(z,y)$ bernilai satu atau dua sehingga (c) berlaku. Jika $x = y$, maka untuk sebarang z anggota X berlaku $x = y = z$ atau $x = y \neq z$, jadi $d(x,z) + d(z,y) = 0$ atau 2, sehingga syarat (c) juga dipenuhi.

Jadi d adalah suatu fungsi jarak pada X, dan X menjadi suatu ruang metrik dengan metrik d.

Catatan 3:

Himpunan semua bilangan asli dinyatakan dengan N. Jadi $N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$

Definisi 22 :

Jika p sebarang titik didalam ruang metrik (X,d), dan $r > 0$, maka himpunan

$$N_r(p) = \{ x \in X \mid d(p,x) < r \}$$

dinamakan daerah sekitar titik p dengan radius r, dan disingkat dengan sekitar titik p dengan radius r. Titik p dinamakan pusat sekitar $N_r(p)$

Contoh 5 :

Dalam R sekitar titik p dengan radius r adalah interval terbuka yang pusatnya p dan radiusnya r. Dalam E_2 sekitar suatu titik merupakan suatu daerah lingkaran tidak termasuk titik-titik keliling lingkarannya, sedang pada E_3 akan berbetuk suatu bola tidak termasuk permukaannya. Secara umum sekitar dalam ruang Euclidian real dimensi n atau E_n adalah :

$$N_r(p) = \{ X \in E_n \mid \| p - X \| < r \}$$

yang akan dinamakan bola terbuka yang berpusat di p dan radiusnya r.

Definisi 23 :

Titik $p \in X$ disebut titik limit himpunan A, yaitu himpunan bagian dari X, bila setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in A$ dan $q \neq p$

Contoh 6 :

Didalam R ditinjau himpunan A yaitu interval terbuka (a,b). Jelas bahwa titik a, titik b dan semua titik p diantara a dan b merupakan titik limit A. Tetapi titik c diluar A bukan titik limit A, sebab jika $r > 0$ diambil nilai yang terkecil diantara nilai $|c - a|$ dan $|c - b|$ maka $N_r(c) = (c - r, c + r)$ tidak memuat satu titikpun anggota A.

Definisi 24 :

Diberikan ruang metrik (X,d). Semua titik dan himpunan yang disebut dalam definisi berikut adalah titik didalam X dan himpunan bagian dari X.

(a) Titik p disebut suatu titik interior himpunan A jika terdapat suatu sekitar dari p yang merupakan himpunan bagian dari A.

(b) Himpunan A disebut himpunan terbuka jika setiap anggotannya merupakan titik interior himpunan A.

(c) Himpunan A disebut himpunan tertutup jika semua titik limitnya termuat didalam A.

Contoh 7 :

Didalam ruang metrik (X,d), maka :

(i) Himpunan A = (a,b) adalah terbuka. Sebab jika $x \in A$, dan r = min {|x-a|,|x-b|}, maka $N_r(x)$ = (x - r, x + r) adalah himpunan bagian dari A, jadi x titik interior A. Jadi semua anggota A adalah titik interior A, sehingga A merupakan himpunan terbuka. A tidak tertutup sebab ada titik limit A yang bukan anggota A, yaitu a dan b.

(ii) Himpunan F = [a,b] adalah tertutup, sebab menurut contoh 6, setiap titik $c \notin F$ bukan titik limit F, jadi F pasti memuat semua titik limitnya. F tidak terbuka sebab ada anggota F misalnya a, yang bukan titik interior F. Titik a bukan titik interior F, karena $N_r(a)$ = (a-r , a+r) bukan himpuan bagian dari F untuk semua r > 0.

Definisi 25 :

Komplemen himpunan A, yaitu A^c adalah himpunan titik - titik $x \in X$ dan $x \notin A$.

Theorema 1 :

Himpunan A tertutup jika dan hanya jika A^c terbuka.

Bukti :

($\Leftarrow$) Lebih dahulu diandaikan A^c terbuka menurut definisi 25.

Dimisalkan x sebarang titik limit A. Jadi setiap N_r (x) memuat tak berhingga banyak titik-titik anggota A, sehingga tidak ada sekitar dari x yang menjadi himpunan bagian dari A^c. Karena itu x bukan titik interior A^c. Karena diketahui A^c terbuka, ini berarti x bukan anggota A^c, atau $x \in A$.

Jadi, jika x titik limit A maka $x \in A$. Terbukti bahwa A tertutup.

($\Rightarrow$)Selanjutnya diandaikan A tertutup.

Diambil sebarang titik $x \in A^c$. Karena $x \notin A$ dan A tertutup, maka x bukan titik limit A.

Jadi terdapatlah $r > 0$ sehingga

$N_r(X) \cap A$ = himpunan kosong.

Dengan demikian $N_r(X) \subset A^c$, sehingga x titik interior A^c.

Jadi, jika $x \in A^c$ maka x titik interior A^c

Terbukti bahwa A^c terbuka.

Definisi 26 :

Himpunan A dalam ruang metrik (X,d) disebut terbatas jika terdapat titik $p \in X$ dan bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $q \in A$ maka jarak $d(p,q) \leq M$.

Definisi 27 :

Jika $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maka himpunan A didalam ruang Euclidian real dimensi n,

$$A = \{X : a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ a_2 \leq x_2 \leq b_2, \ldots,\ a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

dinamakan suatu sel - n

Definisi 28 :

Dengan selimut terbuka (open cover) suatu himpunan A didalam ruang metrik (X, d) dimaksudkan suatu keluarga himpunan-himpunan terbuka $\{G_\alpha\}$ yang merupakan himpunan bagian X sedemikian hingga

$$A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha \ ;$$

yang menunjukkan bahwa untuk setiap $p \in A$ terdapat suatu α sehingga $p \in G_\alpha$

Definisi 29 :

Suatu himpunan bagian S dalam ruang metrik (X,d) disebut kompak jika setiap selimut terbuka untuk S memuat selimut bagian berhingga yang masih menyelimuti S. Jelasnya apabila keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha)$ suatu selimut terbuka untuk himpunan kompak S, maka dapat dicari indeks $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang cacahnya berhingga sehingga

$$S \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$$

Contoh 8 :

Buktikan bahwa A = { 0,1, 1/2, 1/3, ...} didalam himpunan bilangan real R adalah kompak.

Penjelasan :

Misalkan $\{G_\alpha\}$ sebarang selimut terbuka untuk A. Titik $0 \in A$, jadi terdapatlah indeks α_o sehingga $0 \in G_\alpha$. Karena 0 titik limit A maka terdapat $r > 0$ sehingga $0 \in (-r, r) \subset G_{\alpha_o}$. Jadi G_{α_o} memuat tak berhingga banyak titik-titik anggota A.

Terdapatlah bilangan asli m sehingga,

$\frac{1}{m-1} < r \le \frac{1}{m}$. jadi semua anggota A didalam G_{α_0} kecuali mungkin titik-titik 1, 1/2, ..., 1/m yang diluar G_{α_0}. Ambilah satu himpunan saja yang memuat masing-masing titik ini, yakni $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_m}$. Jadi $\{G_{\alpha_i} : 0 \le i \le m\}$ selimut bagian berhingga yang masih menyelimuti A, dan terbukti A kompak.

Theorema 2 :

Jika S himpunan bagian kompak sebarang ruang metrik, maka S tertutup dan terbatas

Bukti :

Dimisalkan S himpunan bagian kompak ruang metrik (X,d).

(a) S akan dibuktikan tertutup dengan membuktikan S^c terbuka, menurut theorema 1.

Diandaikan $p \in X$ dan $p \in S^c$. Untuk setiap titik $x \in S$ dibuat sekitar V_x dengan pusat x dan sekitar W_x dengan pusat p yang radiusnya kurang dari 1/2 d (x,p).

Jadi $V_x \cap W_x = \{\ \}$ (atau himpunan kosong) untuk semua $x \in S$. Jelas bahwa keluarga $\{V_x : x \in S\}$ adalah selimut terbuka untuk S. Karena S kompak maka dapat ditentukan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ anggota S sehingga :

$$S \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \ldots \cup V_{x_n} = V$$

Diperhatikan himpunan $W = W_{x_1} \cap W_{x_2} \cap \ldots \cap W_{x_n}$

Himpunan W merupakan suatu sekitaar titik p dan himpunan bagian semua W_{x_i} untuk i = 1, 2, ..., n. Jadi $W \cap V_{x_i}$ = Himpunan kosong untuk semua i = 1,2, ..., n sehingga $W \cap V$ = himpunan kosong.

Dengan demikian $W \cap S$ = himpunan kosong atau $W \subset S^c$. Terbukti p titik interior S^c dan S^c terbuka. Jadi S tertutup.

(b) Untuk setiap $x \in S$ dibentuk sekitar $N_1(x)$ dengan pusat x dan radius 1. Keluarga $\{N_1(x) : x \in S\}$ merupakan selimut terbuka untuk S. Karena S kompak maka terdapat $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$ sehingga

$$S \subset N_1(X_1) \cup \ldots \cup N_1(X_m)$$

Ditentukan bilangan

$M - 1 = \text{maksimum } \{ d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), \ldots, d(x_1, x_m)\}$.

Untuk sebarang $y \in S$ terdapat x_p dengan $1 \leq p \leq m$ sehingga $y \in N_1(X_p)$.

Jadi

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x_p) + d(x_p, y) \leq (M-1) + d(x_p, y) < M$$

Terbukti untuk semua $y \in S$ berlaku

$d(x_1, y) < M$, jadi S terbatas.

<u>Theorema 3</u> :

Didalam sebarang ruang metrik, himpunan kompak mempunyai sifat Bolzano-Weierstrass, yaitu setiap himpunan bagian tak berhingga mempunyai titik limit didalam himpunan itu.

<u>Bukti</u> :

Diberikan himpunan kompak S didalam ruang metrik (X,d).

Kalau S berhingga, maka pernyataan " Jika A himpunan bagian tak berhingga S maka A mempunyai titik limit didalam S", adalah pernyataan yang benar. Sebab jika pernyataan itu ditulis sebagai $p \Rightarrow q$, pernyataan p selalu salah. Jadi S mempunyai sifat Bolzano Weierstrass.

Sekarang ditinjau keadaan S tak berhingga. Diandaikan S tidak mempunyai sifat Bolzano Weierstrass. Jadi terdapat suatu himpunan tak berhingga $A \subset S$ dan A tidak mempunyai titik limit didalam S. Dengan demikian setiap titik anggota S bukan titik limit A, dan setiap titik anggota A adalah titik terasing untuk A. Jadi untuk setiap $x \in A$ dapat dibuat sekitar $V(x)$ sehingga $V(x) \cap A = \{x\}$ dan untuk setiap $y \in S - A$ dapat dibuat sekitar $W(y)$ dan $W(y) \cap A$ = himpunan kosong. Karena A tak berhingga, maka keluarga $\{V(x)\} \cup \{W(y)\}$ merupakan keluarga tak berhingga himpunan-himpunan terbuka yang menyelimuti S. Tetapi selimut terbuka ini tidak memuat selimut bagian berhingga, sebab dengan menghilangkan satu $V(x)$ saja titik $x \in A$ tidak lagi terselimuti. Hal ini kontradiksi dengan S adalah himpunan kompak. Terbukti bahwa S mempunyai sifat Bolzano Weierstrass.

<u>Theorema 4</u> :

Untuk n bulat positif, didalam E_n sel - n adalah kompak.

<u>Bukti</u> :

Dimisalkan I adalah suatu sel - n yang merupakan himpunan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dengan $a_j \leq x_j \leq b_j$. Jika

$$h = \left[\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2\right]^{1/2}$$

maka untuk semua X dan Z didalam I berlaku $\| X-Z \| \leq h$

Diandaikan I tidak kompak, maka terdapat suatu selimut terbuka $\{G_\alpha\}$ untuk I yang tidak memuat selimut bagian berhingga untuk I. Diambil bilangan real $c_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j)$, dengan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Maka terbentuklah n interval tertutup $[a_j, c_j]$ dan n interval tertutup $[c_j, b_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Interval - interval ini membentuk 2^n sel-n, dinamakan $V_i(1 \le i \le 2^n)$ yang gabungannya sama dengan I. Paling sedikit satu himpunan V_i tidak dapat diselimuti oleh keluarga bagian berhingga dari $\{G_\alpha\}$, himpunan V_i ini dinamakan I_1.

Juga I_1 ini dibagi menjadi n interval tertutup $[a_{j1}, c_{j1}]$dan n interval tertutup $[c_{j1}, b_{j1}]$ $j = 1,2,\ldots,n$. Interval-interval ini membentuk 2^n sel-n, dinamakan V_{i1} $(1 \le i \le 2^n)$ yang gabungannnya sama dengan I_1. Paling sedikit satu himpunan V_{i1} tidak dapatdiselimuti oleh keluarga - bagian berhingga dari $\{G_\alpha\}$, himpunan V_{i1} ini dinamakan I_2. Demikian proses ini dikerjakan terus menerus sehingga diperoleh barisan interval tertutup

$\{I_m\}$ dengan $I_m = \{ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_{jm} \le x_j \le b_{jm}, 1 \le j \le n \}$ dari sel-sel-n dengan sifat :

(a). $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots.$

(b). I_m tidak dapat diselimuti oleh keluarga-bagian berhingga dari $\{G_\alpha\}$.

(c). Jika X dan Z di dalam I_m maka

$$\| X - Z \| \le \frac{h}{2^m}$$

Untuk j tertentu ($1 \leq j \leq n$) terdapat barisan interval tertutup $\{ I_{jm} \}$ dengan $I_{jm} = \{ x : a_{jm} \leq x \leq b_{jm} \}$, $m = 1,2,3,...$

Menurut (a) terdapatlah x_j^* sehingga $a_{jm} \leq x_j^* \leq b_{jm}$ untuk semua $m = 1,2,3, ...$

Jadi $x_j^* \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_{jm}$. Karena ini berlaku juga untuk semua $j = 1,2,...,n$, maka akan diperoleh

$X^* = (x_1^* , x_2^* , x_3^* , ..., x_n^*)$ sehingga

$X^* \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$.

Karena $X^* \in \{ X = (x_1 , x_2 ,..., x_n) : a_j \leq x_j \leq b_j , 1 \leq j \leq n \}$

maka terdapatlah suatu α sehingga $X^* \in G_\alpha$.

Karena G_α terbuka maka terdapatlah $r > 0$ sehingga interval terbuka ($X^* - r, X^* + r) \subset G$. Maka dapat dipilih bilangan asli m cukup besar sehingga $\frac{h}{2^m} < r$.

Menurut (C) ini berarti bahwa $I_m \subset G$, sebab $I_m \subset (X^* - r , X^* + r) \subset G$.

Tetapi jika demikian berarti bahwa I_m dapat diselimuti oleh satu saja himpunan terbuka anggota $\{ G_\alpha \}$. Terdapatlah kontradiksi dengan (b). Jadi pengandaian di atas salah, dan I harus kompak.

<u>Theorema 5 :</u>

Di dalam ruang Euclidian E_n, setiap himpunan tak berhingga yang terbatas mempunyai titik limit di dalam E_n.

Bukti :

Dimisalkan A himpunan tak berhingga yang terbatas di dalam E_n. Karena A terbatas maka A himpunan - bagian suatu sel-n menurut definisi 27. Karena sel-n adalah kompak menurut theorema 4, maka A merupakan himpunan bagian tak berhingga suatu himpunan kompak. Himpunan kompak mempunyai sifat Bolzano-Wierstrass. Jadi A mempunyai titik limit di dalam sel-n yang memuatnya, jadi mempunyai titik limit di dalam E_n.

Definisi 30 :

Suatu barisan $\{ f_n \}$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $f \in X$ dengan sifat sebagai berikut : Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan bulat positif $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq N(\varepsilon)$ ber laku $d(f_n, f) < \varepsilon$.
Di dalam hal ini juga dikatakan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen ke f, atau f adalah limit barisan $\{f_n\}$, dan dituliskan :

$$f_n \rightarrow f \quad \text{atau} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

Definisi 31 :

Barisan $\{f_n\}$ di dalam E_n adalah konvergen jika terdapat titik $f \in E_n$ sedemikian hingga

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in N)(\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \| f_n - f \| < \varepsilon)$$

Contoh 9 :

Buktikan bahwa barisan bilangan real $\{f_n\}$ dengan $f_n = 1$ adalah konvergen . Tentukan limit barisan itu.

Penjelasan :

Karena $f_n = 1$ untuk semua n, maka $| f_n - 1 | = 0$ untuk semua n. Jadi , jika diberikan $\varepsilon > 0$ untuk $N(\varepsilon)$ bulat positif yang manapun pasti berlaku :

$$(\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow (| f_n - 1 | < \varepsilon)$$

Terbukti $\{ f_n \}$ konvergen dan $\lim_{n \to \infty} f_n = 1$

Definisi 32 :

Suatu barisan $\{f_n\}$ didalam E_n dikatakan terbatas jika terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $\| f_n \| \leq M$ untuk setiap $n \in N$.

Definisi 33 :

Diberikan suatu barisan $\{f_n\}$ di dalam ruang metrik (X,d). Dibentuk barisan bilangan asli $\{ n_k : k \in N \}$ sedemikian hingga $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots.$, maka barisan $\{ f_{n_k} : k \in N \}$ dinamakan barisan-bagian dari barisan $\{f_n\}$. Jika $\{ f_{n_k} \}$ konvergen, maka limitnya disebut limit barisan-bagian dari barisan $\{f_n\}$.

Theorema 6 :

Barisan $\{ f_n \}$ konvergen ke-f jika dan hanya jika setiap barisan-bagian dari $\{ f_n \}$ juga konvergen ke f.

Bukti :

$(\Longrightarrow)$ Misalkan $\{ f_n \}$ adalah barisan yang konvergen ke f dan $\{ f_{n_k} \}$ suatu barisan bagian dari $\{ f_n \}$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N(\varepsilon)$ sehingga untuk semua $n \geq N(\varepsilon)$ berlaku $d(f_n, f) < \varepsilon$. Mudah diketahui bahwa dalam barisan bilangan asli $\{ n_k \}$ dari indeks-indeks barisan bagian di atas berlaku hubungan $n_k \geq k$ untuk semua $k = 1, 2, \ldots$ Jadi untuk semua $k \geq N(\varepsilon)$ berlaku $n_k \geq N(\varepsilon)$ sehingga $d(f_{n_k}, f) < \varepsilon$.

Dengan demikian barisan - bagian $\{ f_{n_k} : k \in N \}$ mempunyai sifat bahwa untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N(\varepsilon) \in N$ sehingga untuk semua $k \geq N(\varepsilon)$ berlaku $d(f_{n_k}, f) < \varepsilon$.

Ini berarti bahwa $f_{n_k} \to f$ untuk $k \to \infty$ atau

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f.$$

$(\Leftarrow)$

Jika setiap barisan bagian dari $\{ f_n \}$ adalah konvergen ke f, maka $\{f_n\}$ sebagai salah satu barisan bagian tentu juga konvergen ke f.

Theorema 7 :

Jika A suatu himpunan - bagian ruang metrik (X,d) dan p titik limit A, maka terdapatlah suatu barisan $\{p_n\}$ di dalam A sedemikian hingga $\lim_{n \to \infty} p_n = p$

Bukti :

Kerana p titik limit A, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu titik $q \in A$ sedemikian hingga $d(p,q) < \varepsilon$.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$, maka terdapat suatu titik anggota A, maka terdapat suatu titik anggota A, dinamakan p_n sehingga $d(p_n, p) < \frac{1}{n}$.

Jika diambil untuk setiap $n \in N$, maka terbentuklah barisan $\{ p_n \}$ dengan $p_n \in A$ dan $d(p_n, p) < \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in N$.

Inilah barisan yang dicari. Sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $N(\varepsilon) \in N$ sehingga $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Jadi untuk semua $n \geq N(\varepsilon)$ berlaku

$$d(p_n, p) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon \text{ . Jadi } p_n \to p.$$

Theorema 8 : Theorema Bolzano - Weierstrass

Setiap barisan yang terbatas di dalam E_n memuat suatu barisan bagian yang konvergen.

Bukti :

Dimisalkan daerah jangkau barisan $g(N)$ sebagai himpunan nilai-nilai $g(x)$ untuk semua $x \in N$, dimana N adalah himpunan semua bilangan bulat positif. Jadi barisan g disajikan dengan $\{ f_m \}$ dan daerah jangkaunya $\{ f_m \} = g(N)$.

Dimisalkan $\{ f_m \}$suatu barisan terbatas di dalam E_n. Jadi daerah jangkau $A = \{ f_m \}$ merupakan himpunan terbatas di dalam E_n. Dengan demikian terdapatlah suatu sel-n, dinamakan I sehingga $A \subset I$.

Dibedakan untuk daerah jangkau $A = \{ f_m \}$ berhingga dan $A = \{ f_m \}$ tak berhingga.

(a). Dimisalkan daerah jangkau A berhingga. Maka paling sedikit ada satu elemen $f \in A$, sehingga $f = f_m$ untuk tak berhingga banyak indeks m, sebab f_m merupakan fungsi dengan domain himpunan tak berhingga N. Dengan demikian dapat dibentuk suatu barisan $\{ m_k : k \in N \}$

Sehingga $m_1 < m_2 < m_3 \ldots$ dan

$f_{m_1} = f_{m_2} = f_{m_3} \ldots = f$

.

.

Jadi diperoleh suatu barisan - bagian yang konvergen ke $f \in A \subset E_n$.

(b). Sekarang dimisalkan A tak berhingga . Karena diketahui bahwa A adalah terbatas di dalam E_n, maka menurut theorema 5, A mempunyai titik limit p di dalam E_n. Selanjutnya berdasarkan theorema 7 dapat dibentuk suatu barisan di dalam A yang konvergen ke p.

Dipilih m_1 sehingga $\| f_{m_1} - p \| < 1$. Selanjutnya dipilih m_2 sehingga $m_1 < m_2$ dan $\| f_{m_2} - p \| < \frac{1}{2}$

Setelah dipilih $m_1 < m_2 < \ldots < m_{k-1}$ maka m_k dipilih sehingga $m_k > m_{k-1}$ dan

$\| f_{m_k} - p \| < \frac{1}{k}$

Terbentuklah barisan-bagian $\{ f_{m_k} \}$ yang konvergen ke p untuk $k \to \infty$. Sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, dapat dicari $N(\varepsilon)$ sehingga untuk semua $k \geq N(\varepsilon)$ berlaku $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Jadi

$\| f_{m_k} - p \| < \frac{1}{k} < \varepsilon$ untuk semua $k \geq N(\varepsilon)$ dan dengan demikian $\lim\limits_{k \to \infty} f_{m_k} = p$

Sehingga barisan $\{ f_m \}$ memuat suatu barisan-bagian yang konvergen.

Definisi 34 :

Barisan $\{ f_n \}$ di dalam ruang metrik (X,d) dinamakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif $N(\varepsilon)$ sehingga untuk semua $m \geq N(\varepsilon)$ dan semua $n \geq N(\varepsilon)$ berlaku :

$d (f_m, f_n) < \varepsilon$.

Contoh 10 :

Ditinjau barisan $\{ f_n = \frac{1}{n} \}$ di dalam ruang metrik dengan metrik biasa $d(x,y) = | x - y |$.

Barisan ini adalah barisan Cauchy. Sebab, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $N(\varepsilon)$ sehingga $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Untuk semua m dan n yang $\geq N(\varepsilon)$ (diambil $m \leq n$) berlaku : $| f_m - f_n | < f_m = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Definisi 35 :

Suatu ruang metrik dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik itu adalah barisan konvergen.

Definisi 36 :

Diberikan fungsi f dari metrik (X,d_1) ke dalam (Y,d_2). Fungsi f dikatakan memenuhi syarat Lipschitz jika ada suatu konstanta $B > 0$ sedemikian hingga :

$$d_2 (f(p), f(q)) \leq B \; d_1(p,q)$$

Untuk semua p dan q di dalam X.

2.7. Pemetaan

Definisi 37 :

Suatu pemetaan (atau fungsi) $f : A \to B$ dari suatu himpunan A ke suatu himpunan B (A sebagai daerah sumber (domain) dan B sebagai daerah kawan (kodomain)) adalah suatu aturan yang mana setiap anggota dari A menentukan dengan tunggal satu anggota dalam B.

Definisi 38 :

Suatu pemetaan $f : A \to B$ adalah dikatakan 1 - 1 atau injektif jika $a \neq a_1$, di dalam A berarti bahwa $f(a_1) \neq f(a)$ di dalam B (atau ekivalennya $f(a) = f(a_1)$ berarti bahwa $a = a_1$) .

Definisi 39 :

Pada pemetaan (atau fungsi) $f : A \to B$ dengan A dibawa ke $f(A)$ maka $f(A)$ disebut bayangan dari A oleh f.

Definisi 40 :

Suatu pemetaan $f : A \to B$ adalah dikatakan onto atau surjektif jika untuk setiap $b \in B$ maka ada sekurang-kurangnya satu $a \in A$ sedemikian hingga $f(a) = b$ (yaitu bayangan $f(A) = B$ dan tidak hanya $f(A) \subset B$).

Definisi 41 :

Suatu pemetaan $f : A \to B$ adalah dikatakan identitas jika $B = A$ dan $f(a) = a$ untuk setiap $a \in A$.

Definisi 42 : Pemetaan (fungsi) kontinu

Diberikan ruang metrik (X,d_1) dan (Y, d_2), $A \subset X$, $p \in A$ dan f fungsi dari A ke dalam Y. Fungsi f dikatakan kontinu dititik p, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga untuk semua $x \in A$ dan $d_1(x,p) < \delta$ berlaku $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

2.8. Pengertian Diferensial dan Integral .

Definisi 43 :

Diferensial $Y = f(x)$ terhadap X adalah jika

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dapat ditulis

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Contoh 11 :

Diferensial dari fungsi $y = 2x^2+3x + 1$ terhadap X adalah $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$

Definisi 44 :

Misalkan fungsi $Z = f(x,y)$ jika y dipandang sebagai suatu konstanta maka diferensial parsial $Z = f(x,y)$ terhadap X adalah :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Jika X dipandang sebagai suatu konstanta maka diferensial parsial $Z = f(x,y)$ terhadap Y adalah

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Definisi 45 :

Jika fungsi $F(x,y)$ dan $G(x,y)$ adalah dapat dideferensialkan di dalam suatu daerah (region), untuk determinan fungsional tingkat dua maka :

$$D = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial G}{\partial x}$$

adalah disebut Jacobian dari $F(x,y)$ dan $G(x,y)$ terhadap x dan y.

Contoh 12 :

Misalkan fungsi $F(x,y) = XY + X^2$ dan $G(x,y) = XY + Y^2$.

Carilah Jacobian dari F dan G terhadap X dan Y.

Penyelesaian :

Karena $F(x,y) = XY + X^2$ dan $G(x,y) = XY + Y^2$.

Maka :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = Y + 2X \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = Y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = X \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = X + 2Y$$

Sehingga :

$$D = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} Y + 2X & X \\ Y & X + 2Y \end{vmatrix} = 2(X + Y)^2$$

Jadi Jacobian dari F dan G terhadap X dan Y adalah $2(X + Y)^2$.

Definisi 46 :

Misalkan f(x) adalah fungsi kontinu pada suatu interval, maka fungsi F(x) disebut anti diferensial atau integral f(x) pada interval $X = [\ x_i,\ x_j\ ]$. Dapat ditulis :

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

jika $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Secara umum :

$\int X^n\,dx = \dfrac{1}{n+1} X^{n+1} + C$ dengan $n \neq -1$ dan C konstanta sebarang.

Contoh 13 :

Integral dari fungsi $f(x) = 4x + 3$ adalah :

$$\int f(x)\,dx = \int (4x + 3)\,dx = 2x^2 + 3x + C .$$

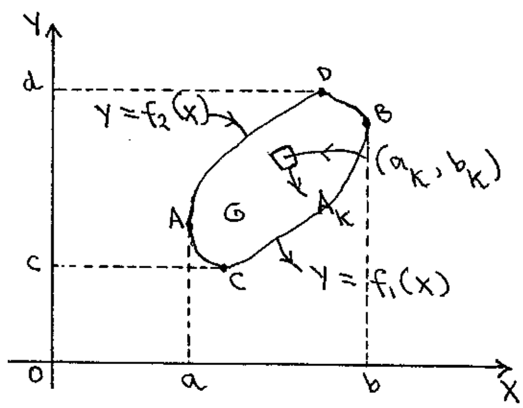
Definisi 47 :

Misalkan F(x,y) didefinisikan di dalam daerah tertutup G dari bidang x o y (lihat gambar 3). G dibagi menjadi n daerah ΔG_k dari luas ΔA_k, k = 1,2,..., n . Misalkan (a_k, b_k) suatu titik dari ΔG_k. Dibentuk jumlah $\sum_{k=1}^{n} F(a_k, b_k)\,\Delta A_k$. Dipandang

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(a_k, b_k)\,\Delta A_k$$ dimana limit adalah

diambil sehingga bilangan n dari pembagian - pembagian bertambah tanpa limit dan sedemikian hingga dimensi linier terbesar dari setiap ΔG_k mendekati nol. Jika limit ini ada maka dinyatakan dengan $\iint_G F(x,y)\,dA$ dan disebut integral rangkap dari F(x,y) di atas daerah G.

Gambar 3 :



2.9. Ruang Hilbert

Definisi 48 :

Misalkan f adalah suatu fungsi pada suatu interval tertutup [0,1] dan daerah jangkau di dalam R. Maka polinomial Bernstein ke n untuk f didefinisikan dengan :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Definisi 49 :

Diberikan fungsi f dari interval tertutup [0,1] ke dalam [0,1]. Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada [0,1] jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga untuk semua p dan q di dalam [0,1] dengan $| p - q | < \delta$ berlaku $| f(p) - f(q) | < \varepsilon$.

Theorema 9 : Theorema Pendekatan Weierstrass

Misalkan f adalah suatu fungsi real kontinu didefinisikan pada suatu interval tertutup [a,b]. Diberikan $\varepsilon > 0$ maka ada suatu polinomial p dengan koefisien real sedemikian hingga $| f(x) - p(x) | < \varepsilon$ untuk setiap X di dalam [a,b].

Bukti :

Karena $X = (b - a) X_1 + a$ adalah fungsi kontinu dari [0,1] onto [a,b], maka fungsi :

$g(X_1) = f((b-a) X_1 + a)$ adalah fungsi kontinu pada [0,1]. Jadi tanpa mengurangi umumnya pembuktian, dapat diasumsikan bahwa [a,b] = [0,1] . Jika theorema ini telah dibuktikan untuk keadaan ini, maka ada suatu polinomial p_1 didefinisikan pada [0,1] sedemikian hingga $| g(x_1) - p_1(x_1) | < \varepsilon$ untuksetiap X_1 di dalam [0,1].

Jika dinyatakan dalam X, didapatkan :

$$\left| f(x) - p_1 \left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right) \right| < \varepsilon$$ untuk setiap X di dalam

[a,b] dan mendefinisikan suatu polinomial p dengan

$$p(x) = p_1 \left(\frac{(x-a)}{(b-a)} \right) .$$

Kita mengingat kembali suatu hal khusus dari binomium Newton yaitu :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1 - X))^n = 1$$

dan jika dideferensialkan ke X , didapatkan .

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[k X^{k-1} (1-X)^{n-k} - (n-k) X^k (1-X)^{n-k-1} \right] =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k-1} (k - nX) = 0$$

dan gandakan dengan X (1-X) di dapatkan :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} (k - nX) = 0 .$$

Jika $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} (k - nX) = 0$

dideferensialkan ke X, didapatkan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ k X^{k-1} (1-X)^{n-k} (k - nX) - X^k (1-X)^{n-k} n \right.$$

$$\left. - (n-k) X^k (1-X)^{n-k-1} (k-nX) \right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-nX^k (1-X)^{n-k} + X^{k-1} (1-X)^{n-k-1} (k-nX)^2 \right] = 0 .$$

Masukkan $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = 1$ ke dalam

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[-nX^k (1-X)^{n-k} + X^{k-1} (1-X)^{n-k-1} (k-nX)^2 \right] = 0,$$

didapatkan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k-1} (k - nX)^2 = n$$

dan gandakan dengan $X(1-X)$ didapatkan :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} (X - \frac{k}{n})^2 = X (\frac{1-X}{n}) .$$

Dari $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ $f(x) = f(x)$ dan

polinomial B_n menurut definisi 48 , didapatkan hubungan

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} [f(x) - f(\frac{k}{n})]$$

sehingga :

$$| f(x) - B_n (x) | \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right|$$

Karena f adalah kontinu seragam pada $[0,1]$, terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$| x- \frac{k}{n} | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f (\frac{k}{n}) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f(\tfrac{k}{n}) \right|$$

dibagi kedalam dua bagian, dinyatakan dengan Σ dan Σ_1 dimana Σ adalah $\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right|$

yang mana $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta$ dan dimana Σ_1 adalah $\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right|$ yang tersisa.

Mudah untuk melihat bahwa $\Sigma < \frac{\varepsilon}{2}$. Kita melengkapi bukti dengan memperlihatkan bahwa jika n diberikan cukup besar, maka Σ_1 dapat dibuat lebih kecil daripada $\frac{\varepsilon}{2}$ bebas dari x. Karena f adalah terbatas, ada suatu bilangan real positif M sedemikian hingga $| f(x) | \leq M$ untuk setiap x di dalam $[0,1]$. Ini berarti bahwa : $\Sigma_1 \leq 2\, M \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ dimana $\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

dinyatakan dengan Σ_{11} adalah diberikan di atas setiap M sedemikian hingga $\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta$. Cukup untuk memperlihatkan bahwa jika n diberikan cukup besar, maka Σ_{11} dapat dibuat lebih kecil daripada $\frac{\varepsilon}{4M}$ bebas dari x. $\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (x-\frac{k}{n})^2 = x\,(\frac{1-x}{n})$ memperlihatkan bahwa $\delta^2\, \Sigma_{11} \leq x\,(\frac{1-x}{n})$ maka $\Sigma_{11} \leq \frac{x\,(1-x)}{\delta^2 n}$.

Harga maksimal dari x (1-x) pada $[0,1]$ adalah $\frac{1}{4}$ sehingga $\Sigma_{11} \leq \frac{1}{4\delta^2 n}$

Jika diambil n adalah sebarang bilangan bulat lebih besar daripada $\frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$, maka

$$\Sigma_{11} \le \frac{1}{4\delta^2 n}$$

$$< \frac{1}{4\delta^2} \left(\frac{\delta^2 \varepsilon}{M} \right) = \frac{\varepsilon}{4M}$$

$$\Sigma_1 \le 2M \ \Sigma_{11}$$

$$< 2M \left(\frac{\varepsilon}{4M} \right) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$| f(x) - B_n (x) | \le \Sigma + \Sigma_1$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

untuk setiap X di dalam [0,1].

Definisi 50 :

Ruang linier X di atas field kompleks dikatakan ruang inner product jika di dalamnya didefinisikan inner product, untuk tiap pasang vektor-vektor f,g, $\in$ X dinyatakan dengan (f,g) sedemikian hingga :

1. $(f,g) = \overline{(g,f)}$
2. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$
3. $(f,f) \ge 0$ dan $(f,f) = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

dimana α, $\beta \in F$

Theorema 10 : Pertidaksamaan Cauchy - Schwarz

Misalkan f dan g adalah vektor-vektor di dalam ruang inner product. Maka :

$$| (f,g) | \le \| f \| \| g \|$$

Bukti :

Misalkan bahwa $f \neq 0$, sebab jika $f = 0$ maka $(f,g) = 0$ dan $\| f\|\|g \| = 0$ sehingga $| (f,g) | = 0$

Sekarang diambil bahwa

$(f,g) = | (f,g) | e^{i\theta}$ dan

$$\alpha = \frac{| (f,g) | e^{-i\theta}}{\| f \|^2}$$

Sehingga $(\alpha f - g, \alpha f - g) \| f\|^2 = \| \alpha f - g \|^2 \| f \|^2 \geq 0$

Dengan menggunakan definisi ruang inner product maka :

$$\begin{aligned}
(\alpha f - g, \alpha f - g) &= \alpha(f, \alpha f - g) - (g, \alpha f - g) \\
&= \alpha\, (\overline{\alpha f - g, f}) - (\overline{\alpha f - g, g}) \\
&= \alpha\, [\bar{\alpha}(\overline{f,f}) - (\overline{g,f})] - [\bar{\alpha}(\overline{f,g}) \\
&\quad - (\overline{g,g})] \\
&= \alpha \bar{\alpha}\, (f,f) - \alpha\, (f,g) - \bar{\alpha}(\overline{f,g}) \\
&\quad + (g,g) \\
&= | \alpha |^2 \| f \|^2 - \alpha(f,g) - \bar{\alpha}\, (\overline{f,g}) \\
&\quad + \| g \|^2
\end{aligned}$$

Sehingga :

$$\left(| \alpha |^2 \| f \|^2 - \alpha(f,g) - \bar{\alpha}(\overline{f,g}) + \| g \|^2 \right) \| f \|^2 \geq 0$$

$$| \alpha |^2 \| f \|^4 - | (f,g) |^2 - | \alpha |^2 \| f \|^4 + \| g \|^2 \| f \|^2 \geq 0$$

$$\| g \|^2 \| f \|^2 \geq | (f,g) |^2$$

Jadi terbukti bahwa $| (f,g) | \leq \| f \| \| g \|$

Theorema 11 :

Misalkan f dan g adalah vektor di dalam ruang inner product dan α bilangan kompleks sebarang, maka norma memenuhi :

a. $\| f \| \geq 0$ dan $\| f \| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

b. $\| \alpha f \| = | \alpha | \, \| f \|$

c. $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

Bukti :

a. Akibat langsung dari definisi ruang inner product.

b. $\| \alpha f \| = (\alpha f , \alpha f)^{1/2} = (\alpha\bar{\alpha} (f,f))^{1/2}$

$= | \alpha | \, \| f \|$

c. Digunakan theorema 10 maka

$$\| f + g \|^2 = (f + g, f + g) = \| f \|^2 + (f,g) + \overline{(f , g)} + \| g \|^2$$

$$\leq \| f \|^2 + 2 \, | (f,g) | + \| g \|^2$$

$$\leq \| f \|^2 + 2 \| f \| \, \| g \| + \| g \|^2$$

$$\leq (\| f \| + \| g \|)^2.$$

Sehingga $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

Definisi 51 : Ruang Hilbert

Barisan $\{ f_n \}$ di dalam ruang inner product H dinamakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N (\varepsilon)$ sehingga untuk semua $n \geq N (\varepsilon)$ dan $m \geq N (\varepsilon)$ berlaku $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$. Dengan kata lain :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \to \infty}} \| f_n - f_m \| = 0$$

H disebut suatu ruang Hilbert jika setiap barisan Cauchy konvergen ke suatu elemen di dalam H.

Definisi 52 :

Suatu operator dari f di dalam ruang Hilbert H ke K f di dalam ruang Hilbert H adalah suatu fungsi K dari H ke H dan jika operator memenuhi sayarat.

$K (\alpha f + \beta g) = \alpha K f + \beta K g$ dimana $\alpha, \beta \in F$ dan

f, $g \in H$ maka dikatakan bahwa K adalah suatu operator linier.

Definisi 53 :

Suatu operator K dikatakan terbatas jika untuk suatu konstanta M didapatkan $\| K f \| \le M \| f \|$ untuk setiap f di dalam suatu ruang Hilbert H.

Definisi 54 :

Misalkan H adalah suatu ruang Hilbert dan T suatu operator terbatas pada H. T tidak perlu suatu operator linier. T disebut suatu operator kontraksi jika ada suatu konstanta positif $\alpha < 1$ sedemikian hingga :

$$\| T f_1 - T f_2 \| \le \alpha \| f_1 - f_2 \|$$

untuk $\forall f_1, f_2 \in H$

Definisi 55 : Ruang L_2 [0,1]

Misalkan ruang $\subset$ [0,1] adalah himpunan dari setiap fungsi-fungsi kontinu yang berharga kompleks. Didefinisikan inner product pada $\subset$ [0,1] dengan :

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

dan norma dengan :

$$\| f \| = \{ \int_0^1 | f(x) |^2 dx \}^{1/2}$$

Misalkan $\{ f_n(x) \}$ adalah suatu barisan. Maka:

$$\| f_n(x) - f_m(x) \|^2 = \int_0^1 | f_n(x) - f_m(x) |^2 dx < \varepsilon ,$$

$n, m > N(\varepsilon)$

Misalkan [a, b] adalah sebarang interval bagian dari [0,1], dan dipandang barisan $\{ \int_a^b f_n(x)\, dx \}$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy Schwarz didapatkan :

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b (f_n (x) - f_m (x)) dx \right| &\le \int_a^b | f_n (x) - f_m (x) | dx \\
&\le \int_0^1 | f_n (x) - f_m (x) | dx \\
&\le \left[\int_0^1 | f_n (x) - f_m (x) |^2 dx \right]^{1/2} \\
&= \| f_n - f_m \|
\end{aligned}
$$

Ini berarti bahwa barisan $\{ \int_a^b f_n (x) dx \}$ adalah barisan Cauchy dari bilangan-bilangan kompleks yang mempunyai suatu limit.

Maka ruang $C[0,1]$ ini merupakan ruang Hilbert yang dinyatakan dengan $L_2 [0,1]$.

<u>Theorema 12</u> :

Misalkan T adalah suatu operator kontraksi pada H. Maka persamaan $T f = f$ ....(1) mempunyai suatu penyelesaian tunggal f di dalam H. Demikian suatu penyelesaian ini disebut suatu titik tetap dari T.

<u>Bukti</u> :

Misalkan ada dua titik tetap f dan g sehingga $T f = f$ dan $T g = g$. Maka :

$\| f - g \| = \| T f - T g \| \le \alpha \| f - g \|$ dan

$(1 - \alpha) \| f - g \| \le 0.$

Karena $\| f - g \|$ adalah selalu tidak negatif, maka didapatkan bahwa $\| f - g \| = 0$ sehingga $f = g$. Ini berarti bahwa jika (1) mempunyai suatu penyelesaian maka penyelesaiannya harus tunggal.

Untuk memperlihatkan bahwa (1) mempunyai suatu penyelesaian, akan digunakan suatu cara iterasi.

Pilih sebarang f_0 dan kemudian bentuk suatu barisan $\{f_n\}$

didefinisikan dengan :

$f_{n+1} = T f_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Akan diperlihatkan bahwa barisan ini adalah suatu barisan Cauchy, dan kemudian bahwa limitnya benar-benar suatu penyelesaian dari (1). Bahwa barisannya mempunyai suatu limit yang sesuai dari kenyataan bahwa suatu barisan Cauchy harus mempunyai suatu limit tunggal di dalam suatu ruang Hilbert. Limitnya akan bebas dari pemilihan awal fo,karena barisan ini adalah suatu penyelesaian dari (1) yang mana harus tunggal.

Perhatikan bahwa :

$$\| f_{n+1} - f_n \| = \| T f_n - T f_{n-1} \| \le \alpha \| f_n - f_{n-1} \| \quad \ldots (2)$$

Dengan pemakaian berulang-ulang dari (2) didapatkan :

$$\|f_{n+1} - f_n\| \le \alpha \|f_n - f_{n-1}\| \le \alpha^2 \|f_{n-1} - f_{n-2}\| \le \ldots \le \alpha^n \|f_1 - f_0\|$$

Untuk lebih umumnya didapatkan, jika $n > m$,

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &= \|(f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \ldots + (f_{m+1} - f_m)\| \\ &\le \| f_n - f_{n-1} \| + \| f_{n-1} - f_{n-2} \| \\ &\quad + \ldots + \| f_{m+1} - f_m \| \\ &\le (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m) \| f_1 - f_0 \| \\ &\le (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots) \| f_1 - f_0 \| \\ &= \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \| f_1 - f_0 \|\end{aligned}$$

sehingga $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \to \infty}} \| f_n - f_m \| = 0$ karena $\alpha < 1$

Ini berarti bahwa $\{ f_n \}$ adalah suatu barisan Cauchy, dan nyatakan limitnya dengan f.

Akan diperlihatakan bahwa limit f adalah suatu penyelesaian dari (1). Dalam masalah ini T adalah suatu operator kontinu, didapatkan :

$$T\,f = T\left(\lim_{n \longrightarrow \sim} f_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \sim} T\,f_n = \lim_{n \longrightarrow \sim} f_{n+1} = f$$

dan $T\,f = f$.

Definisi 56 :

Jika K adalah suatu operator pada ruang Hilbert H, maka kernel dari K adalah ruang bagian tertutup $\{ f \in H : K f = 0 \}$.

Definisi 57 :

Operator $K(x,y)$ dikatakan degenerate jika dapat dinyatakan sebagai jumlah berhingga dari perkalian (product) fungsi-fungsi x dan y, yaitu :

$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(y)$, dimana fungsi-fungsi $a_i(x)$ dan $b_i(y)$ di dalam ruang Hilbert.

Definisi 58 :

Suatu himpunan $\{ f_n(x) \}$ dari fungsi-fungsi yang didefinisikan pada $L_2\,[0,1]$ adalah terbatas seragam pada $L_2\,[0,1]$ jika untuk suatu M didapatkan $| f_n(x) | \leq M$ untuk setiap $x \in L_2\,[0,1]$ dan setiap n.

Definisi 59 :

Suatu himpunan $\{ f_n(x) \}$ dari fungsi-fungsi yang didefinisikan pada $L_2[0,1]$ adalah equikontinu pada $L_2[0,1]$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta(\varepsilon) > 0$.

sehingga untuk semua x_1 dan x_2 di dalam $L_2\,[0,1]$ dengan $| x_1 - x_2 | < \delta(\varepsilon)$ berlaku $| f_n(x_1) - f_n(x_2) | < \varepsilon$.

Definisi 60 :

Misalkan K adalah suatu operator linier yang terbatas pada suatu ruang Hilbert H. Misalkan $\{ f_n \}$

adalah suatu barisan terbatas seragam tak berhingga di dalam H.

K disebut suatu operator kompak jika dari barisan $\{K f_n\}$ dapat diambil suatu barisan bagian $\{ K f_{n_k} \}$ yaitu suatu barisan Cauchy.

Definisi 61 :

Dikatakan bahwa suatu barisan fungsi-fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam pada L_2 [0,1] ke suatu fungsi f, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan positif bulat P sehingga untuk semua $n \geq P$ dan semua $x \in L_2$ [0,1] berlaku $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$.

Agar lebih jelas dituliskan dalam bentuk lambang.

$$(f_n \longrightarrow f \text{ seragam pada } L_2 [0,1]) \Longleftrightarrow ((\forall \varepsilon > 0))$$
$$(\exists P \in N) (\forall n \geq P, \forall x \in L_2 [0,1] \Longrightarrow | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon))$$

Theorema 13 : Kriteria Cauchy

Barisan fungsi $\{f_n\}$ yang didefinisikan pada L_2 [0,1], konvergen seragam pada L_2 [0,1]jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan positif P sedemikian hingga untuk semua $n \geq P$ dan $m \geq P$, dan semua $x \in L_2$ [0,1] berlaku $| f_n (x) - f_m (x) | < \varepsilon$.

Bukti :

($\Longrightarrow$) Diandaikan $\{f_n\}$ konvergen seragam pada L_2 [0,1], dan misalkan f fungsi limitnya. Diberikan $\varepsilon > 0$.

Maka terdapatlah suatu P sehingga untuk semua $n \geq P$ dan semua $x \in L_2$ [0,1] berlaku $| f_n (x) - f (x) | < \frac{\varepsilon}{2}$.

Jadi jika $n \geq N$ dan $m \geq N$ dan $x \in L_2$ [0,1], maka berlaku :

$$| f_n(x) - f_m(x)| \leq | f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Diandaikan syarat Cauchy berlaku, yakni terdapat suatu P sehingga untuk semua $n \geq P$ dan semua $m \geq P$ dan semua $x \in L_2$ [0,1] berlaku :

$$| f_n (x) - f_m (x) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Barisan bilangan $\{f_n(x)\}$ adalah konvergen untuk setiap $x \in L_2$ [0,1] ke suatu limit yang dinamakan f(x). Jadi

barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke fungsi f pada L_2 [0,1]. Sekarang akan dibuktikan bahwa $f_n \longrightarrow f$ seragam pada L_2 [0,1].

($\Longleftarrow$)diberikan $\varepsilon > 0$, dan dipilih P sedemikian hingga $| f_n (x) - f_m (x) | < \frac{\varepsilon}{2}$ berlaku.

Diambil n tetap, dan dalam $| f_n (x) - f_m (x) | < \frac{\varepsilon}{2}$

dibawa $m \longrightarrow$ ~, maka hal ini menghasilkan

$| f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq P$ dan setiap $x \in L_2$ [0,1] ,yang berarti ($f_n \longrightarrow f$ seragam pada L_2 [0,1].

<u>Theorema 14</u> : <u>Theorema Arzela</u>

Jika K adalah suatu ruang L_2 [0,1] yang kompak, dan jika f_n fungsi real atau kompleks yang kontinu pada K, dan $\{f_n\}$ barisan yang terbatas titik demi titik dan equikontinu pada K, maka

(a) $\{f_n\}$ terbatas seragam pada K

(b) $\{f_n\}$ memuat suatu barisan-bagian yang konvergen seragam.

Bukti :

(a) Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\{f_n\}$ equikontinu pada K, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan y di dalam K dengan $|x-y| < \delta$ dan semua $n \in N$ berlaku

$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

Karena K kompak, terdapatlah titik-titik yang cacahnya berhinggga p_1 , p_2 , p_3 ,...p_r anggota K sehinggga

$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} N_\delta(p_i)$

dengan $N_\delta(p_i) = \{ x : | p_i - x | < \delta \}$, $i = 1, 2, \ldots, r$

Karena $\{ f_n \}$ terbatas titik demi titik pada K, maka terdapatlah bilangan real M_i sehingga $| f_n(p_i) | < M_i$ untuk semua $n \in N$.

Diambil $M = \text{maks}\{ M_1, M_2, \ldots M_r\}$. Untuk sebarang $x \in K$, terdapat suatu i dengan $1 \le i \le r$ sehingga $x \in N_\delta(p_i)$.

Jadi menurut $| f_n(x) - f_n(y) | < \varepsilon$ berlaku

$| f_n(x) - f_n(p_i) | < \varepsilon$ untuk semua $n \in N$.

Dengan demikian untuk sebarang $x \in K$ dan sebarang $n \in N$ berlaku $| f_n(x) | < |f_n(p_i) | + \varepsilon < M + \varepsilon$.

Jadi terbukti (a).

(b) Dimisalkan $\varepsilon > 0$ dan diambil $\delta > 0$ seperti pada awal bukti ini.

Karena K adalah kompak maka terdapat titik-titik anggota suatu himpunan bagian dari K, katakanlah $\mathbb{E}$ yang cacahnya berhingga x_1 , $x_2, \ldots, x_s$ sehingga :

$K \subset \bigcup_{i=1}^{s} N_\delta(x_i)$ menurut definisi 29.

Untuk memudahkan penulisan kita nyatakan $f_{n_k} = g_k$ dan akan dibuktikan bahwa $\{g_k\}$ konvergen seragam pada K. Karena $\{g_k\}$ konvergen di setiap titik anggota $\mathbb{E}$, jadi masing-masing barisan bilangan

$\{ g_k (x_1) \}, \{ g_k (x_2) \}, \ldots, \{ g_k (x_s) \}$

adalah konvergen. Menurut kriteria Cauchy (Theorema 13), sesuai dengan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat P sehingga untuk $n \geq P$ dan $m \geq P$ berlaku :

$| g_n (x_j) - g_m (x_j) | < \varepsilon$ untuk j = 1, 2, ...s. Untuk sebarang $x \in K$, $K \subset \bigcup_{i=1}^{s} N_\delta(x_i)$ menunjukkan bahwa terdapat suatu q dengan $1 \leq q \leq s$ sehingga $x \in N_\delta(x_q)$ dan mengingat

$| f_n(x) - f_n (y) | < \varepsilon$ berlaku $| g_k (x) - g_k (x_q) | < \varepsilon$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$, sebab g_k adalah suatu fungsi anggota barisan $\{f_n\}$. Jika $n \geq P$ dan $m \geq P$ dengan memperhatikan :

$| g_n (x_j) - g_m (x_j) | < \varepsilon$ untuk j = 1, 2,..., s dan

$| g_k (x) - g_k (x_q) | < \varepsilon$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$, maka :

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_q)| + |g_n(x_q) - g_m(x_q)| + |g_m(x_q) - g_m (x) |$$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat P sehingga untuk semua $n \geq P$ dan semua $m \geq P$, dan semua $x \in K$ berlaku :

$| g_n (x) - g_m (x) | < 3 \varepsilon$, menurut kriteria Cauchy (theorema 13) $\{ g_k \}$ jadi $\{ f_{n_k} \}$ konvergen seragam pada K.