BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Determinan dan Kofaktor

Definisi 1 :

Permutasi adalah barisan bilangan $(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ dimana berlaku $J_i \neq J_k$, untuk $i \neq k$ $(i,k = 1,2,\ldots,n)$ serta J_i salah satu bilangan asli $(1,2,\ldots,n)$.

Contoh :

P= (1,4,3,2,5) adalah suatu permutasi dari lima bilangan 1,2,3,4,5

Definisi 2 :

n buah bilangan asli 1,2,...,n dapat dibentuk permutasi sebanyak $n! = n(n-1)(n-2)\ldots2.1$

Definisi 3:

Banyaknya inversi dalam suatu permutasi $P=(J_1 \ldots J_n)$ dari n bilangan 1,2,...,n adalah banyaknya pasangan J_i, J_k $(1 \leq i,k \leq n)$ dengan $J_k > J_i$ dan $k<i$.

Contoh :

Permutasi P=(1 4 3 2 5) memiliki tiga inversi yaitu (4 3), (4 2), (3 2).

Definisi 4 :

Suatu permutasi P disebut permutasi genap apabila jumlah inversi dalam permutasi tersebut genap, dan disebut permutasi ganjil bila jumlah inversnya ganjil.

Contoh :

Contoh :

Permutasi P=(1 4 3 2 5) adalah permutasi ganjil karena memiliki tiga inversi.

Definisi 5 :

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun atau dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris dan kolom). Dengan skalar disebut elemen matriks.

Definisi 6 :

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n punya invers bila ada suatu matriks B, sehingga $AB=BA=I_n$. Matriks B tersebut disebut invers matriks A ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n.

Definisi 7 :

(U_{ij}) adalah matriks identitas bila $u_{ij}=1$ untuk $i=j$ dan $u_{ij}=0$ untuk $i\neq j$, biasa ditulis I_n dengan n menunjukkan ordonya.

Definisi 8:

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya 0.

Definisi 9 :

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dengan banyaknya baris (m) sama dengan banyaknya kolom (n) atau m=n, juga disebut matriks berordo (nxn).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 10 :

Matriks transpose dari suatu matriks A dengan ordo (mxn) adalah matriks dengan menulis baris ke-i dari matriks A, sebagai kolom ke-i dari matriks transpose, ditulis A^T dengan ordo (nxm).

Contoh :

Pandang contoh pada definisi 9 ,

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 11 :

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, matriks berukuran sama maka A+B adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Definisi 12 :

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran (pxq) dan $B = (b_{ij})$ berukuran (qxr) maka perkalian AB adalah matriks C $= (c_{ij})$ berukuran (pxr) dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{iq}b_{qj}$, untuk $i=1,2,..,p$ dan $j=1,2,...,r$.

Pandang suatu matriks bujur sangkar A berordo (nxn)

$$\det(A) = |A| = \sum_{J} \varepsilon(J_1 \ldots J_n) a_{1J_1} a_{2J_2} \ldots a_{nJ_n}$$

dengan det(A) adalah determinan matriks A.

$J_1, \ldots, J_n$ adalah permutasi dari $1, 2, \ldots, n$.

$\sum_J$ adalah jumlah semua permutasi yang mungkin.

$$\varepsilon(J_1 \ldots J_n) \text{ adalah } \begin{cases} 1, & \text{jika } J_1 \ldots J_n \text{ permutasi genap} \\ -1, & \text{jika } J_1 \ldots J_n \text{ permutasi ganjil} \end{cases}$$

Definisi 14.

Submatrik M_{ij} dari matrik A dengan ukuran $(n-1)x(n-1)$ adalah matrik A dimana baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan.

Definisi 15.

Minor adalah harga determinan dari submatrik M_{ij} atau $|M_{ij}|$

Definisi 16.

Kofaktor elemen a_{ij} dari matrik bujursangkar A, yang ditulis Δ_{ij} adalah $(-1)^{i+j}$ kali harga minornya atau $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

2.2. Persamaan linier

Sistim persamaan linier non homogen derajat n dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$AX = B$, $B = 0$ sistem persamaan linier homogen

$B \neq 0$ sistem persamaan linier nonhomogen

dengan

$A = [a_{ij}]$ adalah matrik koefisien dengan ordo n

X adalah vektor kolom variabel atau $X^T = [X_1 X_2 \ldots X_n]$

B adalah vektor konstanta atau $B^T = [b_1 b_2 \ldots b_n]$

untuk mencari solusi sistim persamaan linier nonhomogen derajat n dapat digunakan aturan Cramer yang memiliki bentuk :

$$X_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad |A| \neq 0$$

dengan

X_k = solusi dari sistem persamaan linier nonhomogen ordo n

$|A|$ = determinan

D_k = determinan dari matrik koefisien A yaitu |A| dengan mengantikan kolom ke-k dengan harga persamaan B

Theorema 1

Sistim persamaan linier nonhomogen derajat n yang memiliki matrik koefisien A dàn matrik koefisien B,

maka $D_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \, \Delta_{ik}$, $\quad (i,k=1,2,\ldots,n)$

dengan

D_k = determinan dari matrik koefisien A dengan mengantikan kolom ke-k dengan harga persamaan B

b_i = harga persamaan baris ke-i

Δ_{ik} = kofaktor elemen baris ke-i kolom ke-k

bukti

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{1(k-1)} & b_2 & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(k-1)} & b_n & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

menurut sifat determinan, determinan dari suatu matrik sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Karena kolom ke-k dari matrik koefisien A telah diganti dengan harga persamaan B, maka

$$D_k = b_1\Delta_{1k} + b_2\Delta_{2k} + \ldots + b_n\Delta_{nk}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} b_i\Delta_{ik} \qquad \text{terbukti}$$

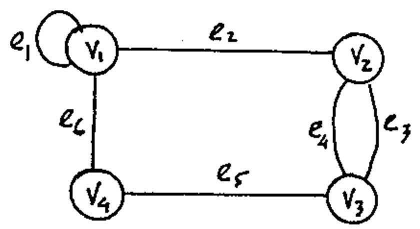
2.3. Konsep Dasar Digraf

Suatu graf adalah suatu pasangan himpunan G=(V,E) dengan himpunan $V=\{v_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$, V_i disebut vertek dan himpunan $E=\{e_j, j=1,2,\ldots,q\}$, e_j disebut sisi. e_j merupakan pasangan dua vertek v_i dan v_k. Disini terdapat dua hal :

1. bila (v_i,v_k) tidak dibedakan dengan (v_k,v_i), G disebut graf tak berarah.
2. bila (v_i,v_k) dibedakan dengan (v_k,v_i), G disebut graf berarah (directed graf) yang disingkat digraf.

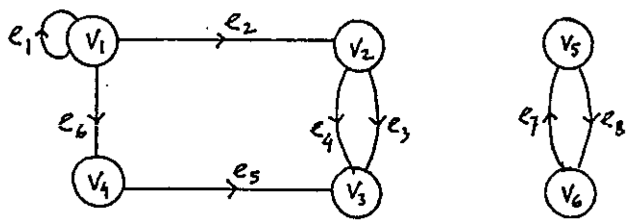
Untuk graf tak berarah, v_i dan v_k disebut vertek ujung dari e_j. Untuk graf berarah $e_j=\{v_i,v_k\}$, v_i disebut vertek awal dan v_k disebut vertek akhir dari e_j.

Misalkan suatu graf G=(V,E) terdiri dari 4 vertek dan 6 sisi seperti gambar berikut :



Disini $e=(V_1,V_1)$ disebut suatu loop, yaitu sisi yang memiliki suatu vertek ujung yang sama, dalam hal ini vertek ujung yang sama adalah V_1. Sedangkan e_4 dan e_3 dikatakan sejajar kerena memiliki vertek ujung yang sama yaitu V_2 dan V_3.

Suatu directed graf G_d= (V,A) yang terdiri dari 6 vertek dan 8 sisi, misal :



pada graf diatas, e_1 juga disebut loop, e_7 dan e_8 disebut sisi sejajar, karena kedua vertek ujung (akhir dan awal) dari dua sisi berarah itu sama. Apabila arah sisi-sisinya sama, seperti e_3 dan e_4 maka disebut sejajar sejati.

Definisi 17

Suatu graf berarah disebut sederhana, apabila digraf tersebut tidak memiliki loop dan sisi sejajar sejati.

Definisi 18

Suatu digraf $G_s=(V_s,A_s)$ disebut subgraf dari digraf G=(V,A), apabila $A_s \subset A$ dan $V_s \subset V$, $\Rightarrow$ masing-masing sisi dari G_s mempunyai vertek awal dan vertek akhir sebagaimana yang ada dalam G. Sedangkan bila $V_s \subset V$ dan semua sisi yang menghubungkan vertek-vertek V_s dalam G terdapat pula dalam G_s, maka G_s disebut sectional subgraf dari G.

Definisi 19

Untuk suatu digraf $G_d=(V,A)$, barisan sisi berarah dengan panjang k dalam G_d adalah barisan sisi $e_1,e_2,\ldots,e_k$ dengan $e_i=(V_{i,1},V_{i,2})$ yang membentuk suatu barisan yang saling berhubungan dalam arti $V_{i,1}=V_{i-1,2}$, untuk i=2,3,...,k atau barisan sisi

$$(V_{1,1},V_{1,2}),(V_{2,1},V_{2,2}),\ldots,(V_{k,1},V_{k,2})$$

barisan sisi berarah dikatakan tertutup, apabila $V_{1,1}=V_{k,2}$ dan terbuka bila $V_{1,1}\neq V_{k,2}$. Dalam barisan sisi terbuka, vertek $V_{1,1}$ disebut vertek awal dan vertek $V_{k,2}$ disebut vertek akhir.

Definisi 20

Jika semua sisi dalam suatu barisan sisi berarah berbeda;

$$V_{1,1},V_{1,2}),(V_{2,1},V_{2,2}),\ldots,(V_{k,1},V_{k,2}) \quad \ldots(*)$$

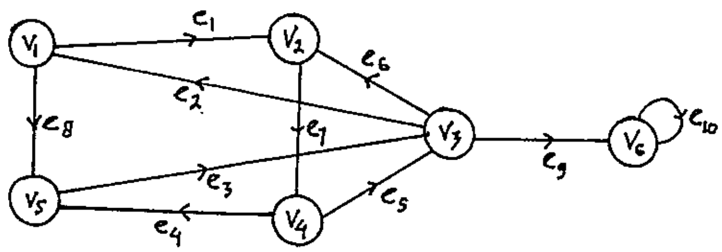
maka barisan berarah tersebut disebut lintasan berarah sederhana (Directed Edge Train) dari $V_{1,1}$ ke $V_{k,2}$. Bila $V_{1,1}=V_{k,2}$ lintasan berarah sederhana ini disebut sirkuit berarah sederhana.

Definisi 21

Lintasan berarah sederhana (*) disebut lintasan berarah elementer (Directed path) dengan panjang k dari $V_{1,1}$ ke $V_{k,2}$, bila semua vertek $V_{i,1}$, i=1,2,...,k berbeda. Bila $V_{1,1}=V_{k,2}$ lintasan berarah elementer ini disebut sirkuit berarah saja.

Suatu loop dari digraf juga merupakan sirkuit berarah dengan panjang 1.

contoh :



dari gambar digraf diatas terlihat bahwa barisan sisi $e_1, e_7, e_5, e_2, e_8, e_3, e_9, e_{10}$ adalah lintasan berarah sederhana dari V_1 ke V_6 dengan panjang 8. Tetapi bukan lintasan berarah elementer.

Lintasan berarah sederhana; e_1, e_7, e_5, e_6 adalah lintasan berarah elementer dengan panjang 4. Sedangkan : e_1, e_7, e_4, e_3, e_2 adalah sirkuit berarah elementer dengan panjang 5.

Definisi 22

Suatu digraf G_d, banyaknya sisi dari G_d yang memiliki vertek V_i sebagai vertek awal disebut *derajat keluar* dari vertek V_i dalam G_d, ditulis $d^+(V_i)$, dan banyaknya sisi dari G_d yang memiliki vertek V_i sebagai vertek akhir disebut derajat masuk dari vertek V_i, ditulis $d^-(V_i)$.

Jika $d(V_i)$ menyatakan banyaknya sisi dan G_d yang berpangkal divertek V_i, yaitu V_i sebagai vertek awal atau vertek akhir, maka $d(V_i)=d^+(V_i)+d^-(V_i)$

Definisi 23

Suatu digraf dikatakan digraf teratur (Regular digraf) derajat k, jika $d^+(V_i)=d^-(V_i)=k$ untuk masing masing vertek V_i dalam G_d

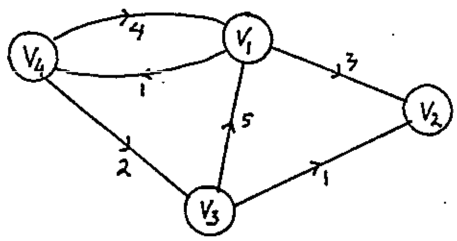
Definisi 24

Suatu digraf dikatakan terhubung (Connected digraf), jika didalam digraf tersebut terdapat lintasan berarah elementer yang menghubungkan setiap pasang vertek.

Definisi 25

Suatu directed graf berbobot G=(V,E,W) adalah suatu digraf yang untuk setiap sisi berarahnya diberi bobot(nilai)

contoh :



dengan :

$G=(V,E,W)$, $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$

$E=\{e_1=(V_1,V_2),e_2=(V_1,V_4),e_3=(V_3,V_1),e_4=(V_3,V_2),$
$e_5=(V_4,V_1),e_6=(V_4,V_3)\}$

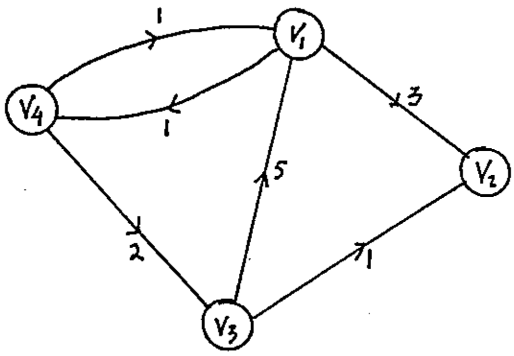
$W(e_1)=3$, $W(e_2)=1$, $W(e_3)=5$, $W(e_4)=1$, $W(e_5)=4$, $W(e_6)=2$

Definisi 26

Matrik bobot $W=[X_{ij}]$, dari digraf G_d dengan n vertek yang tak memiliki sisi sejajar sejati adalah matrik dengan ordo n yang memiliki elemen-elemen:

$$X_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & \text{,jika ada sisi berarah dari vertek i ke vertek j} \\ & \text{adalah bobot yang diberikan pada sisi berarah} \\ & \text{yang menghubungkan vertek i ke vertek j} \\ 0 & \text{,jika tidak ada sisi berarah tersebut} \end{cases}$$

contoh digraf dengan matrik bobotnya:



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.4. Coates Graf

Berdasarkan sifat bahwa setiap digraf dengan n vertek tanpa sisi sejajar sejati berkorespondensi dengan sebuah matrik nxn, sedangkan setiap sistim persamaan linier juga berkorespondensi dengan sebuah matrik koefisien, maka coates memperkenalkan suatu cara menyelesaikan sistim persamaan linier dengan mengunakan digraf tertentu. Oleh Coates digraf tertentu itu dinamakan flow graf yang lebih dikenal dengan Coates graf

Definisi 27

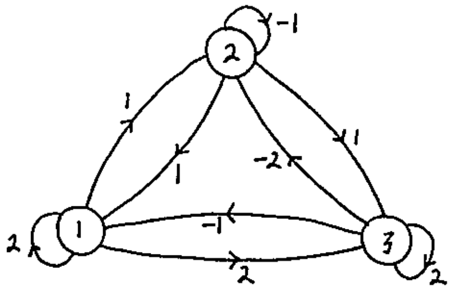
Untuk suatu matrik bujursangkar $A=[a_{ij}]$ dengan ordo n, dapat dibentuk suatu Coates graf, ditulis $G_c=G_c(A)$, yaitu digraf dengan n vertek yang setiap sisi berarahnya memiliki bobot. Vertek-verteknya dinyatakan dalam bilangan bulat dari 1 sampai n sedemikian sehingga jika $a_{ji} \neq 0$, berarti ada sisi berarah dari vertek i ke vertek j dengan bobot a_{ji}, i,j=1,2,...,n

Proses mengubah suatu matrik kedalam bentuk suatu Coates graf dengan cara mentranPose matrik koefisien. Tranpose dari matrik koefisien tersebut merupakan matrik bobot.

Pandang suatu matrik,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

maka Coates graf $G_c(A)$ yang berhubungan dengan matrik A adalah :



Sebaliknya jika Coates graf $G_c(A)$ diberikan, maka dapat dengan mudah diperoleh matrik A yang berhubungan dengan $G_c(A)$, caranya dengan mentranfose matrik bobot dari Coates graf tersebut, jadi ada korespondensi 1-1 antara suatu matrik ordo n dengan Coates graf.

Dari suatu persamaan linier dapat pula dibentuk Coates graf yang berhubungan dengan sistim persamaan linier itu.

Pandang suatu sistim persamaan linier AX=B.

Maka vertek-vertek dalam Coates graf menyatakan variabel dari sistim persamaan linier yaitu; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ditambah dengan vertek x_{n+1} yang menunjukkkan vektor kolom B.

Untuk memperoleh Coates graf dari sistim persamaan linier AX=B, terlebih dahulu dibentuk matrik Au yang merupakan matrik yang diperoleh dari A dengan menambahkan kolom B ke n+1 dari A. Sehingga diperoleh Coates graf yang berhubungan dengan matrik A_u, ditulis $G_c(A_u)$. $G_c(A_u)$ inilah yang merupakan coates graf yang berhubungan dengan sistim persamaan linier AX=B.

contoh :

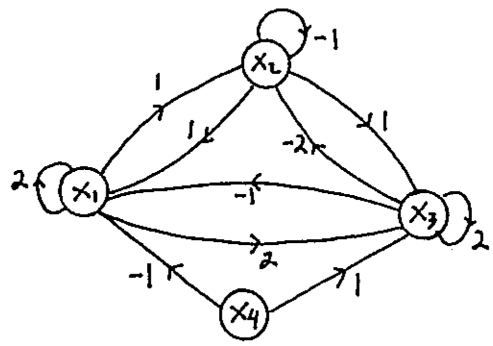
Pandang sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

maka matrik A_u adalah :

$$A_u = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_u^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan Coates graf $G_c(A_U)$ yang berhubungan dengan sistim persamaan linier diatas adalah:



2.5. Coates graf dan determinan

Definisi 28

$f(G_s)$ adalah hasil kali seluruh bobot yang dimiliki oleh garis-garis graf berarah dari sepasang vertek (i,j), dimana i titik awal dan j titil akhir didalam subgraf tersebut (i,j=1,2,...,n) atau

$$f(G_s) = \prod_{i,j\in V_s} f(i,j)$$

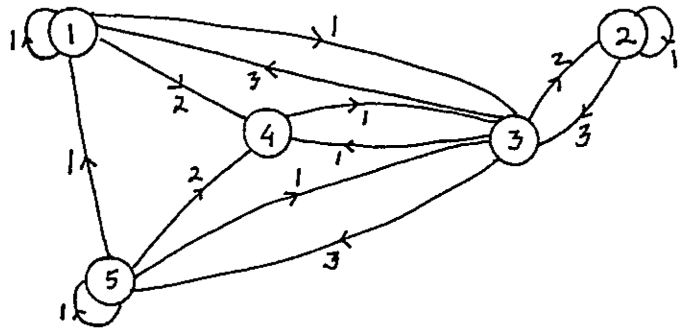
dengan

f(i,j) adalah bobot yang berhubungan dengan sisi(i,j) dari digraf G=(V,E)

$G_s=(V_s,A_s)$ adalah subgraf dari G, yaitu $A_s \subset E$ dan $V_s \subset V$ dengan G suatu digraf.

Sehingga apabila G_s adalah null graf, yaitu $A_s=0$ dan $V_s=0$, maka $f(G_s)=f(0)=0$

contoh



gambar 1

dari gambar, apabila $G_s=(V_s,A_s)$ dengan

$A_s = \{(3,1),(2,2),(5,4),(3,5)\}$ maka

$f(G_s) = f(3,1).f(2,2).f(5,4).f(3,5)$

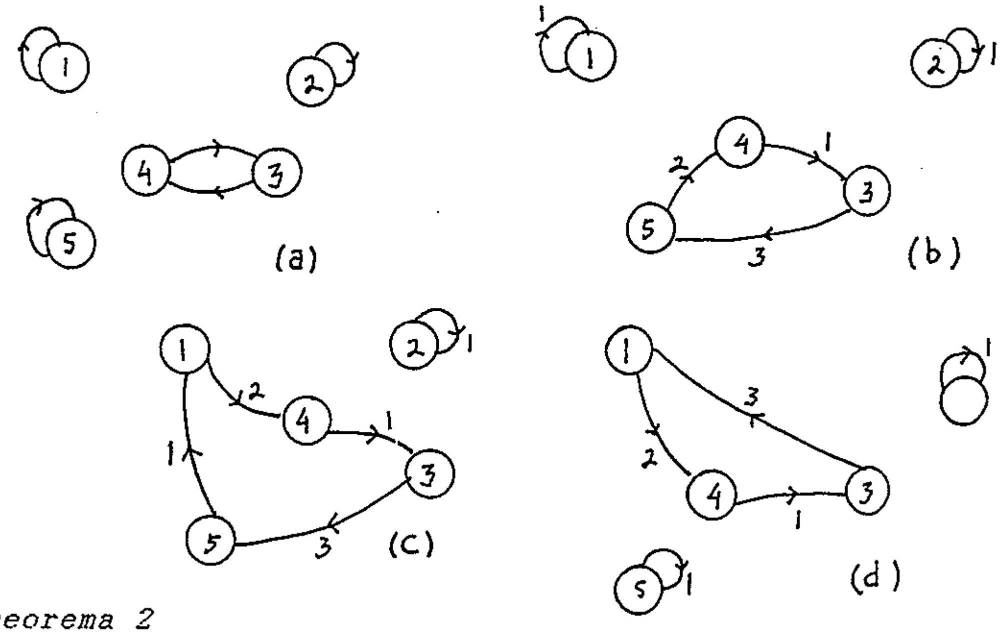
$= 3.1.2.3 = 18$

definisi 29

Faktor-1 dari suatu digraf adalah subgraf pembentang (spanning subgraf) yang merupakan digraf teratur dengan derajat 1.

Contoh :

dari gambar 1 maka dapat dibentuk 4 buah faktor-1 sebagai berikut :



Theorema 2

Bila $G_c(A)$ adalah coates graf yang berhubungan dengan matrik A berordo n, maka :

$$\det(A)=(-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h)$$

dengan :

h adalah faktor-1 dalam $G_c(A)$

L_h adalah banyaknya sirkuit berarah dalam h

$\sum_h$ adalah jumlah terhadap semua faktor-1 dalam $G_c(A)$

bukti :

dari definisi 13 deketahui

$$\det(A) = \sum_J \varepsilon(J_1 \ldots J_n) a_{1J_1} a_{2J_2} \ldots a_{nJ_n}$$

misalkan $a_{1J_1} a_{2J_2} \ldots a_{nJ_n} \neq 0$ untuk suatu permutasi.

Dalam Coates graf $G_c(A)$, $a_{1J_1} a_{2J_2} \ldots a_{nJ_n}$ masing-masing menunjukkan bobot yang berhubungan dengan sisi $(J_1,1),(J_2,1),\ldots,(J_n,1)$. Sisi-sisi ini jelas akan membentuk suatu spaning subgraf h dari G_c dan karena masing-masing vertek dalam barisan ini muncul tepat dua kali, yaitu sebagai elemen pertama dalam pasangan vertek yang satu dan sebagai elemen vertek pada pasangan yang lain., maka masing-masing vertek akan memiliki derajat 1. Berarti h adalah spanning subgraf yang merupakan digraf teratur dengan derajat 1, atau h adalah faktor-1 dari G_c. Dan $f(h)=a_{1J_1} a_{2J_2} \ldots a_{nJ_n}$, karena menurut definisi 14 $f(G_s)=\Pi f(i,j)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\varepsilon(J_1 \ldots J_n)$ dapat ditentukan oleh h, misalkan $(i_1,i_2)U(i_2,i_3)U\ldots U(i_v,i_1)$ adalah sirkuit berarah dengan panjang W dan h. Bentuk 2 buah barisan vertek berikut;

baris-1 : $i_1,i_2,\ldots,i_{v-1},i_v$

baris-2 : $i_2,i_3,\ldots,i_v,i_1$

maka untuk mengubah baris-2 manjadi baris-1 diperlukan (w-1) perubahan, yakni :

$i_1,i_2,\ldots,i_{v-1},i_1,i_v,\ldots$ perubahan ke-1

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$i_2,i_1,i_3,\ldots,i_v,\ldots\ldots\ldots$ perubahan ke-(w-2)

$i_1,i_2,\ldots,i_v,\ldots\ldots\ldots\ldots$ perubahan ke-(w-1)

jadi jika h mempunyai L_h sirkuit berarah yang terdiri dari $w_1,w_2,\ldots,w_{L_h}$ sisi, maka diperlukan :

$(w_1-1)+(w_2-1)+\ldots+(w_{L_h}-1)=\{(w_1+w_2+\ldots+w_{L_h})-L_h\}$ perubahan untuk membawa urutan indek kolom menjadi indek baris dari h, sehingga :

$\varepsilon(J_1 \ldots J_n) = (-1)^{v_1+v_2+\ldots+v_{L_h} - L_h} = (-1)^{n-L_h}$

Dan determinan A yang diperoleh dengan mengunakan coates graf menjadi :

$\det(A) = \sum_h (-1)^{n-L_h} f(h) = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h)$ (terbukti)

contoh :

Pandang Coates graf $G_c(A)$ gambar 1

faktor-1 (h)	f(h)	L_h
(1)(2)(3,4)(5)	1	4
(1)(2)(4,3,5)	6	3
(2)(1,4,3,5)	6	2
(2)(1,4,3)(5)	6	3

$\det(A) = (-1)^n \sum (-1)^{L_h} f(h)$

$= (-1)^5 \{(-1)^4(1) + (-1)^3(6) + (-1)^2(6) + (-1)^3(6)\}$

$= (-1)(-5) = 5$

Definisi 30

Suatu komponen dari digraf G dikatakan genap(ganjil) jika komponen tersebut mengandung sisi yang banyaknya genap(ganjil). Untuk vertek terisolasi dipandang sebagai komponen genap.

Theorema 3

Misalkan $G_c(A)$ adalah coates graf dari matrik A yang berordo n, maka :

$\det(A) = \sum_h (-1)^{q_h} f(h)$

dengan :

q_h adalah banyaknya komponen genap dalam faktor-1 h

bukti :

Dari theorema 2 diketahui :

$$\det(A)=(-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h)=\Sigma (-1)^{n+L_h} f(h)$$

n adalah ordo matrik A, yang juga merupakan banyaknya vertek dari Coates graf $G_c(A)$ yang merupakan spanning subgraf yang teratur dengan derajat 1, maka h memiliki sisi sebanyak n pula. Untuk n ganjil dalam suatu h, jika L_h genap, berarti h mempunyai komponen genap yang banyaknya ganjil, dengan perkataan lain q_h adalah ganjil, sedangkan $n+L_h$ juga ganjil. Jadi terbukti $(-1)^{n+L_h}=(-1)^{q_h}$
Sebaliknya jika L_h ganjil berarti h mempunyai komponen genap yang banyaknya genap, berarti q_h adalah genap, jadi $(-1)^{n+L_h}=(-1)^{q_h}$ juga terpenuhi.

Begitu pula untuk n genap, apabila L_h genap maka akan terdapat qh yang genap. Sedangkan apabila L_h ganjil, q_h yang diperoleh juga ganjil. Jadi terbukti bahwa $(-1)^{n+Lh}=(-1)$. Sehingga perumusan determinan diatas menjadi $\det(A)=\sum_h(-1)^{q_h} f(h)$ (terbukti)

Definisi 31

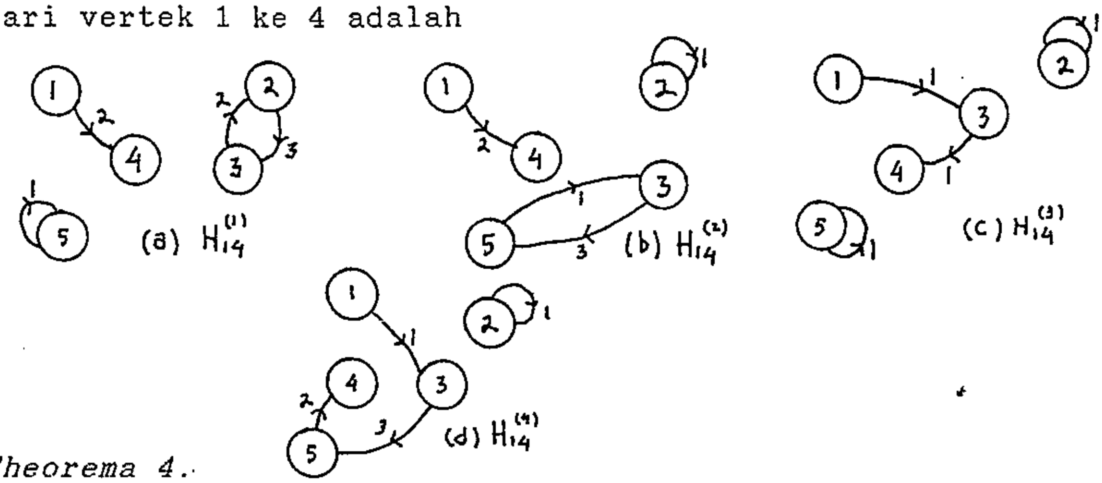
Suatu hubungan faktor-1 H_{ij}, dari vertek i ke vertek j dalam suatu digraf G suatu spanning subgraf yang mengandung :

1. lintasan berarah elementer dari vertek i ke vertek j.
2. himpunan sirkuit berarah dengan vertek yang berbeda-beda, yang meliputi semua vertek dari

$G_c(A)$, kecuali vertek-vertek yang termasuk dalam lintasan berarah elementer dari vertek i ke vertek j.

contoh :

pandang Coates graf pada gambar-1 maka hubungan faktor-1 dari vertek 1 ke 4 adalah



Theorema 4.

Misalkan $G_c(A)$ adalah Coates graf dari matrik A yang berordo n, maka :

1. $\Delta_{ii} = (-1)^{n-1} \sum_{h'} (-1)^{L_{h'}} f(h') = \sum_{h'} (-1)^{q_{h'}} f(h')$

2. $\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} f(H_{ij}) = \sum_{H_{ij}} (-1)^{q_H - 1} f(H_{ij})$, $i \neq j$

dengan :

Δ_{ij} adalah kofaktor dari elemen ke-(i,j) dari matrik A

h' adalah faktor-1 dalam $G_c(A_{ii})$

H_{ij} adalah hubungan faktor-1 dari vertek i ke vertek j dalam $G_c(A)$

$L_{h'}$ dan L_h adalah banyaknya sirkuit berarah masing-masing dalam h' dan H_{ij}

A_{ij} adalah matrik yang diperoleh dari A dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j

$q_h{}'$ dan q_H adalah banyaknya komponen genap masing-masing dalam h' dan H_{ij}

bukti :

terlebih dahulu akan dibuktikan thorema 4 bagian 2.

Δ_{ij} adalah determinan dari matrik A_α yang diperoleh dari A dengan mengantikan kolom ke-j dari A dengan suatu kolom nol kecuali untuk elemen pada baris ke-i diganti dengan 1. Maka Coates graf $G_c(A_\alpha)$ dapat diperoleh dari $G_c(A)$ dengan cara menghilangkan sisi yang memiliki vertek j sebagai vertek awal (termasuk loop pada vertek j, jika ada) dan kemudian menambah sebuah sisi berarah e dari vertek j ke vertek i dengan bobot 1. Sehingga didasarkan theorema 2 diperoleh :

$$\Delta_{ij} = \det(A_\alpha) = (-1)^n \sum_{h_\alpha} (-1)^{L_\alpha} f(h_\alpha)$$

dengan

h_α adalah faktor-1 dalam $G_c(A_\alpha)$

L_α adalah banyaknya sirkuit berarah dalam h

berdasarkan definisi (h_α) dan (H_{ij}) serta (A_α), dapat diperlihatkan bahwa :

(i) dengan menghilangkan sisi tambahan e dari h_α dari $G_c(A_\alpha)$ akan diperoleh suatu H_{ij} dari $G_c(A)$

(ii) dengan menambah sisi tambah e pada H_{ij} dari $G_c(A)$ akan diperoleh suatu h_α dari $G_c(A_\alpha)$

dengan perkataan lain terdapat korespondensi 1-1 antara h_α di $G_c(A_\alpha)$ dan H_{ij} $G_c(A)$. Karena bobot dari e adalah 1 maka :

$f(h_\alpha) = f(H_{ij})$ untuk h_α dan H_{ij} yang sesuia. Karena banyaknya sirkuit berarah dalam H_{ij} kurang 1 dari banyaknya sirkuit berarah dalam h_α maka $L_H = L_\alpha - 1$, sehingga diperoleh :

$$\Delta_{ij} = (-1)^n \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H + 1} f(H_{ij})$$

maka :

$$\Delta_{ij} = (-1)^n \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H - 1} f(H_{ij}) = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} f(H_{ij})$$

$$= \sum_{H_{ij}} (-1)^{n + L_H - 1} f(H_{ij})$$

karena ada koresondensi 1-1 antara H_{ij} di $G_c(A)$ dan h_α di $G_c(A_\alpha)$, A dan A_α berordo n, maka seperti bukti theorema 3 akan diperoleh bahwa :

$$(-1)^{n + L_H} = (-1)^{q_H}$$

sehingga :

$$\Delta_{ij} = \sum_{H_{ij}} (-1)^{q_H - 1} f(H_{ij}) \qquad \text{(bagian 2 terbukti).}$$

Untuk bagian 1 pembuktiannya adalah analog dengan bagian 2. Dari $G_c(A)$, hubungan faktor-1 H_{ii} yang diperoleh juga merupakan faktor-1 h′ dari $G_c(A_{ii})$ dan sebaliknya, jadi banyaknya sirkuit berarah dalam h′ sama dengan banyaknya sirkuit berarah dalam H_{ii} yang sesuai sedemikian sehingga Lh′=LH, maka diperoleh :

$$\Delta_{ii}=(-1)^{n-1}\sum_{H_{ii}}(-1)^{L_H}f(H_{ii})=(-1)^{n-1}\sum_{h'}(-1)^{L_H}f(h)$$

berdasarkan bukti bahwa pada theorema 3, karena ordo dari matrik A_{ii} adalah n-1, maka

$$(-1)^{n-1+L'_h}=(-1)^{q'_h}$$

jadi

$$\Delta_{ii} = (-1)^{n-1}\sum_{h'}(-1)^{L_h} f(h') \qquad \text{(theorema terbukti)}$$

2.6. Coates Graf pada Aturan Cramer

Theorema 5.

Jika matrik koefisien A dari persamaan linier AX=B nonsingular dan $G_c(A)$ adalah Coates graf dari matrik A, maka solusinya adalah

$$X_k=\frac{\sum_{H_{(n+1)k}}(-1)^{L_H}f(H_{(n+1)k})}{\sum_{h'}(-1)^{L_{h'}}f(h')}, \quad k=1,2,\ldots,n$$

dengan

$H_{(n+1)k}$ adalah hubungan faktor-1 dari vertek n+1 ke vertek k dalam $G_c(A_u)$.

A_u adalah matrik lengkap yang diperoleh dari matrik A dengan menambah -B sebagai kolom ke n+1 kemudian menambah baris nol sebagai baris ke n+1

h' adalah faktor-1 dalam $G_c(A)$

L_H dan L_h' adalah banyaknya sirkuit berarah masing-masing di $H_{(n+1)k}$ dan h'

bukti :

L_H dan L_h' adalah banyaknya sirkuit berarah masing-masing di $H_{(n+1)k}$ dan h'

bukti :

Karena matrik A adalah matrik nonsingular, maka solusi yang diperoleh berdasarkan aturan Cramer menurut theorema 1 adalah :

$$X_k = \frac{\sum_{i=1} b_i \Delta_{ik}}{\det(A)} \tag{1}$$

dengan Δ_{ik} adalah kofaktor dari a_{ik} dalam det(A) pembilang pada (1) dapat dinyatakan sebagai :

$$\sum_{i=1} b_i \Delta_{ik} = (-1)^{(n+1)+k} \det(A_u)_{(n+1)k}$$

dengan $(A_u)_{ij}$ adalah matrik yang diperoleh dari A_u dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j, dari definisi kofaktor diketahui bahwa $\Delta_{ik}=(-1)^{i+k} \det(A_u)_{ik}$

dengan theorema 4 diperoleh :

$$(-1)^{(n+1)+k} \det(A_u)_{(n+1)k} = \Delta_{(n+1)k}$$

$$= (-1)^{(n+1)-1} \sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} f(H_{(n+1)k})$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \Delta_{ik} = (-1)^{n} \sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} f(H_{(n+1)k}) \tag{2}$$

dari theorema 2 diperoleh :

$$\det(A) = (-1)^n \sum_{h'} (-1)^{L_h'} f(h') \tag{3}$$

maka dengan mensubstitusikan (2) dan (3) ke (1) diperoleh

$$X_k = \frac{(-1)^n \sum\limits_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} f(H_{(n+1)k})}{(-1)^n \sum\limits_{h'} (-1)^{L'_h} f(h')}$$

$$= \frac{\sum\limits_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} f(H_{(n+1)k})}{\sum\limits_{h'} (-1)^{L'_h} f(h')} \qquad \text{(theorema terbukti)}$$