BAB III
IDENTIFIKASI

Definisi 3.1 : Suatu proses stokastik $\{Z_t, t \in T\}$ yang dinyatakan dalam bentuk:

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

dengan $\theta_q \neq 0$ disebut proses moving average orde **q** atau disingkat **MA(q)**

3.1 Fungsi Autokorelasi model Box-Jenkins untuk proses Moving Average orde q

Pandang $\gamma_k = \gamma_{-k} = E[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)]$

dengan $Z_{t-k} = \mu + a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \ldots\ldots - \theta_q a_{t-k-q}$

$$\gamma_k = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots\ldots - \theta_q a_{t-q}).(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \ldots\ldots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \ldots\ldots + \theta_q^2)\,\sigma_a^2 & , k=0 \\ (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q)\,\sigma_a^2 & , 1 \leq k \leq q \\ 0 & , k > q \end{cases}$$

Sehingga fungsi autokorelasi adalah :

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q)}{(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2)} & ,1 \le k \le q \\ 0 & ,k > q \end{cases}$$

Terlihat bahwa fungsi auto korelasi dari proses MA(q) terpotong setelah lag ke q.

Pada model Box-Jenkins $(Z_t - \mu)$ dinotasikan dengan $\tilde{Z}_t$

Sehingga didapat model :

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \qquad (3.1)$$

3.2 Syarat invertibilitas

Pada proses MA(q) terdapat syarat invertibilitas yaitu syarat kekonvergenan untuk a_t.

Pandang operator mundur B dengan sifat :

$$B^j a_t = a_{t-j}$$

Sehingga (3.1) dapat dituliskan :

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)\, a_t$$

$$= \theta(B)\, a_t$$

$$a_t = \frac{1}{\theta(B)}\, \tilde{Z}_t$$

$$= \frac{1}{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)}\, \tilde{Z}_t$$

$$= \frac{1}{(1 - C_1 B)(1 - C_2 B) \ldots (1 - C_q B)}\, \tilde{Z}_t$$

$$= \left(\frac{D_1}{1-C_1B} + \frac{D_2}{1-C_2B} + \ldots\ldots + \frac{D_q}{1-C_qB} \right) \tilde{Z}_t$$

$$= \left[D_1 (\sum_{j=0}^{\infty} C_1^j B^j) + D_2 (\sum_{j=0}^{\infty} C_2^j B^j) + \ldots + D_q (\sum_{j=0}^{\infty} C_q^j B^j) \right] \tilde{Z}_t$$

yang konvergen bila $|C_i| < 1$ dimana C_i^{-1} adalah akar-akar dari $\theta(B) = 0$.

Maka **syarat invertibilitas untuk proses MA (q) adalah akar-akar persamaan** $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots\ldots - \theta_q B^q = 0$ **terletak di luar lingkaran satuan.**

Definisi 3.3 : Bila $\tilde{Z}_t$ dinyatakan dalam bentuk :

$$\tilde{Z}_t = a_t + \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p}$$

dengan $\phi_p \neq 0$, maka $\tilde{Z}_t$ disebut proses auto regresive dengan orde **p** atau disingkat **AR(p)**.

3.3 Fungsi autokorelasi model Box-Jenkins untuk proses Auto Regresive orde **p**

Pandang $\gamma_k = \gamma_{-k} = E[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)]$

$$= E[\tilde{Z}_t . \tilde{Z}_{t-k}]$$

$$= E[a_t + \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p}) \tilde{Z}_{t-k}]$$

$$= E[a_t \tilde{Z}_{t-k}] + \phi_1 E[\tilde{Z}_{t-1} \tilde{Z}_{t-k}] + \ldots + \phi_p E[\tilde{Z}_{t-p} \tilde{Z}_{t-k}]$$

mengingat untuk $\tilde{Z}_{t-k}$, a_t hanya berperan hingga waktu ke (t-k), maka untuk $k>0$ $\tilde{Z}_{t-k}$ tak berkorelasi dengan a_t.

Sehingga untuk k>0 berlaku $E[a_t \tilde{Z}_{t-k}] = 0$

Jadi

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots\ldots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

Dan fungsi autokorelasinya adalah :

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots\ldots + \phi_p \rho_{k-p} & , k > 0 \end{cases}$$

3.4 Syarat stasionaritas untuk model AR

Dari Fungsi autokorelasi didapat

$$\rho_k - \phi_1 \rho_{k-1} - \phi_2 \rho_{k-2} - \ldots\ldots - \phi_p \rho_{k-p} = 0$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots\ldots - \phi_p B^p) \rho_k = 0$$

ditulis $\phi(B)=0$

$$(1-G_1 B)(1-G_2 B) \ldots\ldots (1-G_p B) \rho_k = 0$$

yang mempunyai bentuk solusi :

$$\rho_k = A_1 G_1^{\,k} + A_2 G_2^{\,k} + \ldots\ldots A_p G_p^{\,k}$$

dengan G_i^{-1} adalah akar-akar $\phi(B) = 0$.

Agar harga ρ_k tidak melambung tinggi (menjaga tetap stasioner) haruslah $|G_i| < 1$.

Maka syarat stasionaritas untuk proses AR (p) adalah akar-akar persamaan $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots\ldots - \phi_q B^q = 0$ terletak di luar lingkaran satuan.

Keadaan yang mungkin timbul :

1. Jika G_i real maka ρ_k akan bergerak menuju nol

secara eksponensial.

2. Jika G_i dan G_j merupakan akar-akar kompleks sekawan maka untuk $A_i = A_j$ akan diperoleh :

$$A_i G_i^{\,k} + A_j G_j^{\,k} = C^k \sin(Dk + \pi/2)$$

yang berbentuk gelombang sinus teredam.

3. Jika terdapat G_i real maupun kompleks maka fungsi autokorelasi berbentuk gabungan eksponensial dan gelombang sinus yang teredam.

3.5 Fungsi Parsial Autokorelasi

Estimasi Parsial autokorelasi adalah penyajian secara grafis hubungan statistik antara pasangan-pasangan $(\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_{t-k})$ dari suatu deret waktu. Parsial autokorelasi digunakan sebagai penunjuk, bersama-sama dengan autokorelasi, dalam tahap identifikasi yaitu memilih model ARIMA yang diduga sesuai dengan deret waktu yang diamati.

Perbedaan Parsial autokorelasi dengan autokorelasi adalah Partial autokorelasi mengukur seberapa besar hubungan $\tilde{Z}_t$ dengan $\tilde{Z}_{t+k}$ dengan mengikutsertakan pula adanya pengaruh $\tilde{Z}_{t+1}, \tilde{Z}_{t+2}, \tilde{Z}_{t+3}, \ldots, \tilde{Z}_{k-1}$.

Koefisien parsial Autokorelasi ke k ditulis dengan $\theta_{k,k}$ yang merupakan koeffisien regresi (multiple regresi).

Contoh :

$\theta_{1,1}$ ditentukan dari persamaan : $\tilde{Z}_t = \theta_{1,1} \tilde{Z}_{t-1} + u_{t-1}$

$\theta_{2,2}$ ditentukan dari persamaan : $\tilde{Z}_t = \theta_{21}\tilde{Z}_{t-1} + \theta_{2,2}\tilde{Z}_{t-2} + u_{t-2}$

Koefisien parsial autokorelasi biasanya diestimasi dengan persamaan rekursif :

$$\theta_{1,1} = r_1$$

$$\theta_{k,k} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{k-1,j}\, r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \theta_{k-1,j}\, r_j} \qquad ,k=2,3,\ldots$$

$$\theta_{k,j} = \theta_{k-1,j} - \theta_{k,k}\theta_{k-1,k-j}$$

dimana r_k adalah estimasi dari ρ_k .

Contoh :

$$\theta_{2,2} = \frac{r_2 - \theta_{1,1}\, r_1}{1 - \theta_{1,1}\, r_1}$$

$$\theta_{3,3} = \frac{r_3 - \theta_{2,1}r_2 - \theta_{2,2}r_1}{1 - \theta_{2,1}r_1 - \theta_{2,2}r_2}$$

dengan $\theta_{2,1} = \theta_{1,1} - \theta_{2,2}\theta_{1,1}$

3.6 Fungsi Parsial Autokorelasi pada model AR

Pandang model AR(p)

$$\tilde{Z}_t = \phi_1\tilde{Z}_{t-1} + \phi_2\tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p\tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

$$= \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t + \phi_{p+1} \tilde{Z}_{t-(p+1)}$$

$$+ \phi_{t-(p+2)} + \ldots$$

dengan $\phi_k = 0$ untuk $k>p$

Karena $\theta_{k,k}$ diperoleh dari :

$$\tilde{Z}_t = \theta_{k,1} \tilde{Z}_{t-1} + \theta_{k,2} \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \theta_{k,k} \tilde{Z}_{t-k} + u_{t-k}$$

maka $\theta_{p+1,p+1}$ diperoleh dari :

$$\tilde{Z}_t = \theta_{p+1,1} \tilde{Z}_{t-1} + \theta_{p+1,2} \tilde{Z}_{t-2} + \ldots$$

$$+ \theta_{p+1,p+1} \tilde{Z}_{t-(p+1)} + u_{t-(p+1)}$$

sehingga akan didapat $\theta_{p+1,p+1} = \phi_{p+1} = 0$

Dengan cara yang sama akan didapat $\theta_{p+2,p+2} = 0$

dan secara umum $\theta_{k,k}$ untuk $k>p = 0$

Jadi fungsi parsial autokorelasi untuk proses AR(p) akan terpotong setelah lag ke p