

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah / Pengertian

Sudah banyak diketahui bahwa untuk mencari solusi dari sistim persamaan linier dapat digunakan aturan Cramer, Metode Eliminasi Gauss, Metode Gauss Yordan, dan sebagainya. Pada uraian yang telah ada sudah dibahas suatu cara penyelesaian sistim persamaan linier dengan menggunakan suatu graf berarah (direkted graf), yang berkaitan dengan matrik koefisien dari sistim persamaan tersebut, yang selanjutnya disebut Coates Graf. Penyelesaian sistim persamaan linier dengan menggunakan Coates Graf ini pada dasarnya analog dengan penyelesaian sistim persamaan linier melalui aturan Cramer. Aturan Cramer yang memiliki bentuk :

$$X_k = \frac{D_k}{|A|}, A \neq 0$$

yang mana

$X_k$  = solusi dari sistim persamaan linier nonhomogen ordo n

$D_k$  = determinan dari matrik koefisien A yaitu  $|A|$  dengan menggantikan kolom ke k dengan harga persamaan B

$|A|$  = determinan matrik koefisien A

dengan metode derected graf diubah menjadi

$$X_k = \frac{\sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} f(H_{(n+1)k})}{\sum_h (-1)^{L_h} f(h)}, k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

Sebagai lanjutan dari uraian tersebut pada penjabaran ini akan dibahas suatu cara penyederhanaan Coates Graf.

Untuk mempermudah penyelesaian sistim persamaan linier, biasanya dilakukan proses penyederhanaan terhadap sistim persamaan linier tersebut. Misalkan sistim persamaan linier terdiri dari  $n$  persamaan dan  $n$  anu (variabel), maka dengan adanya penyederhanaan terhadap sistim persamaan tersebut, akan diperoleh sistim persamaan linier dengan banyaknya persamaan dan banyaknya variabel yang lebih sedikit. Proses penyederhanaan ini biasanya dilakukan melalui proses eliminasi variabel.

Dengan adanya korespondensi antara Coates Graf dan sistim persamaan linier, maka untuk Coates Graf yang didapat dari suatu sistim persamaan linier dapat pula disederhanakan. Proses penyederhanaan ini dilakukan dengan cara eliminasi vertek (titik), sehingga diperoleh Coates Graf dengan vertek yang lebih sedikit tetapi ekwivalen dengan Coates Graf aslinya.

Untuk mengeliminasi vertek dari suatu Coates Graf, sehingga diperoleh Coates Graf tereduksi dilakukan dengan proses sebagai berikut:

- menghapus subgraf dari Coates graf yaitu dengan menghapus semua sisi dan vertek yang berhubungan dengan vertek-vertik dalam subgraf.

- memberi bobot baru pada setiap sisi dalam Coates graf tereduksi.

Setelah didapatkan bentuk Coates Graf tereduksi yang paling sederhana, maka solusi dari persamaan linier tersebut menjadi:

$$X_k = \frac{(-1)^n \sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_{H,r} + \beta} f(H_{(n+1)k}^r)}{\det(G_{cr})} \dots (2)$$

yang merupakan penurunan dari persamaan (1)

dengan

$H_{(n+1)k}$  adalah hubungan faktor dari vertek  $n+1$  ke vertek  $k$  dalam  $G_{cr}(Au)$

$Au$  adalah matrik lengkap yang diperoleh dari matrik koefisien  $A$  dengan menambah  $-B$  sebagai kolom ke  $n+1$  kemudian menambah baris ke  $n+1$

$L_{H,r}$  adalah banyaknya sirkuit berarah dalam  $H_{i,j}^r$

$\beta$  adalah banyaknya vertek dalam  $V_c$ .

*Contoh :*

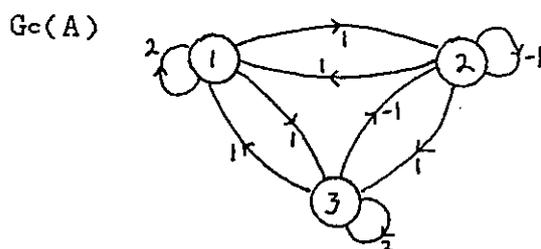
$$2X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

$$X_1 - X_2 - X_3 = -1$$

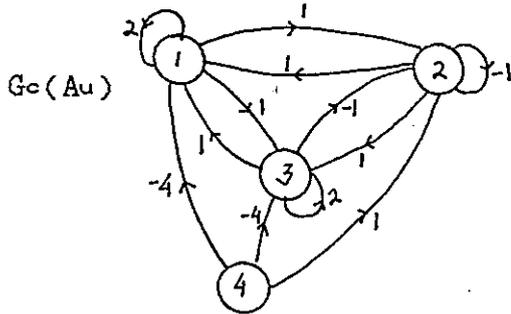
$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 4$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan linier non homogen yang punya bentuk  $AX = B$ ,  $|A| \neq 0$ .

Dalam bentuk Coates graf berubah menjadi



Coates graf yang berhubungan dengan matrik koefisien.



Coates graf yang berhubungan dengan matrik lengkap.

Misal,  $V_c = \{1\}$ , maka  $K_c = w_{11} = 2$

$$C_{32} = w_{32} - w_{31} w_{12} / w_{11} = (-1) - (1)(1) / 2 = -3/2$$

$$C_{23} = w_{23} - w_{21} w_{13} / w_{11} = (1) - (1)(1) / 2 = 1/2$$

$$C_{33} = w_{33} - w_{31} w_{13} / w_{11} = (2) - (1)(1) / 2 = 3/2$$

$$C_{22} = w_{22} - w_{21} w_{12} / w_{11} = (-1) - (1)(1) / 2 = -3/2$$

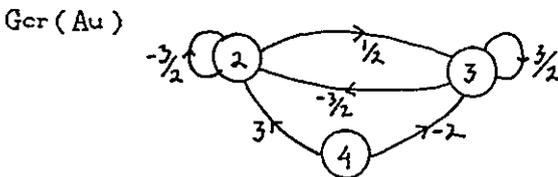
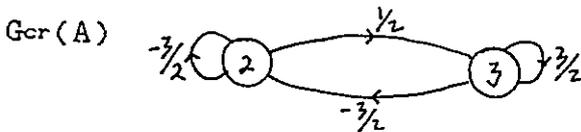
$$C_{43} = w_{43} - w_{41} w_{13} / w_{11} = (-4) - (-4)(1) / 2 = -2$$

$$C_{34} = w_{34} - w_{31} w_{14} / w_{11} = (0) - (1)(0) / 2 = 0$$

$$C_{42} = w_{42} - w_{41} w_{12} / w_{11} = (1) - (-4)(1) / 2 = 3$$

$$C_{24} = w_{24} - w_{21} w_{14} / w_{11} = (0) - (1)(0) / 2 = 0$$

Setelah direduksi Coates graf di atas menjadi



Faktor-1 h dalam  $Gcr(A)$  yaitu  $(2)(3)$  dan  $(2,3)$

$$\det(Gcr(A)) = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h)$$

$$= (-1)^2 \{ (-1)^2 (-3/2)(3/2) + (-1)^1 (1/2)(-3/2) \} = -3/2$$

$H_{42}$  dalam  $Gcr(Au)$  yaitu  $[4,2](3)$  dan  $[4,2,3]$

Sehingga solusi  $X_2$  dan  $X_3$  adalah :

$$X_2 = \frac{(-1)^n \sum_{H_{42}^r} (-1)^{L_{H_{42}^r} + \beta} f(H_{42}^r)}{\det(Gcr(A))} = \frac{(-1)^3 \{ (-1)^{1+1} (3)(3/2) + (-1)^{0+1} (-2)(-3/2) \}}{-3/2} = 1$$

$$X_3 = \frac{(-1)^3 \{ (-1)^{1+1} (-2) (-3/2) + (-1)^{0+1} (3) (1/2) \}}{-3/2} = 1$$

Variabel  $X_1$  didapat dengan cara memasukkan solusi  $X_2$  dan  $X_3$  ke persamaan awal, diperoleh  $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1)$ .

## 1.2. FORMULASI MASALAH

Bagaimana cara menyederhanakan Coates graf dengan eliminasi vertek, Sehingga menghasilkan Coates graf tereduksi yang ekwivalen dengan Coates graf aslinya, dan dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan linier non homogen ordo  $n$  dengan mudah.